Números anteriores

1 **Luigi Grasselli,** Crystallizations and other manifold representations.
2 **Ricardo Piergallini,** Manifolds as branched covers of spheres.
3 **Gareth Jones,** Enumerating regular maps and hypermaps.
4 **J. C. Ferrando and M. López-Pellicer,** Barrelled spaces of class N and of class χ_0.
5 **Pedro Morales,** Nuevos resultados en Teoría de la medida no conmutativa.
6 **Tomasz Natkaniec,** Algebraic structures generated by some families of real functions.
7 **Gonzalo Riera,** Algebras of Riemann matrices and the problem of units.
8 **Lynne D. James,** Representations of Maps.
9 **Grzegorz Gromadzki,** On supersoluble groups acting on Klein surfaces.
10 **María Teresa Lozano,** Flujos en 3 variedades.
11 **P. Morales y F. García Mazario,** Medidas sobre proyecciones en anillos estrellados de Baer.
12 **L. Grasselli and M. Mulazzani,** Generalized lins-mandel spaces and branched coverings of S^3.
13 **V. F. Mazurovskii,** Rigid isotopies of real projective configurations.
14 **R. Cantó,** Properties of the singular graph of nonnegative matrices.
15 **M. B. S. Laporta,** A short intervals result for linear equations in two prime variables.
16 **D. Girela,** El teorema grande de Picard a partir de un método de J. Lewis basado en las desigualdades de Hardnack.
17 **L. Ribes,** Grupos separables con respecto a conjugación.
18 **P. A. Zalesskii,** Virtually free pro-p groups.
19 **S. M. Natanzon,** Fuchsian groups and uniformization of Hurwitz spaces.
20 **M. Izquierdo,** On the fixed-point set of an automorphism of a closed nonorientable surface.
21 **J. M. Ansemil,** Algunos resultados sobre espacios de funciones holomorfas.
22 **J. F. Fernando Galván,** Triángulos racionales con grupo de reflexiones discreto.
23 **C. González,** Técnicas de simetrización aplicadas a ecuaciones diferenciales.
24 **G. González Diez,** El grupo fundamental del espacio de moduli en infinito.
25 **D. Singerman,** Superficies de Riemann y cristalografía.
26 **M. Izquierdo,** On the fixed-point set of an automorphism of a closed nonorientable surface.
27 **Rubén A. Hidalgo,** Grupos de Schottky y matrices de Riemann.

GASCÓN, J. (1993): Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13/3, 295-332.
GASCÓN, J. (1993-1994): Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", *Petit x*, 37, 43-63.
GASCÓN, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas, *Educación Matemática*, 6/3, 37-51.
GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad, *Suma*, 26, 11-21.
GASCÓN, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.
GASCÓN, J. (1999a): La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación Matemática*, 11/1, 77-88.
GASCÓN, J. (1999b): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129-150.
GASCÓN, J. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), (pendiente de publicación).
GODEMENT, R. (1963): Prólogo del libro *Curso de álgebra*, en J.Piaget y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial: Madrid (1978), pp. 255-259.
LAKATOS, I. (1977): *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, vol 2, Cambridge, University Press. [Citado por la traducción castellana: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza: Madrid, 1981].
PIAGET, J. y otros (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial: Madrid.
POLYA, G. (1957): *How to solve it*, Doubleday: Princeton (2a ed.).
POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols, Princeton University Press: Princeton.
POLYA, G. (1962-65): *La découverte des mathématiques* (2 vols.), Dunod: Paris, 1967.
PUIG ADAM, P. (1959): Un punt de vista cibernètic sobre el problema dels problemes, *Ennseñanza*, 33/36, 38-40.
PUIG ADAM, P. (1973): *Curso de Geometría Métrica* (tomo I), Biblioteca Matemática: Madrid.
REVUZ, A. (1971): El lugar de la geometría en la educación matemática, en J.Piaget y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial: Madrid (1978), pp. 291-297.
SANTALÓ, L. A. (1980): Situación de la enseñanza de la Geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática, *Revista de Bachillerato*, Suplemento del num. 13, pp. 23-28.
WHITEHEAD, A. N. (1929): *The Aims of Education and Other Essays* (trad. esp.: *Los fines de la Educación y otros ensayos*, Editorial Paidós: Buenos Airres, 1957).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIN, E. (1963): Puntos de vista extremados sobre la enseñanza de la geometría, en J.Piaget y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial: Madrid (1978), pp. 260-263.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1998a): Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proporcionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, 153-159.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J., (1998b): The role of algebraization in the study of a mathematical organization, CERME-1, Osnabrueck, Germany.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001): El proceso de algebrización de las matemáticas escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).

BOSCH, M. y GASCON, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias,* 12 (3), 314-332.

BROUSSEAU, G. (1987): Représentation et didactique du sens de la division, in G. Vergnaud, G. Brousseau et M Hulin (ed.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque du Sèvres, pp. 47-64, La pensée sauvage: Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1989): *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées pau une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1997): Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori: Barcelona.

CHOQUET, G. (1964): Introducción al libro *La enseñanza de la geometría*, en J.Piaget y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial: Madrid (1978), pp. 264-269.

DELVAL, J. (1997): Hoy todos son constructivistas, *Cuadernos de Pedagogía*, 257, 78-84.

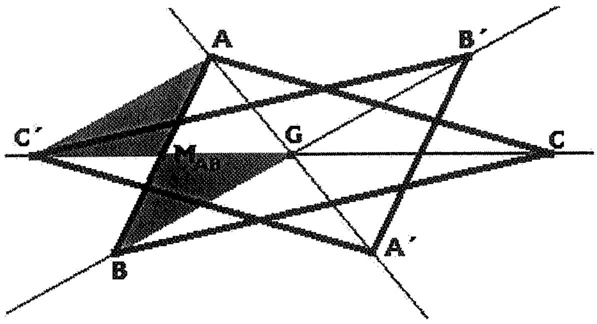
DE LORENZO, J. (1980): La muerte de la Geometría, *Revista de Bachillerato*, Suplemento del num. 13, pp. 31-34.

DIEUDONNÉ, J. (1964): Prólogo del libro *Álgebra lineal y geometría elemental*, en J.Piaget y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial: Madrid (1978), pp. 270-284.

FREUDENTHAL, H. (1967): Recensión de *Álgebra lineal y geometría elemental* de Jean Dieudonné, en J.Piaget y otros, *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Editorial: Madrid (1978), pp. 285-290.

GASCÓN, J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona.

puede justificarse sin más que observar que los triángulos **M_{AB}GB** y **M_{AB}C'A** son iguales puesto que **M_{AB}** es el punto medio de los segmentos **AB** y **C'G**, y los dos ángulos que tienen vértice **M_{AB}** son iguales porque son opuestos por el vértice.

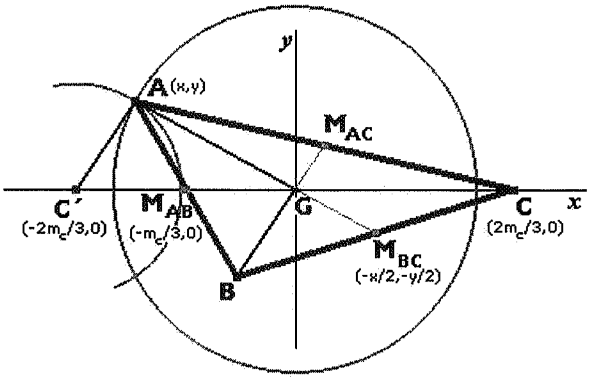


Tenemos, en resumen que la presunta alternativa entre *geometría sintética* y *geometría analítica* es una falsa alternativa, dada la continuidad y hasta complementariedad que existe entre ambas. Queremos acabar reivindicando la necesidad imperiosa de estudiar en profundidad la forma como se deberían conectar, en la Enseñanza Secundaria, las técnicas geometricas sintéticas con las analíticas. Dado que son precisamente las limitaciones de las *técnicas sintéticas* las que dan sentido (son las razones de ser) a las *técnicas analíticas* no tiene ningún tipo de justificación hacer aparecer éstas, como por arte de magia, en el Bachillerato sin ningún tipo de continuidad con la problemática de la geometría sintética estudiada en la E.S.O.

En lugar de "dejar morir" la problemática que se estudia en la E.S.O., y crear una pseudoproblemática geométrica con ejercicios bastante formales para intentar justificar la utilización de las incipientes técnicas analíticas introducidas bastante artificialmente como objetos de enseñanza, deberían retomarse en el Bachillerato algunos tipos de problemas geométricos que se abordaron en la E.S.O. Se podría empezar mostrando, en el Bachillerato, determinadas limitaciones de las técnicas sintéticas clásicas[16] que pueden solventarse mediante el uso de técnicas analíticas. Para que esta práctica docente fuese eficaz sería preciso que se estableciese un nuevo dispositivo didáctico cuya función principal fuese la de *retomar aquellos problemas matemáticos* que habiéndose propuesto en la E.S.O. hubiesen quedado *sin resolver* por limitaciones de las técnicas matemáticas disponibles. Sólo así podría mostrarse la continuidad de la problemática geométrica y la complementariedad entre los diferentes tipos de técnicas geométricas.

Poble Nou, marzo de 2001

[16] Recíprocamente, sería también muy útil proponer en el Bachillerato problemas geométricos cuya resolución mediante la utilización de técnicas sintéticas fuese mucho más sencilla y "natural" que mediante la utilización de técnicas analíticas y, también, problemas geométricos que si bien requieren la utilización de técnicas analíticas para ser resueltos con toda generalidad, necesitan de manera casi imprescindible la utilización previa de técnicas sintéticas a fin de diseñar la estrategia que se llevará a cabo posteriormente con las técnicas analíticas. Se pondría así de manifiesto otro aspecto importante de la complementariedad entre ambos tipos de técnicas.



Se trata de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos. El punto incógnita **A**(x, y) puede construirse como intersección de la circunferencia [1], que tiene centro en el punto **G(0, 0)** y radio $(2/3)\boldsymbol{m_a}$, y la circunferencia [2] que tiene centro en el punto **(**$-(2/3)\boldsymbol{m_c}$**, 0)** y radio $(2/3)\boldsymbol{m_b}$.

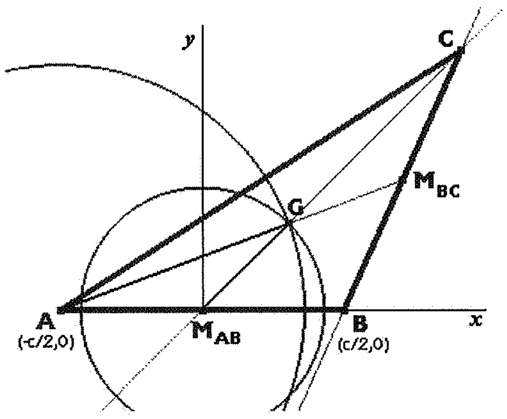
La diferencia fundamental entre los ejemplos (5) y (6), desde el punto de vista de la *técnica sintética de dos lugares geométricos*, radica en que mientras en el primero aparecen dos lugares geométricos (circunferencias) a los que pertenece el punto incógnita que son construibles e *interpretables directamente* a partir de los datos del problema, en el segundo el lugar geométrico [2] presenta unas características un poco diferentes. En efecto, si consideramos únicamente los datos del problema y las propiedades que se deducen inmediatamente de la definición de "mediana", no es "*directamente evidente*"[14] que el punto incógnita **A**(x, y) diste del punto **C'** (simétrico de **C** respecto de **G**) una distancia igual a **BG** = $(2/3)\boldsymbol{m_b}$. Aparece así una limitación de dicha técnica que deberá ser modificada y ampliada para poder abordar el problema en cuestión.

Ya hemos dicho que existen ampliaciones "puramente sintéticas" de la técnica de dos lugares geométricos que permiten resolver el problema de las tres medianas[15], pero una ampliación natural de dicha técnica consiste precisamente en utilizar las técnicas analíticas tal como hemos mostrado, construir con regla y compás las dos circunferencias citadas y, a posteriori, si se prefieren los argumentos "puramente geométricos" o "sintéticos", justificar el resultado sin utilizar coordenadas. En nuestro ejemplo, una vez obtenida mediante los métodos analíticos, la igualdad

$$\mathbf{AC'} = \mathbf{BG} = (2/3)\boldsymbol{m_b}$$

[14] La "*evidencia matemática*" hace siglos que no se reduce a la "*evidencia sintética*". Desde el nacimiento del instrumento algebraico los matemáticos han descubierto y utilizado el enorme alcance de la "*evidencia analítica*" que, en cierta manera, es una evidencia a posteriori. Pero de ninguna manera se trata de evidencias contrapuestas. Tal como hemos mostrado en el ejemplo anterior el instrumento algebraico puede servir para convertir un "problema por resolver", del que se desconoce completamente el objeto incógnita, en un "problema por demostrar", del que se conoce el resultado y únicamente se trata de probarlo (Polya, 1957).

[15] El profesor Josep Vaquer, maestro de muchas generaciones de matemáticos catalanes, explicaba en una entrevista publicada en el Núm. 11 del *SCM/Noticies* (del Institut d'Estudis Catalans, de julio de 1999) que el reto que supuso para él, a los 14 años de edad, la resolución del problema de las tres medianas fue un acicate importante en su futura vocación de matemático. [Agradezco al profesor Agustí Reventós esta comunicación, así como la lectura y crítica de una versión preliminar de este trabajo].



Análogamente, en el ejemplo (6) podemos tomar el baricentro **G(0, 0)** como origen de coordenadas y como eje de abscisas la recta que contiene a la mediatriz $\boldsymbol{m_c}$. Aquí los datos del problema son $\boldsymbol{m_a}$, $\boldsymbol{m_b}$ y $\boldsymbol{m_c}$ (lo que permite suponer, por ejemplo, que los puntos **C** y $\boldsymbol{M_{AB}}$ tienen coordenadas conocidas) y podemos tomar como incógnita uno cualquiera de los puntos **A**, **B**, $\boldsymbol{M_{BC}}$ o $\boldsymbol{M_{AC}}$. Dado que en nuestro sistema de referencia $\mathbf{C(2m_c/3,\ 0)}$ y $\boldsymbol{M_{AB}(-m_c/3,\ 0)}$, podemos tomar $\boldsymbol{A(x, y)}$ como punto incógnita y entonces se tiene:

$$B = (-\frac{2m_c}{3} - x, \quad -y) \qquad M_{BC} = (-\frac{x}{2}, \quad -\frac{y}{2}) \qquad M_{AC} = (\frac{x}{2} + \frac{m_c}{3}, \quad \frac{y}{2})$$

A partir de las condiciones que cumplen los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M_{BC}}$ y $\boldsymbol{M_{AC}}$, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$d(G, A) = \frac{2m_a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{4m_a^2}{9} \qquad [1]$$

$$d(G, B) = \frac{2m_b}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2m_c}{3} + x\right)^2 + y^2 = \frac{4m_b^2}{9} \qquad [2]$$

Y al imponer las condiciones que han de cumplir $\boldsymbol{M_{BC}}$ y $\boldsymbol{M_{AC}}$ se obtienen las ecuaciones:

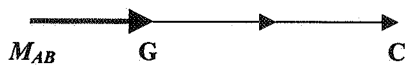
$$d(G, M_{BC}) = \frac{m_a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{m_a^2}{9} \qquad [3]$$

$$d(G, M_{AC}) = \frac{m_b}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{2} + \frac{m_c}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{m_b^2}{9} \qquad [4]$$

que son equivalentes, respectivamente, a [1] y [2].

Ejemplo (6): Construir con regla y compás un triángulo **ABC** dadas las longitudes de las tres medianas: $\boldsymbol{m_a}$, $\boldsymbol{m_b}$ y $\boldsymbol{m_c}$.

Al intentar resolver este problema mediante el *Patrón de Análisis/Síntesis* clásico, en su modalidad de los *dos lugares geométricos*, aparecen dificultades debido a que una vez situado el punto **G** y los extremos de una de las medianas (sean, por ejemplo, M_{AB} y **C**), no es evidente a priori que podamos conseguir construir ninguno de los puntos (**A, B, $\mathbf{M_{BC}}$**, y **$\mathbf{M_{AC}}$**) que resolvería el problema como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás[13].



¿Cuál es la diferencia esencial entre este último problema y los anteriores? ¿Cómo podemos explicar que mediante una pequeña variación del enunciado salgamos del dominio de aplicabilidad de la *técnica sintética* clásica (con regla y compás) *de los dos lugares geométricos*?

Podemos dar una respuesta en el ámbito de la geometría analítica. Para ello compararemos las características de la simbolización global de las condiciones de ambos problemas. Si en el ejemplo (5) tomamos el baricentro **G(*x*, *y*)** como incógnita, la recta **AB** como eje de abscisas y el punto $\boldsymbol{M_{AB}(0, 0)}$ como origen de coordenadas, tenemos:

$$d(A,G)=\frac{2m_a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad (x+\frac{c}{2})^2+y^2=\frac{4m_a^2}{9}$$

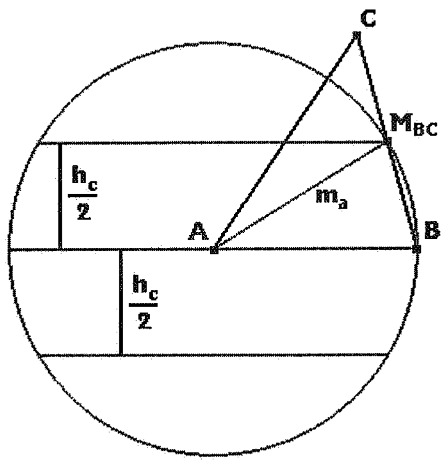
$$d(M_{AB},G)=\frac{m_c}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=\frac{m_c^2}{9}$$

Dado que $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{m_a}$ y $\boldsymbol{m_c}$ son datos del problema, las dos ecuaciones anteriores constituyen lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos y, como ambos contienen al baricentro **G**, éste se obtiene como la intersección de dichos lugares.

[13] Lo que no significa que el problema en cuestión no sea resoluble mediante otras técnicas sintéticas e incluso como intersección de dos lugares geométricos no "*evidentes*" a priori. De hecho, puede demostrarse que la construcción de un triángulo del que se conocen sus tres medianas $\boldsymbol{m_a}$, $\boldsymbol{m_b}$ y $\boldsymbol{m_c}$ puede reducirse, mediante técnicas sintéticas, a la construcción de un triángulo de lados $\boldsymbol{2m_a}$, $\boldsymbol{2m_b}$ y $\boldsymbol{2m_c}$ (Puig Adam, 1973, pág. 209).

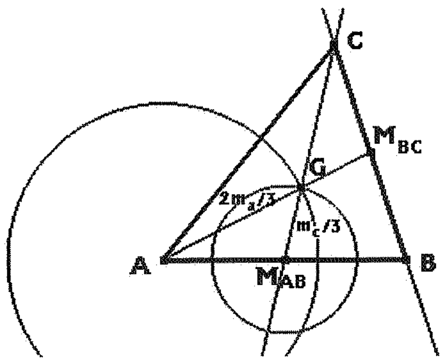
Ejemplo (4): Construir con regla y compás un triángulo **ABC** dados la longitud de un lado: **AB** = c, la altura h_c relativa al lado c y la mediana m_a relativa al lado a.

En este caso el problema se reduce a la construcción del punto medio M_{BC} del lado **BC** el cual se obtiene como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos: la circunferencia de centro **A** y radio m_a y las rectas paralelas a **AB** a distancia $h_c/2$.



Ejemplo (5): Construir con regla y compás un triángulo **ABC** dados la longitud de un lado: **AB** = c, y las longitudes m_a y m_c de las medianas relativas respectivamente a los lado a y c.

En este caso el problema se reduce a la construcción del baricentro **G** del triángulo y éste se obtiene, de nuevo, como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos: la circunferencia de centro el punto medio M_{AB} del lado **AB** y radio $m_c/3$ y la circunferencia de centro **A** y radio $2m_a/3$.

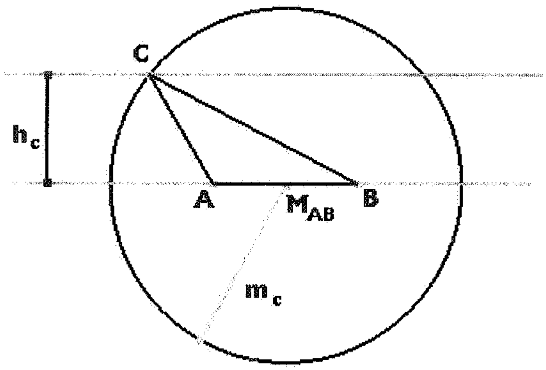


inicial presenta determinadas limitaciones. Se produce entonces la necesidad epistemológica y didáctica de variar la técnica inicial y esta variación suele desembocar en la producción de técnicas denominadas "analíticas" "cartesianas" o "algebraicas" porque su justificación e interpretación natural se da dentro del álgebra[12].

Naturalmente que esta tesis merece ser (de)mostrada además de enunciada. Aquí nos limitaremos a presentar algunos indicios de su verosimilitud en el caso de un tipo particular de problemas. Tomaremos, para ello, un problema de construcción geométrica con regla y compás y mostraremos que mediante pequeñas variaciones del enunciado se amplía el campo de problemas de tal forma que la técnica inicial (formalizada mediante el *Patrón de Análisis/Síntesis*) muestra limitaciones que provocan la aparición del *Patrón Reformulado* el cual incluye la técnica ecuacional. Es fácil ver que el siguiente problema es resoluble mediante la especificación del *Patrón de Análisis/Síntesis* clásico al caso particular de los problemas de construcción de dos lugares geométricos (Polya, 1962-65; Gascón, 1989, 1993 y 93-94).

Ejemplo (3): Construir con regla y compás un triángulo **ABC** dados la longitud de un lado: **AB** = c, y las longitudes de la altura h_c y la mediana m_c relativas a dicho lado c.

Basta reducir el problema a la construcción del tercer vértice **C** del triángulo. Este punto se obtiene como intersección de dos lugares geométricos construibles con regla y compás a partir de los datos: la circunferencia de centro el punto medio M_{AB} de **AB** y radio m_c y las rectas paralelas a **AB** a distancia h_c.



Mediante pequeñas variaciones del problema anterior nos iremos acercando a la ***frontera del ámbito de validez de la técnica sintética de los dos lugares geométricos***. Para ello iremos modificando el enunciado de este problema de manera que la resolución de los problemas que van apareciendo requiera efectuar pequeños cambios en la técnica inicial. Cuando aparezca un problema cuya resolución plantea "dificultades" a dicha técnica, consideraremos que nos hemos situado en la frontera del ámbito de validez de la técnica en cuestión.

[12] Es interesante recordar que clásicamente el álgebra era considerada por el propio Descartes como el "arte analítico"; de ahí que se utilice el adjetivo "analítico" casi como un sinónimo de "algebraico" (Lakatos, 1977, p. 121).

que permite expresar cada una de las variables como función de las otras dos:

$$b^2 = 4s^2 - \frac{4s^4}{d^2}; \qquad d^2 = \frac{4s^4}{4s^2 - b^2}; \qquad s^2 = \frac{1}{2}\left(d^2 \pm d\sqrt{d^2 - b^2}\right)$$

El estudio elemental de estas funciones permite contestar todas las preguntas planteadas en el problema así como plantear y resolver nuevas cuestiones como, por ejemplo: ¿Cuánto mide el lado b si $s = d/2$ = radio de la circunferencia? Utilizando cialquiera de las tres funciones, se obtiene el resultado:

$$s = \frac{d}{2} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{d}{2}\cdot\sqrt{3}$$

5. Las técnicas "analíticas" como desarrollo de las técnicas "sintéticas"

El modelizacionismo[10] presenta todavía importantes limitaciones relacionadas con el *olvido del momento del trabajo de la técnica* y, en consecuencia, con el olvido del papel del *desarrollo de las técnicas matemáticas* en el proceso de estudio (Bosch y Gascón, 1994). En los últimos desarrollos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)[11] se está haciendo un esfuerzo por completar el modelizacionismo (que relaciona dos dimensiones o momentos de la actividad matemática: el momento *tecnológico teórico* y el momento *exploratorio*) con las principales aportaciones del procedimentalismo (que relaciona el momento *exploratorio* y el momento del *trabajo de la técnica*) para integrar de manera funcional las tres dimensiones citadas de la actividad matemática.

Este punto es crucial en el caso que nos ocupa dado que la tesis principal que defenderemos aquí que denominaremos "*tesis de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica*", requiere, por una parte, interpretar la actividad matemática como una actividad de modelización y, por otra, tomar en consideración el papel del desarrollo de las técnicas matemáticas en el proceso de estudio. La citada tesis puede formularse como sigue:

Tesis de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica: Si partimos de un campo de problemas considerados por la comunidad matemática como representantes genuinos de la *geometría sintética* (o "pura") -como son, por ejemplo, los *problemas de construcción geométrica con regla y compás-* y utilizamos las *técnicas sintéticas clásicas* de estudio de este campo, puede mostrarse que el desarrollo de estas técnicas (paralelo a la ampliación progresiva del campo de problemas) provoca rápidamente la aparición de las *técnicas analíticas* características de la *geometría cartesiana.*

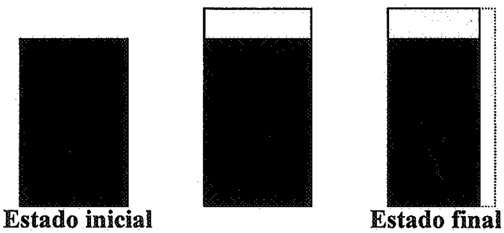
Lo anterior significa que, cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética aparece la necesidad (como en cualquier proceso de estudio de un campo de problemas) de introducir pequeñas variaciones en los problemas de dicho campo y, muy rápidamente, nos encontramos con problemas para los cuales la técnica

---

[10] Llamamos *modelizacionismo* al modelo docente que interpreta "aprender matemáticas" como un proceso de construcción de conocimientos matemáticos relativos a un sistema matemático o extramatemático que se lleva a cabo mediante la utilización de un modelo matemático de dicho sistema (Gascón, 2001).

[11] La TAD se sitúa dentro del que denominamos Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas (Gascón, 1998). Una introducción a dicha teoría se encuentra en Chevallard, Bosch y Gascón (1997). La primera propuesta sistemática se encuentra en Chevallard (1992) y los últimos desarrollos pueden verse en Chevallard (1997 y 1999).

SEGUNDO RECIPIENTE



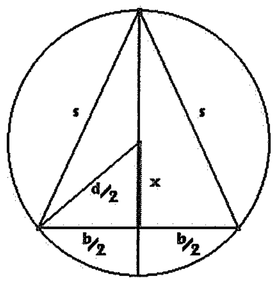
Estado inicial **Estado final**

El trabajo dentro de este modelo requiere únicamente utilizar la *aditividad del área* para mostrar que, en el estado final, los dos recipientes tienen la misma concentración de líquido "extraño" y que, por tanto, el resultado final es independiente de cuál sea el recipiente del que extraemos líquido la primera vez.

(2) Proceso de construcción de conocimientos matemáticos llevado a cabo mediante la *modelización matemática de un sistema geométrico.*

<u>Ejemplo</u> (2): Partimos de la situación problemática constituida por una familia de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de diámetro d. Designamos por s la longitud de cada uno de los lados iguales y por b el (potencialmente) desigual. Inicialmente pueden plantearse, entre otras, las siguientes cuestiones (Polya, 1962-65):
(a) ¿Qué relación hay entre b y s?
(b) ¿Cómo debe ser b para que el triángulo isósceles sea rectángulo?
(c) ¿En qué casos el triángulo es equilátero?
(d) Fijada una de las variables, ¿Cuáles son los límites de variación de las dos restantes?

En este caso el *sistema* (familia de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia) es considerado genuinamente "geométrico" por la comunidad escolar. Podemos utilizar un modelo "algebraico" para responder a las cuestiones planteadas.



El modelo algebraico viene dado por dos relaciones fundamentales que se obtienen, ambas, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=s^2 \qquad x^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Eliminando la incógnita auxiliar x (que representa la distancia del centro de la circunferencia al lado "desigual" del triángulo) se obtiene el modelo algebraico:

$$4s^4-4s^2d^2+d^2b^2=0$$

4. Actividad *"geométrica"* como modelización *"geométrica"*

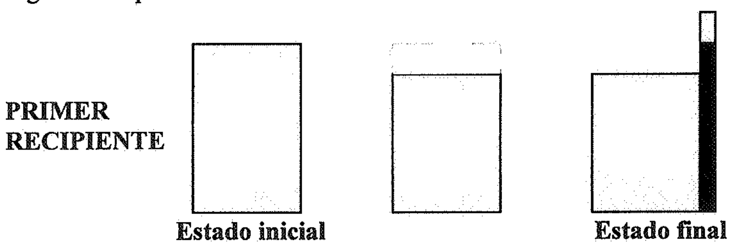
Si identificamos la *actividad matemática* con la *actividad de modelización*, entonces nos veremos abocados a identificar "aprender matemáticas" con el proceso de construcción de conocimientos matemáticos, relativos a un sistema matemático o extramatemático, que se lleva a cabo mediante la utilización de un modelo matemático de dicho sistema. Este es el punto de vista sustentado por el *"modelizacionismo"* que, como modelo docente, supera las limitaciones más burdas de los modelos docentes clásicos (*teoricismo* y *tecnicismo*) y del *modernismo*, aunque sigue presentando insuficiencias relativas a las funciones del desarrollo de las técnicas matemáticas y que citaremos más adelante (Gascón, 1994 y 2001).

Desde el punto de vista del modelizacionismo resultará que "aprender geometría" deberá relacionarse con la *modelización geométrica*, esto es, con un tipo de modelización matemática en el que o bien el sistema o bien el modelo (o ambos) puedan considerarse *"geométricos"*. Tenemos, por tanto, dos formas alternativas (y no excesivamente precisas[9]) de interpretar la *modelización geométrica*:

(1) Proceso de construcción de conocimientos matemáticos llevado a cabo mediante la *utilización de un modelo "geométrico"*.

<u>Ejemplo</u> (1): *Supongamos que tenemos dos recipientes iguales con la misma cantidad de líquido. Los líquidos son diferentes pero perfectamente miscibles. Se extrae una pequeña cantidad de líquido del primer recipiente y se vierte en el segundo; a continuación se mezclan bien los líquidos del segundo recipiente y se extrae de éste la misma pequeña cantidad de líquido para verterla en el primer recipiente en el que también se mezcla perfectamente. Al final del proceso, ¿en cuál de los dos recipientes es mayor la concentración de líquido "extraño"?*

En este caso es posible utilizar un *modelo*, considerado genuinamente "geométrico", que permite responder a las cuestiones planteadas. Se trata de un modelo elaborado con rectángulos que representan como va evolucionando la cantidad de líquido de cada recipiente a medida que se van haciendo los trasvases de líquido. El color gris claro (amarillo en el original) representa el líquido que contiene inicialmente el primer recipiente y el gris oscuro (rojo en el original) el líquido contenido inicialmente en el segundo recipiente.



[9] La ambigüedad proviene de la falta de precisión –en términos de un modelo epistemológico de las matemáticas- del adjetivo "geométrico" (y del sustantivo "geometría"). Esta ambigüedad no es específica de la geometría sino que es compartida por todas las demás disciplinas en que tradicionalmente se ha dividido la "matemática" ("aritmética", "álgebra", "cálculo", etc.). En otro lugar hemos caracterizado las "modelizaciones algebraicas" así como los indicadores del "grado de algebrización" de una organización matemática cualquiera (Bolea, Bosch y Gascón, 1998a, 1998b y 2001), pero este trabajo no ha sido realizado todavía en el caso de la "geometría".

un *modelo matemático*[8] es el resultado de un *proceso de modelización matemática* de un sistema matemático o extramatemático que consta esencialmente de cuatro etapas:

1ª etapa: *Elección de ciertos aspectos del sistema* (sin presuponer que se trate de las características *esenciales*) que se operativizan mediante variables x, y, z, a, b, c, ... Se trata de una elección relativamente arbitraria y necesariamente sesgada (no exhaustiva) que está guiada por lo que el investigador considera como aspectos "relevantes" respecto al estudio que se quiere hacer del sistema y al tipo de fenómenos que se quieren describir. Las variables citadas pueden tomar valores en un conjunto de objetos matemáticos cualesquiera (no es necesario que estos valores sean numéricos). En esta etapa pueden empezar a formularse, con poca precisión, preguntas y cuestiones relativas al sistema.

2ª etapa: Establecimiento de un cierto número de *relaciones matemáticas entre dichas variables*. Este conjunto de relaciones suele considerarse el *modelo matemático* propiamente dicho. El disponer del lenguaje y de las técnicas propias del modelo matemático, permitirá formular con más precisión los problemas enunciados provisionalmente en el estadio anterior.

3ª etapa: Esta etapa incluye, además del *trabajo técnico* dentro del modelo, la *interpretación* de este trabajo y de sus resultados *dentro del sistema modelizado*. El citado trabajo técnico dentro del modelo tiene por objetivo *obtener conocimientos relativos al sistema modelizado*. En esta etapa se decide si el modelo es interesante, fecundo, y pertinente, en la medida que permite generar conocimientos relativos al sistema que no eran fácilmente obtenibles sin la utilización del modelo.

4ª etapa: En esta última etapa de la actividad de modelización matemática se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya naturaleza puede ser completamente imprevisible desde la lógica del sistema de partida. Esto significa que los problemas que se estudian en la tercera etapa pueden desarrollarse hasta llegar a independizarse completamente del sistema inicial y generar *nuevos tipos de problemas*.

(C') *Teoría matemática:* En lo que se refiere a las teorías, seguiremos también la nomenclatura de Chevallard (1989) que denomina *teoría* o *modelo regional* simplemente a un modelo cuyo alcance es tal que engloba ciertos *modelos locales*. Esto significa que las nociones de

modelo (local) / *teoría* (=modelo regional)

son relativas. Además, se asigna a la modelización matemática un carácter *reversible* (el sistema matemático puede, a su vez, ser considerado como *modelo de su modelo*) por lo que las nociones: *sistema* / *modelo* y sus respectivas funciones dentro del proceso de modelización matemática, también son relativas. En total tenemos que puedan considerarse *series recurrentes* y, en parte, *reversibles* del tipo:

sistema / modelo / teoría

[8] La metáfora adecuada para los *modelos matemáticos* es la de "máquina" o "instrumento" útil para producir conocimientos relativos al sistema modelizado. La pertinencia de un modelo matemático se mide entonces por su mayor o menos capacidad para aumentar los conocimientos sobre el sistema y nunca por su capacidad de "representar" a dicho sistema. de una manera más o menos "fidedigna" o "fotográfica".

(II) En consecuencia no podemos considerar la geometría como una parte independiente de las matemáticas ni, por tanto, planteamos la enseñanza de la geometría de esa forma.
(III) El problema fundamental de la enseñanza de la geometría lo plantea Revuz de la siguiente forma: "*¿cuál es la forma de pasar, en la enseñanza de la geometría, de situaciones geométricas a modelos geométricos que permitan posteriormente conectar con ciertas teorías*?"

Revuz responde con algunas recetas que, en su opinión, ayudarían a mejorar la enseñanza de la geometría en este sentido:

<u>Receta 1</u>: La geometría no debe enseñarse separadamente de los demás aspectos de las matemáticas (aritmética, álgebra, combinatoria, probabilidad, ...).

<u>Receta 2</u>: En la modelización (geométrica) de las situaciones geométricas (esto es, las relativas al "espacio real") deben utilizarse todo tipo de modelos "geométricos" (topológicos, métricos, afines, proyectivos, ...).

<u>Receta 3</u>: La enseñanza de la geometría debe comenzar en el jardín de infancia.

<u>Receta 4</u>: Es imposible e indeseable una enseñanza de la geometría totalmente deductiva (antes de los 15-16 años).

<u>Receta 5</u>: Tanto en la "creación matemática" como en el aprendizaje de las matemáticas son muy importantes las "imágenes geométricas". Éstas no provienen únicamente del espacio real ni tampoco del espacio matemático de la geometría euclídea.

3. Generalización y flexibilización de la noción de "*modelización matemática*"

El punto de vista de Revuz podría sintetizarse diciendo que la geometría que debe enseñarse en las escuelas consiste en la modelización "geométrica" (esto es, topológica, proyectiva, afín o euclídeana) de situaciones relativas al espacio "real".

Se trata de una posición interesante que no deja de presentar fuertes dificultades y limitaciones debidas a la rigidez y, en cierta forma, al carácter relativamente "simplista" de su modelo epistemológico general. Estas limitaciones se ponen de manifiesto en la noción excesivamente estrecha de *modelización geométrica* que se desprende de su forma de interpretar y describir el conocimiento matemático en general.

Si utilizamos la nación más amplia de *modelización matemática* tal como aparece en Chevallard (1989), entonces será posible flexibilizar y enriquecer la noción de *modelización geométrica*. Para ello debemos empezar generalizando las tres nociones principales que usa Revuz en su modelo:

(A') *Sistema modelizable matemáticamente*: Cualquier ámbito de la realidad, sin ningún tipo de restricciones, siempre que pueda ser aislado del resto -aunque sea hipotéticamente-, será considerado como un *sistema* potencialmente *modelizable matemáticamente*. En esta noción de "sistema" se incluyen muy especialmente los *sistemas matemáticos* (como, por ejemplo, los números primos, los poliedros, las cónicas, las funciones holomorfas, las variedades algebraicas o un cierto tipo de algoritmos, entre otros muchos), por lo que hemos ampliado significativamente el dominio de la noción de "*situación*" de Revuz que sólo era aplicable a ámbitos extramatemáticas.

(B') *Modelo matemático*: En lugar de interpretar, como hace Revuz, un modelo matemático como una esquematización más o menos *representacionista* (de un sistema) obtenida mediante la selección de sus características *esenciales*, diremos simplemente que

(i) *Facilidad de utilización* como tal modelo. Por ejemplo, los espacios vectoriales son más fáciles de utilizar como modelos de una situación que las teorías euclídea y hilbertiana.
(ii) *Multivalencia*: el modelo debe poder dar cuenta (modelizar matemáticamente) de muchas situaciones distintas. Por ejemplo, los espacios vectoriales constituyen un modelo multivalente.
(iii) *Adecuación del modelo a la situación* que pretende modelizar. Se trata de un carácter no matemático.

(C) Revuz llama *teoría* a un modelo matemático cuando se le considera independientemente de las posibles situaciones modelizadas por él. Esto es, cuando se toma en cuenta únicamente la estructura misma del modelo.

Utilizando esta representación de los objetos que aparecen en la actividad matemática, nuestro autor deduce una consecuencia muy importante para la enseñanza de las matemáticas: según Revuz es fundamental que en la enseñanza de las matemáticas se pase tanto de *situaciones* a *modelos* y de *modelos* a *teorías* como, en la dirección contraria, de *teorías* a *modelos* y de *modelos* a *situaciones*.

$$\boxed{\textbf{Situaciones}} \longleftrightarrow \boxed{\textbf{Modelos}} \longleftrightarrow \boxed{\textbf{Teorías}}$$

y alerta de los dos peligros siguientes que, según él, son muy comunes en la enseñanza de las matemáticas:
Peligro 1: Aislar totalmente la situación del modelo, lo que comporta o bien quedarse del lado del *modelo* descontextualizado (lo que suele acabar enseñando puramente *teorías*); o bien quedarse del lado de la *situación*, estudiándola directamente sin utilizar ningún modelo matemático, lo que comporta realizar una actividad no matemática.
Peligro 2: Confundir *situaciones* y *modelos*. Este peligro incapacita para alcanzar el nivel de las *teorías*, puesto que no permite liberarse de la situación modelizada.

¿Cómo aplicar este bosquejo de modelo epistemológico general de las matemáticas, propuesto por Revuz, al caso de la geometría? ¿Cuáles son las *situaciones*, los *modelos* y las *teorías* en geometría? Lo más difícil para Revuz es identificar las *situaciones geométricas* debido, en nuestra opinión, a su noción tan restringida y absoluta de *situación*. Implícitamente *identifica situación geométrica* con *situación relativa al espacio real*. Por otra parte, es fácil ver que existen teorías matemáticas (Algebra Lineal, Espacios de Hilbert, Topología, Teoría de la Medida, Teoría de Retículos, Geometría Diferencial, etc.) a las que se les puede considerar, pero sólo muy parcialmente, como *teorías geométricas*: con la misma razón cabría llamarlas "aritméticas", "algebraicas", "analíticas", "topológicas", etc.

Por lo que se refiere a los modelos, identifica los *modelos geométricos* con los que se utilizan en las diversas geometrías elementales (afín, euclidiana, proyectiva, topología, ...) en un sentido amplio.

Del anterior intento de caracterización de las situaciones, los modelos y las teorías "geométricas", Revuz deduce tres consecuencias importantes:
(I) El adjetivo "geométrico", en la matemática actual, no puede ser aplicado estrictamente para caracterizar *teorías*; sólo puede aplicarse propiamente a *situaciones* y a *modelos*. Así, según Revuz, podemos hablar de *situaciones geométricas* y de *modelos geométricos* pero no tiene sentido hoy día hablar de *teorías geométricas*.

2. El cuestionamiento epistemológico de la "geometría"

Hasta aquí no hemos salido del planteamiento inicial de la controversia, esto es, nos hemos mantenido dentro del triángulo de opiniones citado por Artin. Éste podría ser caracterizado globalmente diciendo que está formado por opiniones que no cuestionan, en absoluto, el *modelo epistemológico ingenuo* (Brousseau, 1987) de las matemáticas en general y de la geometría en particular.

En efecto, en las diversas posturas descritas por Artin (1963) aparecen argumentos matemáticos "técnicos" relativos a la potencia, simplicidad y unificación de las técnicas matemáticas, aderezados con algunos principios del "sentido común" y con ideas preconcebidas respecto a la "belleza" y "utilidad" de la geometría así como a su presunta "capacidad formadora para el razonamiento". Pero la totalidad de las opiniones que pueden incluirse en el triángulo de opiniones de Artin, coinciden en un punto esencial; en todas ellas *la naturaleza de la geometría se da por sentada, es transparente y, por tanto, no se cuestiona.*

André Revuz (1971) introduce en la controversia elementos que no pueden ser reducidos de ninguna manera al citado triángulo de opiniones. Siguiendo con la metáfora del "conjunto convexo de opiniones" habría que decir que la postura de Revuz debe situarse no sólo fuera del triángulo de Artin, sino incluso fuera del plano que contiene dicho triángulo puesto que, como veremos, introduce una nueva *dimensión* en la controversia, la *dimensión epistemológica.*

La primera pregunta que se plantea Revuz tiene ya un carácter claramente epistemológico: "*¿existe, hoy día, la geometría como una parte relativamente independiente de las matemáticas*?" Veremos que su respuesta a esta primera pregunta es negativa. Curiosamente a su segunda pregunta: "*¿debe enseñarse geometría en las escuelas*?", responde con un rotundo "*sí, sin la menor duda*".

A fin de explicar esta aparente contradicción André Revuz siente la necesidad de explicitar su punto de vista respecto a lo que él denomina "contexto en el que nacen y se desenvuelven las matemáticas" y a la forma cómo puede aplicarse dicho punto de vista al caso de la geometría. Desde el marco de la didáctica de las matemáticas podría decirse (aunque Revuz no lo exprese en estos términos) que el autor siente la necesidad de explicitar su *modelo epistemológico general* del conocimiento matemático a fin de poder utilizar un *modelo específico de la geometría* que le permita construir las nociones de "geometría" y "enseñar geometría", entre otras[7].

El modelo epistemológico de las matemáticas que Revuz propone consta de tres componentes básicos: *situaciones*, *modelos* y *teorías.*

(A) Llama *situación* a una parte de la realidad (se refiere a la realidad física) que queremos considerar en sí misma, relativamente independiente del resto del universo.

(B) Un *modelo matemático de una situación* es una esquematización de ésta por medio de sus características "esenciales" las cuales deben ser descritas en términos matemáticos a fin de poder trabajar dentro del modelo. Las cualidades que debe poseer un modelo son:

[7] Desde el ámbito de la didáctica de las matemáticas podría decirse que Revuz tiene la necesidad de tratar la problemática de la enseñanza de la geometría tomando el cuestionamiento epistemológico (de la geometría) como puerta de entrada a dicha problemática. Este será, en cierta forma, el punto de partida de un nuevo Programa de Investigación en didáctica de las matemáticas: El Programa Epistemológico (Gascón, 1998, 1999b).

inequívoca de mostrar que no son necesarias. De hecho, propone explícitamente liberar al alumno de la "camisa de fuerza de las figuras" así como del mayor fastidio de la enseñanza clásica: la limitación de los instrumentos de dibujo a la regla y el compás.

Hans Freudenthal (1967) en su crítica a Dieudonné subraya que éste utiliza el modelo epistemológico "euclidiano" en el desarrollo del texto *Álgebra Lineal y Geometría Elemental*, especialmente paradójico máxime cuando el autor (Dieudonné) es el mismo que lanzó el célebre "¡Abajo Euclides!". Aunque Freudenthal no lo acaba de expresar con demasiada claridad, parece que lo que critica del punto de vista de Dieudonné es el hecho de que éste esconda los problemas que hay detrás de las conjeturas, las razones de la elección de unos axiomas en lugar de otros y, en definitiva, la ocultación de la problemática que da origen a la geometría como organización matemática.

Entre los matemáticos españoles que participaron, aunque algo tardíamente, en la controversia y que han sido críticos con el punto de vista de Dieudonné (dominante durante la revolución de la llamada "*matemática moderna*") citaremos al catalán Luis Antonio Santaló[5]. Este autor cree que, por lo que respecta a la enseñanza de la geometría, se ha caído repetidamente en el error de pensar que los fundamentos de una ciencia, por el hecho de partir de cero, son la parte más fácil y simple de la misma y que, por tanto, deben ser el punto de partida para su estudio. Este error hizo que se intentaran utilizar los *Elementos* de Euclides (obra dirigida a especialistas que eran los únicos que podían entender la genialidad de su sistema axiomático) como texto para aprender geometría. Este mismo error se repitió veintitrés siglos más tarde con los *Fundamentos* de Hilbert. También en este caso se quiso adaptar la obra a la enseñanza secundaria y aparecieron textos con "postulados a lo Hilbert" formando mescolanzas pesadas e indigestas sin utilidad y sin rigor. El resultado fue, según Santaló, una geometría en cuya pseudofundamentación se perdía el tiempo y se confundía a los alumnos[6].

Según Santaló el mismo fenómeno se repitió con la eclosión alrededor de 1960 de la matemática moderna. Se intentó (por parte de Dieudonné, entre otros) el objetivo imposible de una construcción impecable y rigurosa de la geometría sin salirse del nivel elemental y sin rebasar la capacidad de aprendizaje de los alumnos y -siempre según Santaló- como esto resultaba imposible se optó por suprimir la geometría o trasladarla al álgebra lineal, con la consiguiente pérdida total de sus características de belleza y armonía que la habían adornado desde la antigüedad.

En particular, Santaló critica el "tour de force" que realizan tanto Choquet como Dieudonné en sus respectivas introducciones a la geometría elemental. Cita explícitamente a Dieudonné que se congratula de poder introducir toda la geometría euclidiana del plano independientemente de toda medida de ángulos con números reales. Para Santaló las dificultades de la enseñanza de la geometría en Secundaria que motivaron la supresión casi total de la misma (en 1980) provenían precisamente del prurito de que la enseñanza tuviera una estructura lineal y estuviera rigurosamente fundamentada. Superada esta pseudo-necesidad, la geometría en el sentido clásico tiene mucho que ofrecer como gimnasia razonadora y como depósito de ejemplos que ayuden a comprender el mundo, la matemática y las ciencias naturales.

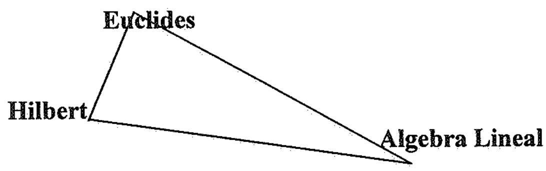
---

[5] Resumiremos aquí el punto de vista de Santaló expresado en un artículo que publicó en la desaparecida *Revista de Bachillerato* (Santaló, 1980).

[6] En este punto Javier de Lorenzo pone el dedo en la llaga al señalar que, en realidad, " *... no es a Euclides a quien se quiere volver, sino a una Geometría mezcla de un atisbo de deductivismo y constructivismo concretos con regla y compás y con pretendidas ventajas de visiones espaciales*" (de Lorenzo, 1980, p. 34).

1. Planteamiento de la discusión: ¿geometría sintética o geometría analítica?

Artin (1963) plantea muy claramente la controversia inicial hablando de un "conjunto convexo" de opiniones determinado por tres opiniones extremas. Se trata, en realidad, de una especie de "triángulo de opiniones" dentro del cual pueden situarse la mayor parte de los puntos de vista de la "noosfera" (Chevallard, 1985):



Choquet (1964) considera que las axiomáticas de Euclides-Hilbert ocultan la estructura vectorial del espacio porque se basan en las nociones de *longitud, ángulo* y *triángulo*. En estas axiomáticas se veía el *triángulo*, pero se estaba ciego para el *paralelogramo* que hubiese llevado a la noción de *vector*.

Por cuestiones estrictamente "matemáticas", Choquet es partidario de enseñar la geometría elemental partiendo del álgebra lineal. En esto coincide esencialmente con el punto de vista de Artin y con el de Godement (1963).

Por su parte Dieudonné (1964) también coincide con Choquet en lo que respecta al avance y simplificación que representa el álgebra lineal si se compara con los axiomas de Euclides-Hilbert. Dieudonné llega a equiparar el avance de Grassmann y Cayley respecto a la geometría clásica con el representa el Cálculo Infinitesimal respecto a los complicados y limitados métodos de Eudoxio y Arquímedes. En este punto Dieudonné se pregunta con cierta ironía: ¿Porqué nadie ha reivindicado el valor "formativo" y "motivador" así como la "belleza" de los métodos de Arquímedes? ¿Cuáles son las causas de que hayan sido aceptados universalmente -también en la enseñanza secundaria- los métodos del cálculo diferencial moderno?

Como argumentos para respaldar su opinión extrema a favor de la enseñanza del álgebra lineal, Dieudonné expone: la *continuidad de la enseñanza*, esto es, la ventaja de *enseñar un tipo de geometría que no precisará de ningún rompimiento para pasar posteriormente a la matemática superior;*[4] *el aprendizaje precoz de los métodos "modernos"* que, de por sí, no son más difíciles que los tradicionales; y la *unificación de las disciplinas enseñadas* (trigonometría, geometría proyectiva, geometría no euclídea, números complejos, geometría pura, ...), en lugar de tratarlas independientemente, como si se tratase de universos no relacionados entre sí. Dieudonné critica que la "geometría euclídea tradicional" ponga en un mismo saco las propiedades *afines* y las propiedades *métricas* siendo como es tan fácil de distinguir entre unas y las otras desde el punto de vista del álgebra lineal. Es interesante observar que aunque Dieudonné en su libro *Álgebra Lineal y Geometría Elemental* se restringe a los espacios de dimensión 2 y 3 y al cuerpo **R** de escalares (para respetar la linea de demarcación trazada por la "intuición" que nos ha dado la naturaleza), no introduce en el texto ninguna figura con la intención

[4] Este argumento de Dieudonné presupone que entre la geometría sintética y la geometría analítica debe haber forzosamente un "rompimiento". En este trabajo pretendemos mostrar precisamente lo contrario, esto es, que la separación o discontinuidad que se da, de hecho, entre la geometría sintética y la geometría analítica (y que es especialmente visible en el curriculum actual de la Enseñanza Secundaria entre la geometría de la ESO y la del Bachillerato) no obedece a razones intrínsecas –ni epistemológicas ni didácticas- sino a causas circunstanciales que pueden ser modificadas.

La cuestión es análoga a la que se presenta con otros *problemas docentes* que, como el que trataremos aquí, suelen plantearse como controversias curriculares pero raramente han sido abordadas por la didáctica de las matemáticas. Curiosamente suelen presentarse como cuestiones zanjadas o resueltas mediante *principios pedagógicos*[2] presuntamente incuestionables y cuya mayor o menor pertinencia no queremos prejuzgar a priori. Entre dichos principios (o ideas dominantes) podemos citar los siguientes[3]:

- La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en (o girar en torno a) la actividad de *resolución de problemas.*
- El *juego* es un medio natural y eficaz para enseñar y aprender matemáticas.
- La *motivación* de los alumnos y su *actitud* hacia las matemáticas es uno de los principales factores para explicar el éxito o el fracaso del aprendizaje.
- Debe aumentarse la relación entre las matemáticas escolares y la *vida cotidiana* como uno de los medios para *motivar* a los alumnos y mejorar su *actitud* hacia las matemáticas.
- La *interdisciplinariedad* es preferible a la enseñanza de las matemáticas aisladas.
- Las *herramientas informáticas* son eficaces para enseñar matemáticas porque potencian la *visualización* y ahorran los *cálculos pesados y rutinarios* al estudiante.
- La educación matemática debe ser vez más *individualizada y personalizada* (idea dominante ligada a la exigencia de *atención a la diversidad*).
- Es preferible *innovar* que seguir con la *enseñanza tradicional* de las matemáticas.

Queremos subrayar la necesidad de llevar a cabo investigaciones didáctico-matemáticas sistemáticas para dilucidar el alcance de cada uno de los citados principios. Pero, sobre todo, queremos llamar la atención sobre la obligación ineludible de clarificar la *problemática matemática* subyacente a cada uno de esos problemas docentes presuntamente zanjados. De no hacerlo así corremos el riesgo de contribuir a trivializar la problemática de la enseñanza de las matemáticas y, por tanto, de seguir posponiendo indefinidamente el problema.

En este trabajo mostraremos que la presunta controversia entre *geometría sintética* y *geometría analítica* (que no ha sido resuelta todavía como lo demuestra el que aparezcan absolutamente separadas en la Enseñanza Secundaria) es, en última instancia, una falsa controversia fruto de un análisis epistemológico superficial. Postulamos que, análogamente, cada uno de los principios (o ideas dominantes) citados pretende zanjar un problema docente que, si bien responde a una verdadera y legítima inquietud de los profesores, es fruto de un planteamiento equívoco.

---

[2] Denominamos "pedagógicos" a aquellos principios que pueden formularse independientemente de la disciplina de estudio concreta de la que se trate. En los que siguen, la disciplina "matemáticas" es intercambiable por otra cualquiera sin que el contenido del eslogan cambie sustancialmente.

[3] La lista de "principios incuestionables" o "ideas dominantes" en la cultura escolar que citamos aquí no es, ni podría ser, exhaustiva. Creemos, sin embargo, que en conjunto representa bastante bien la *ideología dominante* respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dicha ideología está envuelta por la etiqueta del "*constructivismo*" que suele interpretarse como una amalgama de elementos extraídos de las teorías de Piaget, Vigotski, Ausubel y el procesamiento de la información, sin tener en cuenta que dichas teorías parten de presupuestos distintos y, además, pretenden explicar cosas diferentes (Delval, 1997).

Evolución de la controversia entre geometría *sintética* y geometría *analítica*. Un punto de vista didáctico-matemático.

La introducción de la *geometría analítica* por Descartes y Fermat proporcionó *nuevas técnicas* que permitían no sólo abordar muchos de los problemas geométricos no resueltos hasta ese momento, sino también plantear problemas geométricos más profundos. A principios del siglo XIX, después de más de 100 años de dominio de los métodos analíticos, se empezó a replantear cuál debía ser el papel de los diversos *métodos* en la construcción de la geometría e, indirectamente, en la educación matemática. En esa época varios matemáticos importantes (Poncelet, Chasles y Monge, entre otros), reivindicaron la importancia de los *métodos sintéticos* de la *geometría pura*, que proporciona pruebas simples e intuitivas, frente a los potentes *métodos analíticos*, que no revelan el sentido de lo que se consigue.

Empezaremos recordando la discusión, que utilizando argumentos extraídos de esa vieja controversia, fue reiniciada por prestigiosos matemáticos (Choquet, Dieudonné, Artin, Godement, Freudenthal y Santaló, entre otros) en la década de los sesenta (Piaget y otros, 1978). Dicha discusión, aunque está actualmente bastante olvidada, ha tenido una influencia directa en la comunidad escolar y se refiere al tipo de geometría que debía formar parte de la Enseñanza Secundaria. Aunque en estos momentos se ha alcanzado un cierto consenso –al menos aparentemente– confinando la geometría sintética en la enseñanza obligatoria y la geometría analítica en la postobligatoria, es previsible que la citada controversia vuelva a aparecer puesto que no ha sido cerrada con argumentos sólidos y, lo que es más evidente, no se ha dado ninguna respuesta a la flagrante *discontinuidad* entre la *geometría sintética de la E.S.O.* y la *geometría analítica del Bachillerato.*

Uno de los aspectos centrales de la controversia, tal como se planteaba en los años sesenta, hacía referencia al tipo de geometría que debería estar presente en la formación matemática básica de todo ciudadano. Simplificando abusivamente la cuestión, podría decirse que la discusión se polarizó entre los partidarios de una *geometría sintética*, propia del modelo "euclidiano", basada en una axiomática más o menos explícita, y los partidarios de una *geometría analítica*, propia del modelo "cartesiano", cuya práctica se sustenta en las técnicas del álgebra lineal y cuya axiomática suele quedar más implícita.

Se trata de una controversia "curricular" que se sitúa habitualmente en el ámbito del eslogan y que sólo raramente hace intervenir argumentos didáctico-matemáticos. El objetivo principal de este trabajo consiste precisamente en plantear el *problema didáctico-matemático* subyacente a esta controversia. Pretendemos poner de manifiesto, partiendo de este caso particular, que únicamente la reformulación didáctica de un *problema docente* proporciona la información y los medios necesarios para que la sociedad pueda decidir democráticamente sobre la estructura y los contenidos del currículum obligatorio de matemáticas[1].

[1] Para un análisis de las relaciones entre los problemas *docentes genéricos*, los problemas *docentes específicos* y los problemas *didácticos*, ver Gascón (1999b).

Evolución de la controversia entre geometría *sintética* y geometría *analítica*. Un punto de vista didáctico-matemático.

Josep Gascón
Departamento de Matemáticas
Universitat Autònoma de Barcelona
Edificio C
08193 Bellaterra (Barcelona) Spain
Fax: 34 93 581 27 90
E-Mail: gascon@mat.uab.es

RESUMEN

En la década de los sesenta tuvo lugar una famosa discusión sobre qué tipo de geometría debía estar presente en la formación matemática básica de todo ciudadano. Dicha controversia recogía y cuestionaba algunos de los argumentos de los matemáticos de principios del siglo XIX que reivindicaron la importancia de los *métodos sintéticos* de la *geometría pura*, que proporciona pruebas simples e intuitivas, frente a los potentes *métodos analíticos*, que no revelan el sentido de lo que se está haciendo ni de lo que se consigue. Aunque dicha discusión está actualmente bastante olvidada, no deja de ser curiosa la flagrante discontinuidad que se da en el actual curriculum de Secundaria entre la *geometría sintética* de la E.S.O. y la *geometría analítica* del Bachillerato y la Universidad. En este trabajo pretendemos mostrar que la citada controversia es, en realidad, una falsa controversia fruto de un análisis epistemológico superficial y apuntamos una propuesta matemático-didáctica para conectar en la Enseñanza Secundaria las *técnicas geometricas sintéticas* con las *analíticas* y mostrar su complementariedad.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

28

Josep GASCÓN

EVOLUCIÓN DE LA CONTROVERSIA ENTRE GEOMETRÍA *SINTÉTICA* Y GEOMETRÍA *ANALÍTICA*. UN PUNTO DE VISTA DIDÁCTICO-MATEMÁTICO