Números anteriores

1 **Luigi Grasselli,** Crystallizations and other manifold representations.
2 **Ricardo Piergallini,** Manifolds as branched covers of spheres.
3 **Gareth Jones,** Enumerating regular maps and hypermaps.
4 **J. C. Ferrando and M. López-Pellicer,** Barrelled spaces of class N and of class χ_0.
5 **Pedro Morales,** Nuevos resultados en Teoría de la medida no conmutativa.
6 **Tomasz Natkaniec,** Algebraic structures generated by some families of real functions.
7 **Gonzalo Riera,** Algebras of Riemann matrices and the problem of units.
8 **Lynne D. James,** Representations of Maps.
9 **Grzegorz Gromadzki,** On supersoluble groups acting on Klein surfaces.
10 **María Teresa Lozano,** Flujos en 3 variedades.
11 **P. Morales y F. García Mazario,** Medidas sobre proyecciones en anillos estrellados de Baer.
12 **L. Grasselli and M. Mulazzani,** Generalized lins-mandel spaces and branched coverings of S^3.
13 **V. F. Mazurovskii,** Rigid isotopies of real projective configurations.
14 **R. Cantó,** Properties of the singular graph of nonnegative matrices.
15 **M. B. S. Laporta,** A short intervals result for linear equations in two prime variables.
16 **D. Girela,** El teorema grande de Picard a partir de un método de J. Lewis basado en las desigualdades de Hardnack.
17 **L. Ribes,** Grupos separables con respecto a conjugación.
18 **P. A. Zalesskii,** Virtually free pro-p groups.
19 **S. M. Natanzon,** Fuchsian groups and uniformization of Hurwitz spaces.
20 **M. Izquierdo,** On the fixed-point set of an automorphism of a closed nonorientable surface.
21 **J. M. Ansemil,** Algunos resultados sobre espacios de funciones holomorfas.
22 **J. F. Fernando Galván,** Triángulos racionales con grupo de reflexiones discreto.
23 **C. González,** Técnicas de simetrización aplicadas a ecuaciones diferenciales.
24 **G. González Diez,** El grupo fundamental del espacio de moduli en infinito.
25 **D. Singerman,** Superficies de Riemann y cristalografía.
26 **M. Izquierdo,** On the fixed-point set of an automorphism of a closed nonorientable surface.

REFERENCIAS

[1] Bers, L. Automorphic forms for Schottky groups. *Adv. in Math.* **16** (1975), 332-361.

[2] Burnside, W. On a class of Automorphic Functions. *Proc. London Math. Soc.* Vol 23 (1892), 49-88.

[3] Buser, P. and Silhol, R. Geodesics, Periods and Equations of Real Hyperelliptic Curves. Preprint.

[4] Chuckrow, V. On Schottky groups with application to Kleinian groups. *Ann. of Math.* **88** (1968), 47-61.

[5] Farkas, H. and Kra, I. *Riemann Surfaces.* Springer-Verlag.

[6] Ford, L.R. *Automorphic Functions.* Chelsea, New York, 1951.

[7] Marden, A. Schottky groups and circles. *Contribution to Analysis,* A collection of papers Dedicated to Lipman Bers. (1994), 273-278.

[8] Maskit, B. *Kleinian Groups.* G.M.W. **287**, Springer-Verlag, 1988.

[9] ——— A characterization of Schottky groups. *J. d'Analyse Math.* **19** (1967), 227-230.

[10] May, C.L. Automorphisms of compact Klein surfaces with boundary. *Pacific J. Math.* **59** (1975), 199-210.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS,, UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA,, VALPARAÍSO, CHILE, *rhidalgo@mat.utfsm.cl*

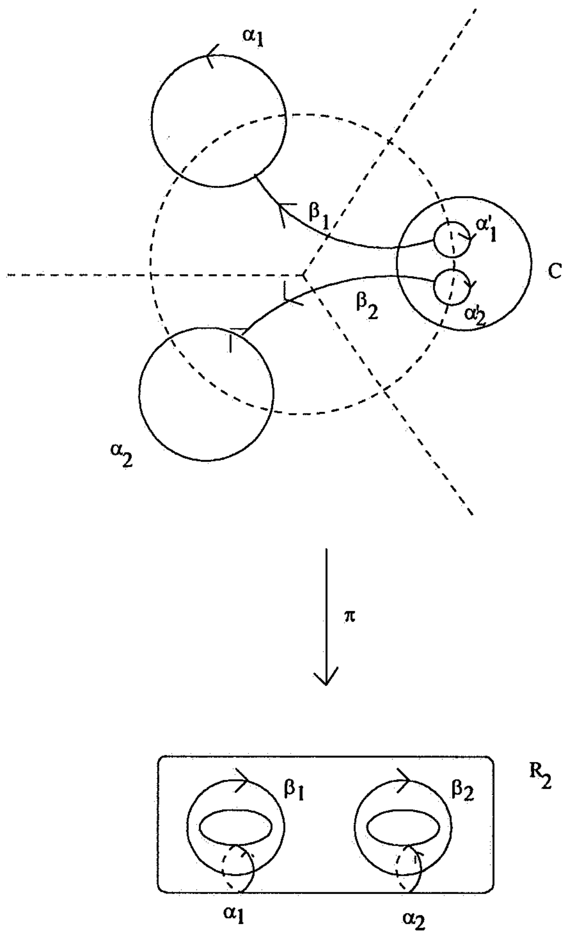

FIGURA 3

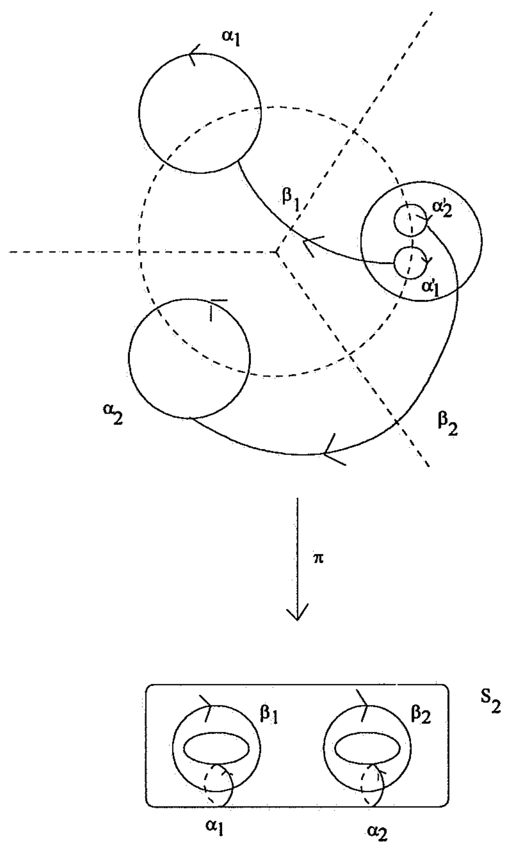
α_1
β_1
α'_2
α'_1
α_2
β_2
π
S_2
β_1
β_2
α_1
α_2

FIGURA 2

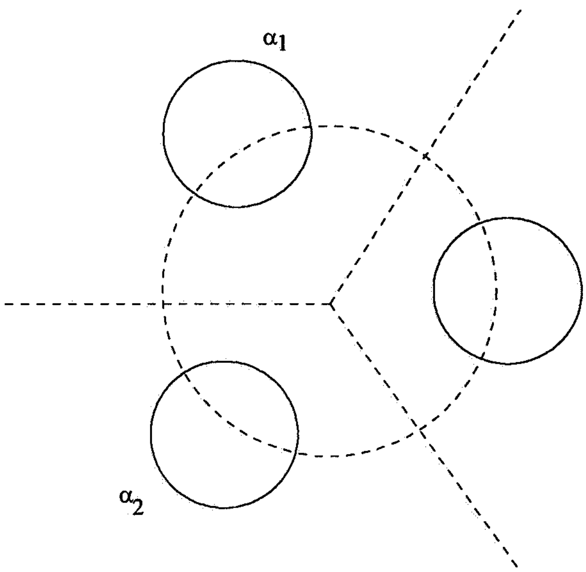

FIGURA 1

5. Agradecimientos

Estoy profundamente agradecido al departamento de Matemáticas de la UNED y en manera muy particular a Antonio F. Costa por su hospitalidad y consejos respecto al trabajo aquí expuesto durante mi estadía en Enero-Febrero 2001.

$$\rho(J) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(W) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & a & b \\ 1 & -1 & c & d \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Riemann luego definida $Z = X + iY \in \mathcal{H}_2$ of R_2 es un punto fijo del grupo $\rho(\widehat{K}/F_2)$. Luego: $a = b = c = d = 0$, y

$$Z = i \begin{bmatrix} w & \frac{w}{2} \\ \frac{w}{2} & w \end{bmatrix},$$

donde $w > 0$.

Usando de nuevo los argumentos de Burnside [2] de sección 3 permiten obtener el valor de w como se desea. □

Observación 1. Es importante notar a este punto que usando Theta caracteríscticas [5] podemos describir la curva algebraica en función de w y luego en función de p. De esta manera podemos obtener relaciones explícitas entre la uniformización de Schottky dada por los grupos de Schottky G_2, F_2 y las respectivas curvas algebraicas. Por ejemplo, consideremos la curva algebraica

$$y^2 = x^6 - 1,$$

(correspondiente al valor $\lambda = e^{\pi i/6}$ en la familia descrita anteriormente). Usando la base simpléctica anterior para F_2, podemos describir la representación simpléctica del automorfismo $j^{1/2}$, el cual es en este caso:

$$\rho(j^{1/2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya que la matriz Z (calculada arriba) es fijada por $\rho(j^{1/2})$, obtenemos la igualdad

$$\frac{4\pi}{\sqrt{3}} = \operatorname{Log}\left(\prod_{\gamma \in F_2} \frac{\gamma(p_2) - B_1^{-1}(\infty)}{\gamma(B_1^{-1}(q_1)) - B_1^{-1}(\infty)} \right)$$

de lo cual se puede obtener que $p \cong 0.75 \ldots$

De esta manera obtenemos una representación simpléctica fiel

$$\rho : \widehat{K}/G_2 \to \widetilde{\mathrm{Sp}(4;\mathbb{Z})}$$

definida por

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(J) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \rho(W) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & a & b \\ 1 & -1 & c & d \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Riemann $Z = X + iY \in \mathcal{H}_2$ de S_2 definida por la base simpléctica anterior es punto fijo del grupo $\rho(\widehat{K}/G_2)$. Se sigue que: $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, y

$$Z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} w & \frac{w}{2} \\ \frac{w}{2} & w \end{bmatrix},$$

donde $w > 0$.

Usando la observación de Burnside [2] en sección 3 permite calcular el valor de w en función de p obteniendo el

Caso (ii): Este caso es similar al anterior. Sea $\alpha_1 = W(C)$, $\alpha_1' = \sigma_p(\alpha_1)$, $\alpha_2 = W^{-1}(C)$ y $\alpha_2' = \sigma_p(\alpha_2)$. Orientamos esos círculos α_1, α_2, α_1' y α_2' y consideramos los arcos orientados β_1 y β_2 como se muestra en la figura 3. La proyección de esos círculos y arcos determinan una base simpléctica en R_2.

De esta manera obtenemos la representación simpléctica fiel

$$\rho : \widehat{K}/F_2 \to \widetilde{\mathrm{Sp}(4;\mathbb{Z})}$$

definida por

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para el grupo $\widehat{K}$. Sea $W : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ un homeomorfismo casiconformal para μ que fija los valores 1, i y -1. Entonces $W\widehat{K}W^{-1}$ es de nuevo un grupo generado por reflecciones. Ya que una reflexión tiene como conjunto de puntos fijos sólo círculos, tenemos que el grupo $W\widehat{K}W^{-1}$ es de nuevo uno de los grupos $\widehat{K}_q$ para cierto valor de $q \in (2-\sqrt{3}, 1)$. Si denotamos por $\pi : \Omega \to \Omega/G_2$ el cubrimiento holomorfo inducido por G_2 (para $\widehat{K}_q$), entonces tenemos que $f\pi W^{-1} : \Omega(W\widehat{K}W^{-1}) \to S$ es una uniformización de S con grupo covertor G_2, de manera que el levantamiento de $K(S,\tau)$ es exactamente $W\widehat{K}W^{-1}$. □

4.3. Matrices de Riemann de las superficies maximales de género dos.

Teorema 3. *Sea S una superficie de Riemann maximal de género 2 con una reflexión maximal $\tau : S \to S$. Tome $p \in (2-\sqrt{3}, 1)$ tal que*

(i) $S = \Omega/G_2$, *si S/τ es un toro con un hoyo;*
(ii) $S = \Omega/F_2$, *si S/τ es una esfera con tres hoyos.*

Una matriz de Riemann para S es dada por $Z = P + iQ$, con $P = 0$ en caso (ii),

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en caso (i)},$$

$$Q = \begin{bmatrix} w & \frac{w}{2} \\ \frac{w}{2} & w \end{bmatrix},$$

donde

$$w = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} Log\left(\displaystyle\prod_{\gamma\in G_2} \frac{\gamma(q_2) - A_1^{-1}(\infty)}{\gamma(q_1) - A_1^{-1}(\infty)}\right) & \text{en caso (i)} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} Log\left(\displaystyle\prod_{\gamma\in F_2} \frac{\gamma(p_2) - B_1^{-1}(\infty)}{\gamma(q_1) - B_1^{-1}(\infty)}\right) & \text{en caso (ii)} \end{cases},$$

$$q_1 = e^{(\frac{2\pi}{3}-\theta)i}, \quad q_2 = J(q_1), \quad p_2 = \sigma_p(q_1)$$

y $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ es tal que $\cos\theta = \frac{2p}{1+p^2}$.

Demostración. **Caso (i):** Sea $\alpha_1 = W(C)$, $\alpha_1' = J(\alpha_1)$, $\alpha_2 = W^{-1}(C)$ y $\alpha_2' = J(\alpha_2)$. Orientamos los círculos α_1, α_2, α_1' y α_2' como hemos asumido en sección 3 y consideramos los arcos orientados β_1 y β_2 como se muestra en la figura 2. Las proyecciones de estos círculos y arcos determinan una base simpléctica para S_2.

es decir, isomorfo al producto libre amalgamado del grupo dihedral $D_3 = \langle T, W\rangle$ con el grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 = \langle T, J\rangle$ sobre el grupo cíclico de orden dos generado por T. La superficie de Riemann Ω/K_p es la esfera de Riemann con cuatro valores de ramificación de ordenes 2, 2, 2 y 3, todos ellos fijos por la reflexión inducida por σ. Un dominio fundamental para K_p puede ser considerado como la unión del dominio fundamental de $\widehat{K}_p$ antes considerado con su imagen bajo σ junto los puntos del círculo unitario localizados entre $e^{\frac{\pi i}{3}}$ y $e^{\frac{-\pi i}{3}}$.

4.2. **Uniformizaciones de Schottky Reales de Género Dos.** Sea $\widehat{K} = \widehat{K}_p$, para $p \in (2-\sqrt{3}, 1)$. Considere las transformaciones de Möbius $A_1 = JWJW^{-1}$, $A_2 = JW^{-1}JW$, $B_1 = (\sigma_p\sigma_2)^2$ y $B_2 = \sigma_1 B_1 \sigma_1$. Los grupos $G_2 = \langle A_1, A_2\rangle$ y $F_2 = \langle B_1, B_2\rangle$ son grupos de Schottky reales de género dos cuyo dominio fundamental estandard para ambos es dado por los círculos $W(C)$, $J(W(C))$, $W^{-1}(C)$ y $J(W^{-1}(C))$.

Ya que $WA_1W^{-1} = A_1^{-1}A_2$, $WA_2W^{-1} = A_1^{-1}$, $JA_1J = A_1^{-1}$, $JA_2J = A_2^{-1}$, $TA_1T^{-1} = A_2$, $TA_2T = A_1$, $\sigma A_1 \sigma = A_1$, $\sigma A_2 \sigma = A_2$, $WB_1W^{-1} = B_1^{-1}B_2$, $WB_2W^{-1} = B_1^{-1}$, $JB_1J = B_2^{-1}$, $JB_2J = B_1^{-1}$, $TB_1T = B_2$, $TB_2T = B_1$, $\sigma B_1 \sigma = B_1$ y $\sigma B_2 \sigma = B_2$, tenemos que ambos grupos G_2 y F_2 son subgrupos normales de $\widehat{K}$. Más aún, para $Q \in \{G_2, F_2\}$, $\widehat{K}/Q \cong D_3 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ y $K/Q \cong D_3 + \mathbb{Z}_2$. En particular, la superficie de Riemann de género dos $S_2 = \Omega/G_2$ (respectivamente, $R_2 = \Omega/F_2$) admite el grupo $\widehat{K}/G_2$ (respectivamente, $\widehat{K}/F_2$) como grupo de automorfismos, con K/G_2 (respectivamente, K/F_2) como su subgrupo de indice dos formado por los automorfismos conformales. El cociente $S_2/(\widehat{K}/G_2)$ (respectivamente, $R_2/(\widehat{K}/F_2)$) es el disco cerrado con cuatro puntos de ramificación en su borde con valores de ramificación 2, 2, 2 y 3.

Teorema 2. *Si S es una superficie maximal de género dos, entonces esta puede ser uniformizada por G_2 o F_2 para cierto valor de $p \in (2-\sqrt{3}, 1)$.*

Demostración. Fijemos un valor de $p \in (2-\sqrt{3}, 1)$ y consideremos el grupo Kleiniano $K = K_p$. Sea S una superficie de Riemann maximal de género dos con una reflexión maximal $\tau : S \to S$. La acción topológica de $K(S, \tau)$ está reflejada por G_2 o por F_2, ya que sólo hay dos posible acciones. Sin perdida de generalidad, podemos asumir que esta es reflejada por G_2. Sean $S_2 = \Omega/G_2$ y $f : S_2 \to S$ un homeomorfismo casiconformal tal que $f\widehat{K}/G_2f^{-1} = K(S, \tau)$. Denotemos el diferencial de Beltrami de f por μ. Al levantar μ a Ω y al extenderla como cero en el conjunto límite de $\widehat{K}$ obtenemos un coeficiente de Beltrami μ

y, en particular, también los siguientes

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} x & \mapsto & \overline{x} \\ y & \mapsto & \overline{y} \end{pmatrix}; \; j^{1/2} = \begin{pmatrix} x & \mapsto & 1/x \\ y & \mapsto & iy/x^3 \end{pmatrix}$$

Para buscar grupos de Schottky reales que uniformizan estas superficies, primero buscamos grupos uniformizantes de un disco cerrado con cuatro valores de ramificación sobre su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

4.1. **Uniformización de un disco cerrado con cuatro valores de ramificación de ordenes 2,2,2,3 en su borde.** Para cada valor $p \in (2-\sqrt{3}, 1)$, consideremos el grupo $\widehat{K}_p$ generado por las siguientes reflecciones: $\sigma_1(z) = \overline{z}$, $\sigma_2(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{z}$, $\sigma_p(z) = \frac{(1+p^2)\overline{z}-2p}{2p\overline{z}-(1+p^2)}$ y $\sigma(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ (ver figura 1).

Sean $W(z) = \sigma_2\sigma_1(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}}z$, $T(z) = \sigma\sigma_1(z) = \dfrac{1}{z}$ y $J(z) = \sigma_p\sigma_1(z) = \dfrac{(p+\frac{1}{p})z-2}{2z-(p+\frac{1}{p})}$, entonces el grupo $\widehat{K}_p$ es también generado por T, W, J y σ. Como consecuencia de los teoremas de combinación de Klein-Maskit [8], tenemos que

$$\widehat{K}_p = \langle T, W, J, \sigma : T^2 = W^3 = (WT)^2 = J^2 = (TJ)^2 = \sigma^2 = (\sigma T)^2 = \sigma W \sigma W^{-1} = (\sigma J)^2 = 1 \rangle.$$

El grupo Kleiniano $\widehat{K}_p$ tiene una región de discontinuidad conexa Ω y un dominio fundamental el cual es dado por la región acotada por el círculo unitario, los dos rayos de argumentos $\frac{\pi i}{3}$ y $\frac{-\pi i}{3}$, respectivamente, y el círculo C ortogonal al círculo unitario y pasando por los puntos p y $\dfrac{1}{p}$ (ver figura 1). La superficie de Klein uniformizada por $\widehat{K}$ es el disco cerrado con exactamente cuatro valores de ramificación sobre su borde con ordenes 2, 2, 2 y 3.

Teorema 1. *Todo disco cerrado con exactamente cuatro valores de ramificación sobre su borde con ordenes* 2, 2, 2 *y* 3 *es uniformizada por el grupo* $\widehat{K}_p$ *para cierto* $p \in (2-\sqrt{3}, 1)$.

Demostración. Esto es una simple consecuencia de aplicaciones casiconformales y el hecho que reflecciones en la esfera de Riemann tienen por conjunto de puntos fijos a círculos. □

El subgrupo de indice dos K_p de $\widehat{K}_p$ formado por las transformaciones que preservan orientación es generado por T, W y J; además

$$K_p = \langle T, W, J : T^2 = W^3 = (WT)^2 = J^2 = (TJ)^2 = 1 \rangle,$$

converge uniformemente en compactos de Ω a una función meromorfa la cual es holomorfa en $\Omega - J(\infty)$ y con polos dobles en cada punto de $J(\infty)$. La demostración de este hecho puede ser encontrada en [2] y [6].

Como consecuencia de esta convergencia, tenemos que

$$w_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma \in J} \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z) - A_j^{-1}(\infty)} dz,$$

donde $j = 1, \ldots, g$, es un levantamiento de la base dual $w_1, \ldots, w_j$ de la subsección anterior. En esta manera la matriz de Riemann $Z = (z_{kj}) \in \mathcal{H}_g$ queda dada por

$$z_{kj} = \frac{i}{2\pi} \mathrm{Log} \left(\prod_{\gamma \in J} \frac{\gamma(p_k^{start}) - A_j^{-1}(\infty)}{\gamma(p_k^{end}) - A_j^{-1}(\infty)} \right)$$

obteniendola en forma explícita del grupo de Schottky uniformizante.

4. Un Ejemplo

Una superficie de Riemann S de género $g \geq 2$ admitiendo una reflexión $\tau : S \to S$ es llamada maximal si el grupo $K(S, \tau)$, consistiendo de los automorfismos conformales y anticonformales de S que commutan con τ, tiene orden $24(g-1)$. En tal caso se tiene que $S/K(S, \tau)$ es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación sobre su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3 [10]. En género dos existen dos familias de superficies de Riemann maximales, estas corresponden a las familias de curvas dadas por

$$y^2 = (x^3 - \lambda^3)(x^3 - 1/\lambda^3)$$

donde (i) $\lambda > 1$ o (ii) $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \pi/3)$. En este caso, $K(S, \tau) = \langle \tau, j, \alpha, \beta \rangle$, donde

$$\tau = \begin{pmatrix} x & \mapsto & 1/\overline{x} \\ y & \mapsto & \overline{y}/\overline{x}^3 \end{pmatrix}; \; j = \begin{pmatrix} x & \mapsto & x \\ y & \mapsto & -y \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} x & \mapsto & e^{2\pi i/3}x \\ y & \mapsto & y \end{pmatrix}; \; \beta = \begin{pmatrix} x & \mapsto & 1/x \\ y & \mapsto & y/x^3 \end{pmatrix}$$

Para el valor $\theta = \pi/6$, la curva es isomorfa a

$$y^2 = x^6 - 1,$$

y tiene el automorfismo extra

$$\alpha^{1/2} = \begin{pmatrix} x & \mapsto & e^{\pi i/3}x \\ y & \mapsto & y \end{pmatrix}$$

tal que

$$[\widehat{\alpha}_1 \cdots \widehat{\alpha}_g \widehat{\beta}_1 \cdots \widehat{\beta}_g] = [\alpha_1 \cdots \alpha_g \beta_1 \cdots \beta_g]N$$

Se obtiene de esto la siguiente igualdad

$$\widehat{Z} = (A + ZC)^{-1}(B + ZD)$$

El recíproco es también valido:

Teorema de Torelli. *Dos matrices $Z, \widehat{Z} \in \mathcal{H}_g$ son matrices de Riemann de superficies conformalmente equivalentes si y sólo si existe una matriz simpléctica*

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}),$$

tal que $\widehat{Z} = (A + ZC)^{-1}(B + ZD)$

3.4. **Matrices de Riemann de Surperficies con una Reflexión.** Sea J un grupo de Schottky real, con reflexión asociada σ, uniformizando una superficie de Riemann S, con reflexión inducida τ. Denotemos por Ω la región de discontinuidad de J y denotemos por $P : \Omega \to S$ el cubrimiento holomorfo natural con J como grupo covertor. Fijemos un sistema fundamental de curvas para J (los cuales podemos asumir ser círculos), digamos $\alpha_1,..., \alpha_g$, $\widetilde{\alpha}_1,..., \widetilde{\alpha}_g$, y sean $A_1,..., A_g$ un conjunto de generadores de J respecto a ese sistema de curvas. Dotemos a cada curva $\alpha_1,..., \alpha_g$, de orientación en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. También consideramos las orientaciones inducidas en las curvas $\widetilde{\alpha}_1,..., \widetilde{\alpha}_g$ por las transformaciones $A_1,..., A_g$. Considere cualquier conjunto de arcos simples dos a dos disjuntas y orientados $\beta_1,..., \beta_g$, tales que:

(a) β_k connecta un punto $p_k^{end} \in \alpha_k$ al punto $p_k^{start} = A_k(p_k^{end}) \in \widetilde{\alpha}_k$;
(b) la orientación de β_k es tal que p_k^{start} es el punto inicial y p_k^{end} es el punto final; y
(c) β_k es disjunto de α_t y $\widetilde{\alpha}_t$, para $t \neq k$.

Denotemos también por α_k y β_k las proyecciones en S de los arcos y curvas respectivas. Tenemos así una base simpléctica de homología para S y, en particular, una matriz de Riemann Z para S.

3.5. **Una Observación de Burnside.** Sea J un grupo de Schottky real con reflexión asociada σ, L su círculo de puntos fijos, y tal que $\infty \in \Omega = \Omega(J)$. Denotemos por $J(\infty)$ la órbita de ∞ con la excepción de ∞. Burnside ha observado que la serie

$$\sum_{g \in G} g'(z)$$

El grupo $\widetilde{\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})}$ actúa sobre el espacio de Siegel $\mathcal{H}_g$ de la siguiente manera. Sea $Z \in \mathcal{H}_g$ y

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})}, \quad \text{entonces}$$

$$N(Z) = \begin{cases} (A + ZC)^{-1}(B + ZD), & \text{si} \quad N \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \\ (A + \overline{Z}C)^{-1}(B + \overline{Z}D), & \text{si} \quad N \notin \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Dos variedades principalmente polarizadas parametrizadas por Z_1 y Z_2 en $\mathcal{H}_g$ son conformalmente isomorfas si y sólo si existe una matriz simpléctica $N \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ tal que $N(Z_1) = Z_2$. Estas son anticonformalmente isomorfas si podemos encontrar tal N en $\widetilde{\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})} - \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. El grupo de automorfismos conformales de una variedad principalmente polarizada, parametrizada por $Z \in \mathcal{H}_g$, corresponde exactamente al estabilizador de Z en $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ y el grupo de automorfismos conformales/anticonformales corresponde al estabilizador en el grupo simpléctico extendido. De esta manera, el cociente $\mathcal{A}_g = \mathcal{H}_g/\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ es el espacio de móduli de variedades abelianas principalmente polarizadas (clases conformales).

3.3. **Matrices de Riemann de Superficies de Riemann.** Consideremos una superficie de Riemann S de género g. Una base de homología $\alpha_1,\ldots, \alpha_g, \beta_1,\ldots, \beta_g$ es llamada simpléctica si su matriz de intersección es dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Además, existe una única base $w_1,\ldots, w_g$ para el espacio $H^{1,0}(S)$ de las diferenciales holomorfas tal que

$$\int_{\alpha_j} w_r = \delta_{jr}$$

llamada una base dual [5]. La matriz obtenida como $Z = (\int_{\beta_j} w_i)$ pertenece a $\mathcal{H}_g$, como consecuencia de las relaciones bilineales de Riemann [5] y, en particular, define una variedad principalmente polarizada de dimensión g.

Si partimos con una base simpléctica diferente para S, digamos $\{\widehat{\alpha}_1,\ldots,\widehat{\alpha}_g,\widehat{\beta}_1,\ldots,\widehat{\beta}_g\}$, entonces obtenemos una nueva matriz de Riemann $\widehat{Z} \in \mathcal{H}_g$. Ahora, existe una matriz simpléctica

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}),$$

exactamente los elementos que preservan orientación de K, es el grupo de Schottky real buscado.

2.- Si R es no-orientable, entonces esta es una superficie de Klein, digamos la suma conexa de γ planos proyectivos, con $k > 0$ bordes. En este caso, $g = \gamma + k - 1$. Esta superficie puede ser uniformizada por un grupo Kleiniano K generado por la reflexión σ en el círculo unitario y por un grupo Fuchsiano F (actuando en el disco unitario) que uniformiza la suma conexa de γ planos proyectivos y k hoyos. Esto es consecuencia de la teoría de aplicaciones casiconformales y el hecho que el conjunto de puntos fijos de reflecciones en la esfera de Riemann son círculos. Entonces el subgrupo de indice dos K^+, formado por exactamente los elementos que preservan orientación de K, es el grupo de Schottky real buscado.

3. Matrices de Riemann

Ahora que sabemos que podemos mirar cada superficie de Riemann con una reflexión por medio de grupos de Schottky reales, procederemos a usar estos grupos para obtener matrices de Riemann de estas superficies. Primero procederemos a recordar estos objetos.

3.1. El Espacio de Siegel. El espacio de Siegel $\mathcal{H}_g$ es el espacio consistiendo de las matrices complejas simétricas de tamaño $g \times g$ con parte imaginaria positiva definida. Cada matriz $Z = X + iY \in \mathcal{H}_g$ produce un reticulado L_Z in $\mathbb{C}^g$: el reticulado generado por las combinaciones lineales enteras de las columnas de la matriz periodo $(I \quad Z)$. Su matriz de Gram dada por $H = P + iJ$, donde

$$P = \begin{pmatrix} Y^{-1} & Y^{-1}X \\ XY^{-1} & XY^{-1}X + Y \end{pmatrix},$$

define una polarización principal en el toro complejo $\mathbb{C}^g/L_Z$ y, en particular, obetenemos una variedad principalmente polarizada. Reciprocamente, toda variedad principalmente polarizada es obtenida de esta manera (módulo isomorfismos). De esta manera, podemos ver $\mathcal{H}_g$ como el espacio de Teichmüller de las variedades abelianas principalmente polarizadas.

3.2. El Grupo Simpléctico Extendido. El grupo $\widetilde{\mathrm{Sp}_{2g}}(\mathbb{Z})$, consistiendo de las matrices enteras N de tamaño $2g \times 2g$ tales que ${}^tNJN = \pm J$, es llamado el grupo simpléctico extendido. Su subgrupo de indice dos $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, consistiendo de aquellas $N \in \widetilde{\mathrm{Sp}_{2g}}(\mathbb{Z})$ tales que ${}^tNJN = J$, es llamado el grupo simpléctico.

con J como grupo de cubrimiento. Decimos que $(J, \Omega, P : \Omega \to S)$ es una uniformización de Schottky para S. Una demostración simple de este hecho puede ser encontrada en [1], la cual usa aplicaciones casiconformales.

2.3. **Grupos de Schottky Clásicos.** Cuando podemos escoger para el grupo de Schottky J un sistema fundamental de curvas formada por círculos, entonces decimos que este es un grupo de Schottky clásico. La existencia de grupos de Schottky no clásicos es dada en [7]. Una conjetura es que toda superficie de Riemann puede ser uniformizada por grupos de Schottky clásicos.

2.4. **Grupos de Schottky Reales.** En el caso que exista una reflexión $\sigma : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ que commuta con cada elemento de un grupo de Schottky J, diremos que J es un grupo de Schottky real con reflexión asociada σ. Si L es el círculo de puntos fijos de σ, entonces L es invariante bajo la acción de J.

Como todo círculo L tiene asociada una (única) reflexión con L como puntos fijos, tenemos que J es un grupo de Schottky real si y sólo si este deja invariante un círculo. No es deficil ver que todo grupo de Schottky real es necesariamente clásico.

2.5. **El Teorema de Retrosección Real.** Cuando J es un grupo de Schottky real, con reflexión asociada σ, entonces Ω/J resulta ser una superficie de Riemann con una reflexión τ (inducida por σ). En forma recíproca, toda superficie con una reflexión puede ser obtenida por medio de grupos de Schottky reales, en particular, este tipo de superficies pueden entonces ser uniformizadas por un grupo de Schottky clásico. Una manera simple de ver esto es la siguiente. Supongamos que S es una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ con una reflexión $\tau : S \to S$. Consideremos el cociente $R = S/\tau$, el cual es una superficie con $k > 0$ bordes (k = número de componentes conexas del conjunto de puntos fijos de τ). Tenemos dos posibilidades para R:

1.- Si R es orientable, entonces esta es una superficie de Riemann de algún género γ con $k > 0$ bordes. En este caso, $g = 2\gamma + k - 1$. Esta superficie puede ser uniformizada por un grupo Kleiniano K generado por la reflexión σ en el círculo unitario y por un grupo Fuchsiano F (actuando en el disco unitario) que uniformiza una superficie de Riemann de género γ y k hoyos. Esto es consecuencia de la teoría de aplicaciones casiconformales y el hecho que el conjunto de puntos fijos de reflecciones en la esfera de Riemann son círculos. Entonces el subgrupo de indice dos F, formado por

1. Introducción

El teorema de retrosección de Koebe asegura que toda superficie de Riemann cerrada puede ser vista por medio de grupos de Schottky. Por otro lado, a toda superficie de Riemann cerrada, una vez fijada una base simpléctica de homología, tenemos asociada una matriz de Riemann (una matriz de tamaño $g \times g$ simétrica y con parte imaginaria positiva definida, donde g denota el género de la superficie). El clásico problema de Schottky puede ser visto como el problema de la determinación explícita de estas matrices de Riemann. Para el caso de superficies de Riemann reales, es decir con un automorfismo anticonformal de orden dos con puntos fijos (desde ahora en adelante llamada una **reflexión**), indicaremos como obtener tales matrices de Riemann de manera explícita usando uniformizaciones por grupos de Schottky (llamados grupos de Schottky reales). En [3] se ha considerado esto para grupos Fuchsianos uniformizando superficies de Riemann hiperelípticas con una reflexión.

2. Grupos de Schottky Reales

2.1. Grupos de Schottky. Para un entero $g \geq 1$ consideremos una colección de $2g$ curvas simples cerradas, $C_1, \ldots, C_g, C'_1, \ldots, C'_g$, dos a dos disjuntas y acotando un dominio común $\mathcal{D}$ de conectividad $2g$. Supongamos además que tenemos una colección de g transformaciones de Möbius $A_1, \ldots, A_g$, tales que

(i) $A_j(C_j) = C'_j$ y
(ii) $A_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$,

para cada $j = 1, \ldots, g$. Entonces el grupo J generado por tales transformaciones es llamado un grupo de Schottky de género g, las curvas $C_1, \ldots, C_g, C'_1, \ldots, C'_g$ son llamadas un sistema fundamental de curvas asociadas al sistema de generadores $A_1, \ldots, A_g$. Este grupo J resulta ser un grupo Kleiniano, puramente loxodromico, isomorfo a un grupo libre de rango g y con región de discontinuidad conexa [8]. El dominio $\mathcal{D}$ es llamado un dominio fundamental estandard para J.

Otras definicioness equivalentes de grupos de Schottky pueden ser encontradas, por ejemplo, en [9] y [4].

2.2. El Teorema de Retrosección. Sea J un grupo de Schottky de género g, con región de discontinuidad Ω. Tenemos que Ω/J es una superficie de Riemann de género g. Recíprocamente, tenemos el teorema de retrosección, el cual asegura que si S es una superficie de Riemann de género g, entonces es posible encontrar un grupo de Schottky J, con región de discontinuidad Ω, y un cubrimiento de Galois $P : \Omega \to S$,

GRUPOS DE SCHOTTKY Y MATRICES DE RIEMANN

RUBÉN A. HIDALGO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA,
VALPARAÍSO, CHILE
RHIDALGO@MAT.UTFSM.CL

RESUMEN. En estas notas resumiremos parte de una conferencia dada por el autor en el Departamento de Matemáticas de la UNED correspondiente al cálculo de matrices de Riemann de superficies de Riemann reales por medio de grupos de Schottky.

ÍNDICE GENERAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

27

Rubén A. HIDALGO

GRUPOS DE SCHOTTKY

Y MATRICES DE RIEMANN