

Números anteriores

- 1 **Luigi Grasselli**, Crystallizations and other manifold representations.
- 2 **Ricardo Piergallini**, Manifolds as branched covers of spheres.
- 3 **Gareth Jones**, Enumerating regular maps and hypermaps.
- 4 **J. C. Ferrando and M. López-Pellicer**, Barrelled spaces of class N and of class χ_0 .
- 5 **Pedro Morales**, Nuevos resultados en Teoría de la medida no conmutativa.
- 6 **Tomasz Natkaniec**, Algebraic structures generated by some families of real functions.
- 7 **Gonzalo Riera**, Algebras of Riemann matrices and the problem of units.
- 8 **Lynne D. James**, Representations of Maps.
- 9 **Grzegorz Gromadzki**, On supersoluble groups acting on Klein surfaces.
- 10 **María Teresa Lozano**, Flujos en 3 variedades.
- 11 **P. Morales y F. García Mazario**, Medidas sobre proyecciones en anillos estrellados de Baer.
- 12 **L. Grasselli and M. Mulazzani**, Generalized lins-mandel spaces and branched coverings of S^3 .
- 13 **V. F. Mazurovskii**, Rigid isotopies of real projective configurations.
- 14 **R. Cantó**, Properties of the singular graph of nonnegative matrices.
- 15 **M. B. S. Laporta**, A short intervals result for linear equations in two prime variables.
- 16 **D. Girela**, El teorema grande de Picard a partir de un método de J. Lewis basado en las desigualdades de Hardnack.
- 17 **L. Ribes**, Grupos separables con respecto a conjugación.
- 18 **P. A. Zalesskii**, Virtually free pro- p groups.
- 19 **S. M. Natanzon**, Fuchsian groups and uniformization of Hurwitz spaces.
- 20 **M. Izquierdo**, On the fixed-point set of an automorphism of a closed nonorientable surface.
- 21 **J. M. Ansemil**, Algunos resultados sobre espacios de funciones holomorfas.
- 22 **J. F. Fernando Galván**, Triángulos racionales con grupo de reflexiones discreto.
- 23 **C. González**, Técnicas de simetrización aplicadas a ecuaciones diferenciales.
- 24 **G. González Diez**, El grupo fundamental del espacio de moduli en infinito.

Bibliografia

[AG] Alling, N. L. and Greenleaf, N., *Foundation of the theory of Klein surfaces*, Lect.Notes in Math., 219, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[CM] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag Berlin (1975).

[CGM] Costa, A. F., Gomez, B and Mora, J., *Arabesques and Geometry*, Springer VideoMATH, 1999.

[HS] Hoare, A. H. M. and Singerman, D., *Subgroups of plane groups*, London Math.Soc.Lecture Note Series 71 (1982) 221-227.

[J] Jones, G. A. *Symmetry*, in *Handbook of Applicable Mathematics, Vol. 5, Combinatorics and Geometry* (W. Ledermann ed.), Wiley, Chichester – New York – London (1985), 329–422.

[JS] Jones, G. A. and Singerman, D., *Complex functions, an algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press (1987).

[Jo] Joyce, D. E, *The seventeen wallpaper groups*, www site,
<http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/seventeen.html>

[Mac] Macbeath, A. M., *The classification of non-Euclidean crystallographic groups*, Can.J.Math. (1967)1192-1205.

[M] Montesinos, J. M., *Classical tessellations and three-manifolds*, (Universitext) Springer-Verlag (1987).

Faculty of Mathematical Studies,
The University of Southampton.
Southampton SO17 1BJ,
UK

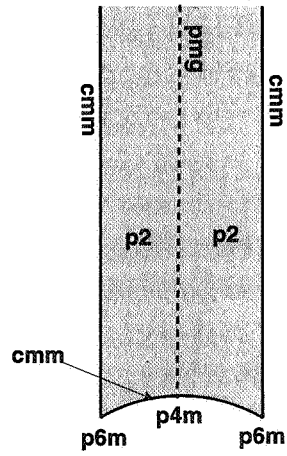


Fig. 6

Para superficies de Riemann de género superior se procede del mismo modo. Para este nuevo caso tendremos que usar grupos cristalográficos hiperbólicos y espacios de moduli de dimensiones superiores, ambos son temas importantes sobre los que se ha investigado en la U.N.E.D.

Deseo agradecer a Pablo Martín García por las conversaciones mantenidas sobre esta conferencia y por la traducción al español de este texto.

Subgrupos de índice dos de cmm

cmm está generado por una rotación x de orden 2 y por reflexiones a, b, c , que satisfacen las relaciones

$$x^2 = a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^2 = xaxc = 1.$$

Podemos suponer que el epimorfismo $\theta : cmm \rightarrow C_2$ viene dado por $\theta(a) = 1$, $\theta(b) = t$, $\theta(c) = 1$ y $\theta(x) = t$. Por lo tanto en el grafo de las órbitas de Schreier del que hemos eliminado los lazos de las reflexiones (fig. 5) nos aparece un lazo que invierte la orientación. Además, los subgrupos contienen reflexiones y por lo tanto el espacio cociente es una banda de Möbius.

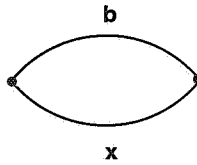


Fig. 5

Concluimos, usando los resultados de Alling y Greenleaf que hemos mencionado antes, que si $\tau = iy$ (con $y > 1$), entonces $\Gamma(\tau) \cong pmg$. Exactamente del mismo modo, siguiendo la observación anterior sobre cmm , vemos que para todos los otros puntos τ en la frontera de F , con la excepción de los puntos en el eje imaginario, o los puntos $\frac{\pm 1 + \sqrt{3}i}{2}$, tenemos que $\Gamma(\tau) = cmm$. Con esto hemos encontrado una forma de etiquetar todos los puntos de F por medio de grupos planos cristalográficos (veáse fig. 6) y por tanto, usando los elementos del grupo modular, etiquetamos todos los puntos del semiplano superior. Si τ es uno de esos puntos, entonces su etiqueta $\Gamma(\tau)$ es sencillamente el grupo de simetrías del retículo generado por 1 y por τ

que le hemos quitado los lazos de las reflexiones, contiene sólo caminos cerrados que preservan la orientación (véase fig. 2) y por lo tanto no hay ningún subgrupo isomorfo a pg .

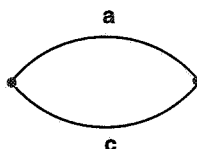


fig. 2

Subgrupos de pmg de índice dos

A partir de su signatura vemos que pmg está generado por dos rotaciones x e y de orden dos y una reflexión c que obedece la siguiente relación.

$$x^2 = y^2 = c^2 = xycyx = 1.$$

Hay dos epimorfismos $\theta : pmg \rightarrow C_2$, $\phi : pmg \rightarrow C_2$ definidos por $\theta(x) = \theta(y) = \theta(c) = t$ y $\phi(x) = \phi(y) = t$, $\phi(c) = 1$, cuyos núcleos no contienen rotaciones de orden dos. Los correspondientes diagramas de órbitas de Schreier con los lazos de reflexiones eliminados aparecen en la fig. 3 (para el caso θ) y en la fig. 4 (para ϕ). Vemos que $Ker(\theta)$ es no orientable sin frontera y por tanto corresponde a una botella de Klein, mientras que $Ker(\phi)$ es orientable y corresponde a un anillo.

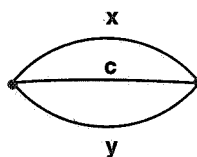


fig.3

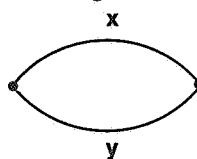


fig.4

el anillo así como involuciones anticonformes cuyo cociente es la botella de Klein, mientras que otros puntos en la frontera de F corresponden a toros que admiten sólo involuciones cuyo cociente es la banda de Möbius. Por lo tanto para los puntos τ de la forma $\{iy \mid y > 1\}$, vemos que $\Gamma(\tau)$ contiene a pm y a pg , ambos con índice 2, mientras que si τ es otro punto en la frontera de F entonces $\Gamma(\tau)$ contiene a cm con índice 2.

Ahora vamos a calcular las signaturas de los grupos $\Gamma(\tau)$ donde τ tiene la forma $\{iy \mid y > 1\}$. Sabemos que $\Gamma(\tau)$ contiene reflexiones y elementos que preservan la orientación de orden 2 pero no elementos de órdenes 3, 4 o 6. Por tanto, en la tabla 1 vemos que $\Gamma(\tau)$ debe ser pmm , pmg o cm . Para descubrir cuál es exactamente miramos los subgrupos de índice 2, pues sabemos que estos contienen a pm y a pg , ambos con índice 2. Conocemos la estructura de los grupos euclídeos por las signaturas en la tabla 1, y los teoremas tradicionales para subgrupos son ciertos en el caso tanto de grupos euclídeos como en el de grupos no euclídeos ([HS]). Intentaremos usar los teoremas de [HS] para decidir si los subgrupos son orientables. Esto significa estudiar la estructura del grafo de órbitas de Schreier (con los lazos correspondientes a generadores que son reflexiones borrados) de estos grupos con respecto a los subgrupos de índice dos y determinar si hay algún camino cerrado que invierta la orientación y que no corresponda a un generador que sea una reflexión. Si existen, entonces el subgrupo correspondiente tiene un espacio cociente que es no orientable. Como no nos vamos a preocupar de caminos cerrados que correspondan a lazos cerrados que provengan de una reflexión, seguiremos a [HS] y consideraremos los grafos ignorando los lazos producidos por reflexiones.

Subgrupos de índice dos de pmm

Por la signatura de pmm podemos saber que está generado por reflexiones a , b , c , d que verifican las relaciones

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = (ab)^2 = (bc)^2 = (cd)^2 = (da)^2 = 1.$$

Queremos examinar los subgrupos de índice dos que no tengan rotaciones de orden 2 (ya que pm , pg y cm no tienen elementos de este tipo), de tal modo que dado un epimorfismo $\theta : pmm \rightarrow C_2 = \{1, t\}$, debe tener la forma $\theta(a) = t$, $\theta(b) = 1$, $\theta(c) = t$, $\theta(d) = 1$ o $\theta(a) = 1$, $\theta(b) = t$, etc. El grafo de órbitas de Schreier al

grupos cristalográficos $\Gamma(\tau)$. Queremos asociar cada punto de F con dicho grupo cristalográfico, por ejemplo, supongamos que $\tau \in F$ es un punto interior que no está sobre el eje imaginario, entonces el grupo de isometrías de $\Omega(\tau)$ es el grupo cristalográfico euclídeo $p2$, y por tanto a todos esos puntos les ponemos la etiqueta $p2$ (es decir, etiquetamos $p2$, todos aquellos puntos τ donde $\Gamma(\tau) = p2$). Del mismo modo, $\Gamma(i) = p4m$ pues $\Omega(i)$ es el retículo cuadrado y por tanto admite simetrías y rotaciones de ángulo $\pi/4$. Por el mismo procedimiento $\Gamma\left(\frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = p6m$.

Pasamos a buscar las etiquetas para otros puntos sobre el eje imaginario y también sobre la frontera de F . Antes de hacer esto es útil dar (de acuerdo con Macbeath [Mac]) las firmas de los grupos euclídeos planos, pues podemos obtener de estas firmas su estructura algebraica y geométrica .

Los 17 grupos euclídeos y sus firmas

<i>Símbolo</i>	<i>Firma</i>
$p1$	$(1; +; []; \{ \})$
$p2$	$(0; +; [2, 2, 2, 2]; \{ \})$
pm	$(0; +; []; \{() ()\})$
pg	$(2; -; []; \{ \})$
cm	$((1; -; []; \{()\}))$
pmm	$(0; +; []; \{(2, 2, 2, 2)\})$
pmg	$(0; +; [2, 2]; \{()\})$
pgg	$(1; -; [2, 2]; \{ \})$
cmm	$(0; +; [2]; \{(2, 2)\})$
$p4$	$(0; +; [2, 4, 4]; \{ \})$
$p4m$	$(0; +; []; \{(2, 4, 4)\})$
$p4g$	$(0; +; [4]; \{(2)\})$
$p3$	$(0; +; [3, 3, 3]; \{ \})$
$p3m1$	$(0; +; [3]; \{(3)\})$
$p31m$	$(0; []; \{(3, 3, 3)\})$
$p6$	$(0; +; [2, 3, 6]; \{ \})$
$p6m$	$(0; +; []; \{(2, 3, 6)\})$

Vemos que los grupos sin elementos elípticos son de tipo $p1$, cuyo espacio cociente es el toro, pm representa al anillo, pg a la botella de Klein, y cm a la banda de Möbius y que todos excepto el primero contienen isometrías que invierten la orientación. Según [AG §1.9], los puntos en el eje imaginario por encima de i corresponden a toros que admiten involuciones anticonformes cuyo cociente es

Dado un retículo Ω , definimos

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{\omega^4} \quad \text{y} \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{\omega^6}$$

y entonces a Ω le corresponde la curva elíptica $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$. A este retículo se le asocia la función j , definida por

$$j(\Omega) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

Dicha asociación sólo depende de la clase del retículo y por tanto sólo de τ , es decir, sólo del toro.

Inversamente, dada la curva podemos expresarla en la forma normal de *Weierstrass* como $w^2 = 4z^3 - az - b$. Si ahora calculamos $\frac{a^3}{a^3 - 27b^2}$, obtenemos un número complejo, y se puede demostrar que este número corresponde a $j(\tau)$ para algún τ del semiplano superior, de donde podemos encontrar el retículo (y por tanto el toro) que corresponde a la curva.

Cristalografía plana

A partir de un retículo es posible construir diseños cristalográficos de dimensión dos. Los movimientos del plano que dejan invariante los diseños constituyen un grupo cristalográfico (euclídeo). Es posible demostrar que hay precisamente 17 tales grupos y todos ellos aparecen en manifestaciones artísticas clásicas, y en particular en la decoración de la Alhambra. Todos estos grupos contienen el grupo llamado $p1$, generado por dos traslaciones: $z \rightarrow z + u$ y $z \rightarrow z + v$. Por ello a todos se les puede asociar algún toro, y con ello un punto en la región modular F . Más aún, el retículo con vectores básicos u y v siempre admite la simetría $z \rightarrow -z$, de tal modo que si llamamos $p2$ al grupo generado por cuatro rotaciones de 180 grados alrededor de 0 , $u/2$, $v/2$ y $(u+v)/2$, $p1$ es siempre un subgrupo de $p2$.

Para una explicación más detallada de los 17 grupos euclídeos del plano, el lector puede consultar [J], [Mo], [CM]. También pueden ver la página web [J], y la película de Antonio Costa de la UNED [CGM].

Problema Sea $\tau \in F$ y tomemos el retículo $\Omega(\tau)$ generado por 1 y τ . El grupo de isometrías euclídeas que deja invariante $\Omega(\tau)$ es en realidad uno de los

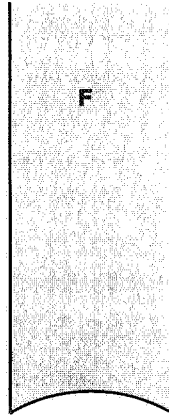


fig. 1

Curvas elípticas

Las curvas elípticas tienen la ecuación

$$w^2 = (z - a)(z - b)(z - c) \quad \text{o} \quad w^2 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$$

donde a , b , c y d son distintos, y guardan una estrecha relación con las funciones elípticas y las integrales elípticas que se estudiaron exhaustivamente durante el siglo XIX. Este tipo de curvas han recobrado su importancia últimamente, especialmente aquéllas que están definidas sobre los números racionales. Por ejemplo, la curva de Frey con ecuación

$$w^2 = z(z - a^p)(z + b^p)$$

donde a , b , c son enteros y $a^p + b^p + c^p = 0$ es fundamental para la reciente demostración del Último Teorema de Fermat realizada por Andrew Wiles.

Hemos visto que la superficie de Riemann de una curva elíptica es un toro y de hecho podemos describir el toro al que nos referimos. Esto significa que dado el retículo, es posible encontrar una curva, y a la inversa, cada curva produce un único retículo. Estos resultados clásicos se remontan en el pasado hasta Felix Klein.

$\omega_2, \omega_1 + \omega_2$. La forma de P está determinada por el cociente $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, en el que (intercambiando ω_1 y ω_2 si fuese necesario) podemos suponer que la parte imaginaria de τ es positiva, esto es que $\tau \in \mathbf{H}$, el semiplano superior. Sea Ω el conjunto de números complejos de la forma $m\omega_1 + n\omega_2$, dicho conjunto se llama el *retículo* Ω generado por ω_1 y ω_2 . El toro T obtenido a partir de identificar los lados opuestos del paralelogramo P es el cociente \mathbf{C}/Ω , pues P es una región fundamental de la acción de Ω sobre \mathbf{C} . Por lo tanto el toro, considerado como una superficie de Riemann está determinado por el número complejo τ . ¿Cuándo determina τ' la misma superficie de Riemann que τ ? La respuesta es si y sólo si ω'_1 y ω'_2 generan el mismo retículo que ω_1 y ω_2 , y por [JS], §3.4, §4.8, §6.1 esto ocurre si y sólo si existen enteros a, b, c, d verificando $ad - bc = 1$ y tal que:

$$\omega'_2 = a\omega_2 + b\omega_1$$

$$\omega'_1 = c\omega_2 + d\omega_1.$$

Expresado en función de τ y τ' esto se convierte en

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

con a, b, c, d números enteros y $ad - bc = 1$. Estas funciones dejan invariante el semiplano superior \mathbf{H} y forman un grupo conocido como el *Grupo Modular* que tiene una acción discontinua sobre \mathbf{H} . Una región fundamental para el grupo modular es la *Región Modular*, que es el área F de la figura 1, definida como el conjunto de los números complejos en el exterior de la circunferencia unidad cuyas partes reales se encuentran entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

cuando regresemos a $z = 1$ no se habrá producido ningún cambio en el valor de \sqrt{z} (esto se deriva de un teorema más general llamado *Teorema de Monodromía*). Sin embargo hemos comprobado que si nuestro recorrido da una vuelta completa al origen, entonces el valor de \sqrt{z} cambia a $-\sqrt{z}$. Lo que buscamos es encontrar una superficie sobre la cual \sqrt{z} sea una función (univaluada). Para ello lo que hacemos es considerar dos copias del plano (como antes) y cortarlas a lo largo de la parte negativa del eje real desde 0 a $-\infty$. Después pegamos estos planos a lo largo de los cortes para conseguir una superficie que refleje de algún modo cómo \sqrt{z} se convierte en $-\sqrt{z}$ cuando z circula alrededor del 0 (véase el libro [JS] §4.7 a §4.9 para los detalles). Ésta es la superficie de Riemann de \sqrt{z} y podemos calcular la superficie de Riemann de $z^{\frac{1}{n}}$ de un modo parecido. Si incluimos en ella el punto del infinito, lo que conseguimos es una cubierta ramificada de la esfera. Es sencillo comprobar que en estos casos las superficies de Riemann construidas son homeomorfas a la esfera.

Tomemos ahora ejemplos del tipo

$$\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

y

$$\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$

donde a , b , c y d son distintos. Veremos más adelante que estas superficies de Riemann son básicamente la misma, así que estudiaremos la segunda. Supongamos ahora que tenemos dos planos, ambos con un corte entre a y b así como entre c y d , y peguémoslos siguiendo el mismo procedimiento que antes. Vemos que la superficie obtenida esta vez es un toro, [JS §4.9]. En general, si tomamos un polinomio de dos variables $F(z, w) = 0$ que sea irreducible (esto es, que no pueda ser factorizado como producto de otros dos polinomios en dos variables de manera no trivial) obtenemos a partir de él una superficie compacta llamada la *Superficie de Riemann de F*. La situación más general es complicada, pero muchos de los problemas interesantes ya aparecen en aquellos casos en los que la superficie es un toro.

La forma más simple de construir un toro T es a partir de un paralelogramo P cuyos lados opuestos identificamos. Sea P el paralelogramo de vértices 0 , ω_1 ,

Superficies de Riemann y Cristalografía

Sinopsis *El presente artículo explica algunas ideas elementales que relacionan las superficies de Riemann y los grupos cristalográficos euclídeos. Los grupos cristalográficos no euclídeos (Non-Euclidean Crystallographic, NEC) han sido durante muchos años una de las principales áreas de investigación en la U.N.E.D. El álgebra de los grupos cristalográficos euclídeos es la misma que la de los grupos NEC. Entre los matemáticos españoles ha existido un gran interés por los grupos euclídeos debido a su relación con artes decorativas abstractas características de España (véase por ejemplo [M] y la película de la U.N.E.D. "Arabescos y Geometría" de Antonio Costa y otros [CGB]). A lo largo del texto, usamos el álgebra de los grupos euclídeos junto con nociones de las superficies de Klein euclídeas para asociar un grupo euclídeo a cada punto del semiplano superior.*

Este artículo se basa en una conferencia que di en la U.N.E.D. en abril del 2000 después de que me fuese concedida la Medalla de Plata de dicha universidad. Desearía aprovechar esta oportunidad para expresar mi más sincero agradecimiento a los matemáticos de la U.N.E.D. por proponer mi candidatura para esta distinción.

Las Superficies de Riemann aparecen por primera vez en el contexto de las funciones multivaluadas, funciones que son fáciles de entender en variable real. Si usamos \sqrt{x} , sólo es necesario restringir su dominio y su recorrido a la parte no negativa del eje real, y entonces \sqrt{x} se convierte en una función, sin embargo, al introducir los números complejos aparecen problemas bastante más serios. La forma habitual de tratar una función del tipo \sqrt{z} donde z es complejo consiste en considerar dos copias del plano complejo, llamémoslas C_1 y C_2 . Imaginemos C_1 como la cubierta superior, situada por encima de C_2 que es la cubierta inferior. Si $z \neq 0$ existen dos valores de \sqrt{z} que podemos visualizar como si cada uno estuviese en una de las cubiertas, sin embargo, si consideramos el punto $z = e^{i\theta}$ sobre la circunferencia unidad, y nos desplazamos girando sobre la circunferencia alrededor del cero, después de una vuelta completa, $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ de donde $\frac{\theta}{2} \rightarrow \frac{\theta}{2} + \pi$. Esto es, después de una vuelta completa $\sqrt{z} \rightarrow -\sqrt{z}$ y por lo tanto hemos saltado de una cubierta a la siguiente, si proseguimos con este movimiento, volveremos al punto de partida \sqrt{z} después de dos vueltas. Supongamos ahora que comenzamos en $z = 1$ y realizamos un recorrido que no dé una vuelta completa alrededor del origen, entonces

Contenidos

Sinopsis	1
Curvas elípticas	4
Cristalografía plana	5
Subgrupos de índice dos de <i>pmm</i>	7
Subgrupos de <i>pmg</i> de índice dos	8
Subgrupos de índice dos de <i>cmm</i>	9
Bibliografía	11

SUPERFICIES DE RIEMANN Y CRISTALOGRAFÍA

David Singerman

Esta conferencia se celebró con motivo de la entrega al

Profesor David Singerman

de la

Medalla de Plata de la UNED

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA



DISERTACIONES
DEL SEMINARIO
DE MATEMÁTICAS
FUNDAMENTALES

25

David SINGERMAN

SUPERFICIES DE RIEMANN

Y CRISTALOGRAFÍA