UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

24

Gabino GONZÁLEZ DIEZ

EL GRUPO FUNDAMENTAL DEL ESPACIO DE MODULI EN INFINITO

EL GRUPO FUNDAMENTAL DEL ESPACIO DE MODULI EN INFINITO

Gabino González Diez
Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Madrid

Primavera de 2000

Contenidos

El grupo fundamental del espacio de moduli en infinito

Gabino González Diez
Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Madrid.

Primavera de 2000

Ce principe de construction de la tour de
Teichmüller nést pas montré à l'heure
actuelle- mais je n'ai aucun doute
quíl ne soit valable. Il résulterait (...) d'une
propriété extrêmement plausible(...) a savoir
que pour une dimension modulaire
N$\geqslant$3 , le groupe fundamental de $M_{g,v}$
(i.e. le Teichmüller habituel $T_{g,v}$) est
isomorphe au "groupe fundamental à
l'ınfini"
(A.Grothendieck. Esquisse d'un programme)

Lo que sigue es el resumen de una conferencia dada en el Departamento de Matemáticas de la UNED en la que se expuso un trabajo realizado conjuntamente con P. Lochak cuya motivación es el párrafo de Grothendieck antes citado. La frase "le groupe fundamental de $M_{g,v}$ (i.e. le Teichmüller habituel $T_{g,v}$)" muestra que Grothendieck se está refiriendo implícitamente al grupo fundamental "como *orbifold"*. En este sentido el problema fue considerado, y resuelto, por Lochak en[5]. Aquí trataremos el problema análogo en el contexto puramente topológico.

1 Grupo modular y espacios de Teichmüller y moduli

Empezaremos recordando el significado de los objetos mencionados el el título de esta sección.

1.1 Definiciones

•Espacio de *moduli*: $\mathbf{M}_g = \{$superficies de Riemann S módulo isomorfismo $\}$

Denotaremos por $[S]$ el punto definido por la superficie de Riemann S.

•Espacio de *Teichmüller*:

$$\mathbf{T}_g = \frac{\{(S, \varphi : S_0 \to S), \text{módulo isotopía}\}}{(S, \varphi) \approx (\tau(S), \tau \circ \varphi), \tau \overset{\approx}{\to} \tau(S),\ \tau \text{ isomorfismo}}$$

Denotaremos la clase de un par $(S, \varphi : S_0 \to S)$ por $[S, \varphi]$

•Grupo modular*(de Teichmüller)*: Mod_g=$Homeo^+(S_o)/Isotopía$.

•Acción de Mod_g en $\mathbf{T}_g$:

"Si $f : S_0 \to S_0 \in Mod_g$ $f([S, \varphi : S_0 \to S]) = [S, \varphi \circ f : S_0 \to S]$"

La importancia de los objetos que acabamos de introducir se debe a que según resultados clásicos de Teichmüller, Ahlfors y Bers $\mathbf{T}_g$ es un abierto contractible de $\mathbb{C}^{3g-3}$ y, con esta identificación, la acción de Mod_g en $\mathbf{T}_g$ es holomorfa y discreta de modo que $\mathbf{M}_g$ aparece como su cociente.

•Espacio cociente:

$p : \mathbf{T}_g \to \mathbf{M}_g = \mathbf{T}_g/Mod_g$

$p^{-1}([S_0]) = \{[S_0, \varphi]\}_{\varphi \in Mod_g}$

Vemos así que en $\mathbf{T}_g$ todo punto $[S_0] \in \mathbf{M}_g$ aparece una vez por cada elemento del grupo modular $\varphi \in Mod_g$ (aunque esto no es correcto del todo: falla si $\varphi \in Aut(S_0)$= automorfismos de S_0.)

Para nuestros propósitos será de especial relevancia examinar los

•Puntos fijos de la acción de Mod_g

Tenemos $f[S, \varphi] = [S, \varphi] \Leftrightarrow [S, \varphi \circ f] = [S, \tau \circ \varphi]$, para algún $\tau \in Aut(S)$, luego

$Fix(f) = \{[S, \varphi] : \varphi f \varphi^{-1} \approx \tau \in Aut(S)\}$

El mensaje es que los puntos fijos corresponden a superficies con automorfismos.

1.2 Ejemplos: g=1,2.

$g = 0$) $\mathbf{T}_g = \{*\}$, $Mod_g = 1$ (Teorema de Schönfliess)$\Rightarrow$ $\mathbf{M}_g = \{*\}$ (este último hecho se sigue también del Teorema de Uniformización o del de Riemann-Roch).

$g = 1$)$\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{H}$, el semiplano superior.

En esta correspondencia $\tau \longleftrightarrow [E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau, \varphi_\tau]$, donde $S_0 = E_i$, y $\varphi_\tau : E_i \to E_\tau$ es el homeomorfismo inducido por el isomorfismo $\mathbf{R}$-lineal

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ i & \to & \tau \end{array} \right\}$$

$\mathbf{Mod}_1 \equiv \mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$; donde la identificación viene dada por

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow f_\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \to & ci + d \\ i & \to & ai + b \end{array} \right\}.$$

Con esta identificación la forma que toma la acción del grupo modular es $\gamma(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

En efecto:

$\gamma(\tau) \equiv f_\gamma\ ([E_\tau, \varphi_\tau\ ]) \equiv [E_\tau, \varphi_\tau \circ f_\gamma\ ] \equiv [E_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}},\ \sigma \circ \varphi_\tau \circ f_\gamma] = [E_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}, \varphi_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\ ]$ (siendo $\sigma : E_\tau \to E_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}$, el isomorfismo $z \to z/c\tau + d$).

Tenemos así $\sigma\varphi_\tau f_\gamma(1) = \sigma\varphi_\tau(ci + d) = \sigma(c\ \tau + d) = 1$ y $\sigma\varphi_\tau f_\gamma(i) = \sigma\varphi_\tau(ai + b) = \sigma(a\ \tau + b) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ como se deseaba.

2 El grupo fundamental de $\mathbf{M}_g$, $\pi_1(\mathcal{M}_g)$

•(como orbifold) $\pi_1(\mathcal{M}_g = \frac{\mathcal{T}_g}{Mod_g}) = Mod_g$ (por definición).
•(topológicamente) $\pi_1(\mathcal{M}_g) = \{1\}$ (C. Maclachlan)[7]

La discrepancia es debida a la existencia de superficies con automorfismos.

Según un resultado de Armgstrong[1] el isomorfismo de grupos habitual

$$\begin{array}{c} Mod_g \to \pi_1(\mathcal{M}_g) \\ f \to p([t_0 \rightsquigarrow f(t_0)]) \end{array}$$

tiene (ahora) como núcleo : $\langle\langle F = \{f : f(t) = t, \exists t \in \mathcal{T}_g\ \}\rangle\rangle$ con $\langle\langle , \rangle\rangle$ = cierre normal, i.e.

$$\pi_1(\mathcal{M}_g) = \frac{Mod_g}{\langle\langle F\rangle\rangle}.$$

Usando resultados de J.Birman , Maclachlan[7] observó que $Mod_g = \langle\langle F\rangle\rangle$; de hecho probó que Mod_g está normalmente generado por los conjugados de sólo dos elementos de orden finito (y, por tanto, realizables como automorfismos de alguna superficie de Riemann, según un teorema clásico de Nielsen)

3 El grupo fundamental en el infinito, $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_g)$

Un hecho fundamental en la teoría del espacio de moduli de superficies de Riemann compactas, o curvas algebraicas, es que $\mathcal{M}_g$ no es compacto e.g. la sucesión de puntos $[X_\varepsilon] \in \mathcal{M}_g$ donde X_ε es la curva algebraica de ecuación $y^2 = (x - \varepsilon)(x + \varepsilon)(x - a_1)(x + a_1)...(x - a_g)(x + a_g)$ no tiene límite en $\mathcal{M}_g$ cuando $\varepsilon \to 0$ pues, intuitivamente, la curva cerrada que une los puntos (de Weierstrass) correspondientes a ε y $-\varepsilon$ se contraería a un punto en la superficie límite con lo cual obtendríamos algo que no es genuinamente una superficie.

La **compactificación de Mumford-Deligne** se obtiene precisamente añadiendo puntos que representan estas *superficies* límite *(superficies con nodos o curvas estables)*. Puesto que estamos abocados a expresar la idea de "entorno de $\mathcal{M}_g$ en el infinito" es natural introducir los subconjuntos de $\mathcal{M}_g$ siguientes: $\mathcal{M}_g^\varepsilon = \{\ [X] \in \mathcal{M}_g : X \supset \gamma\ , l(\gamma) < \varepsilon\}$, donde, por supuesto, la longitud $l(\gamma)$ de una curva γ está calculada respecto de "la" métrica hiperbólica de curvatura constante.

Claramente $\varepsilon < \varepsilon' \Rightarrow \mathcal{M}_g^\varepsilon \subset \mathcal{M}_g^{\varepsilon'}$, lo que induce un homomorfismo $\pi_1(\mathcal{M}_g^\varepsilon) \to \pi_1(\mathcal{M}_g^{\varepsilon'})$.

Definición 1 $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_g) := \varprojlim \pi_1(\mathcal{M}_g^\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. *(límite proyectivo)*

(Obsérvese que en esta definición se debería ser más preciso respecto a la elección de puntos base. Pero todo se puede hacer de forma rigurosa [5])

Teorema 2 *i) Si $\varepsilon, \varepsilon'$ son suficientemente pequeños se tiene $\pi_1(\mathcal{M}_g^\varepsilon) = \pi_1(\mathcal{M}_g^{\varepsilon'})$. Tenemos así $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_g) = \pi_1(\mathcal{M}_g^\varepsilon)$, cuando $\epsilon \approx 0$. ii) $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_g) = Mod_g$, como orbifold. (Lochak confirmando a Grothendieck[5])*

Demostración Escribamos $\mathcal{M}_g^\varepsilon = \dfrac{\mathcal{T}_g^\varepsilon}{Mod_g}$, $\mathcal{T}_g^\varepsilon = p^{-1}(\mathcal{M}_g^\varepsilon)$, $p : \mathcal{T}_g \to \mathcal{M}_g$. Ahora i) se sigue del siguiente resultado de Wolpert:(ver [5]). Si $\varepsilon < \varepsilon' < \dfrac{\ln(1+\sqrt{2})}{3}$ $\exists$ difeo $\phi : \mathcal{T}_g^\varepsilon \to \mathcal{T}_g^{\varepsilon'}$ Mod_g-equivariante lo que induce un difeomorfismo $\phi : \mathcal{M}_g^\varepsilon \to \mathcal{M}_g^{\varepsilon'}$ (Nota: la aparición de este número concreto es debida al hecho de que si γ_i son dos curvas tales que $l(\gamma_i) < \dfrac{\ln(1+\sqrt{2})}{3}$ entonces $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$), ii) es una consecuencia de reultados de Harvey y Harer(ver [5]) que implican que $\pi_1(\mathcal{T}_g^\varepsilon) = \{1\}$

Como consecuencia del teorema anterior deducimos que $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_g) = \dfrac{Mod_g}{\langle\langle F^\varepsilon\rangle\rangle} = \dfrac{\langle F\rangle}{\langle\langle F^\varepsilon\rangle\rangle}$, donde $F^\epsilon = \{f : f(t) = t, \exists t = (S, \{,\}) \in \mathcal{T}_g^\varepsilon\} = \{f : Fix(f)$ llega hasta la frontera de $\mathcal{T}_g\}$

La conjetura análoga de Grothendieck en el contexto topológico, que es de lo que aquí se trata, sería $\langle\langle F\rangle\rangle = \langle\langle F^\epsilon\rangle\rangle$

3.1 Espacios de moduli y grupos modulares relativos

Por un resultado de Nielsen ya aludido se sabe que un elemento $\tau \in Mod_g$ tiene un conjunto de puntos fijos, $Fix(\tau)$, $\neq \emptyset \Leftrightarrow ord(\tau) < \infty$, i.e $\Leftrightarrow \tau$ se realiza como un automorfismo de alguna superficie de Riemann S . Supongamos que éste es el caso y pongamos

i)$Fix(\tau) =: \mathcal{T}(\tau)$, *espacio de Teichmüller relativo*

ii)$Mod(\tau) := Stab(\mathcal{T}(\tau) = Normal_{Mod_g}(<\tau>)$, *grupo modular relativo.*

iii)$\widetilde{\mathcal{M}}(\tau) := \mathcal{T}(\tau)/\ Mod(\tau)$ *espacio de moduli relativo.* Es un espacio normal (Cartan)

Teorema 3 *([3])Supongamos que la proyección $S \xrightarrow{\pi} \frac{S}{\langle\tau\rangle} = X_\pi$ es de tipo (p, v) , i.e. p =género de X_π y v =número se valores de ramificación. Entonces $\mathcal{T}(\tau) \equiv \mathcal{T}_{p,v}$ (el espacio de Teichmüller de la superficie de género p con v puntos marcados). Además los siguientes morfismos obvios*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}(\tau) & \to & \mathcal{M}_g(\tau) := p(\ \mathcal{T}(\tau)) \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{M}_{p,v} \end{array}$$

son finitos.

4 Automorfismos maximales

Definición 4 *Diremos que τ es maximal cuando $\mathcal{T}(\tau)$ se reduce a un punto*

Proposición 5 *τ es maximal $\Leftrightarrow$ la proyección $S \xrightarrow{\pi} \frac{S}{\langle\tau\rangle} = X_\pi$ es de tipo* $(0,3)$

Demostración Por la parte i) del teorema anterior tenemos que, en general, $\dim(\mathcal{T}(\tau))=\dim(\mathcal{T}_{p,v}) = 3p-3+v$. Luego $\dim(\mathcal{T}(\tau))=0 \Leftrightarrow (p,v)=(0,3)$.

Proposición 6 *Cuando $\varepsilon \approx 0$ F^ε no contiene elementos maximales:*

Demostración Basta tomar $\varepsilon < l(\gamma)$, $\gamma \subset S_i, i = 1...d$ donde S_i varía en el conjunto, necesariamente finito, de superficies con un automorfismo maximal

De hecho se tiene

Teorema 7 $F^\varepsilon = F \setminus \{maximales\}$

Demostración Recuérdese que $F^\varepsilon = \{h \in Mod_g : \mathcal{M}_g(h) \cap \mathcal{M}_g^\varepsilon \neq \emptyset\}$. Basta ver, por tanto, que si τ no es maximal se tiene $\mathcal{M}_g(\tau) \cap \mathcal{M}_g^\varepsilon \neq \emptyset$ o lo que es lo mismo $\mathcal{M}_g(\tau) \nsubseteq \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_g^\varepsilon$. Esto se sigue de los siguientes hechos: i)$\mathcal{M}_g(\tau)$ es cerrado en $\mathcal{M}_g$. Esto es así porque $\mathcal{T}_g(\tau)$ lo es en $\mathcal{T}_g$ y porque Mod_g actúa de forma propiamente discontinua([3]), ii)$\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_g^\varepsilon$ compacto (Mumford [8]). Luego $\mathcal{M}_g(\tau) \subseteq \mathcal{M}_g \setminus \mathcal{M}_g^\varepsilon$ implicaría $\mathcal{M}_g(\tau)$ compacto y del teorema anterior deduciríamos que tanto $\widetilde{\mathcal{M}}(\tau)$ como $\mathcal{M}_{p,v}$ serían tambien compactos. Contradicción: es bien sabido que $\mathcal{M}_{p,v}$ no es compacto. De hecho admite la famosa compactificación de Deligne-Mumford.

5 $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_g)$ es trivial si $g > 2$

Sabemos ya que $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_g) = Mod_g/\langle\langle$autom. no maximales$\rangle\rangle$, luego la pregunta es ¿$Mod_g = \langle\langle$automorfismos no maximales$\rangle\rangle$?

1) Los dos automorfismos dados por Maclachlan para probar que

$$Mod_g = \langle\langle \text{automorfismos maximales o no} \rangle\rangle$$

no sirven ahora pues éstos son maximales: tienen órdenes $2g+2$ y $4g+2$ respectivamente. De hecho son los siguientes: $\alpha \in Aut(\{y^2 = x^{2g+2}-1\}, \alpha(x,y) = (\xi x, y)$, y $\beta \in Aut(\{y^2 = x^{2g+1}-1\}, \beta(x,y) = (\xi x, -y)$

2)Sin embargo Mccarthy y Papadopoulos[6] han probado que si $g > 2$, Mod_g está normalmente generado por transformaciones que tienen orden 2, luego no maximales. Esto acaba el estudio en el caso $g > 2$. Para entender el caso $g = 2$ necesitaremos usar la representación de este espacio de moduli dada por Igusa

6 Representación de $\mathcal{M}_2$ de Igusa [4]

$$\mathcal{M}_2 = \mathbf{C}^3/C_5, \text{ donde } C_5 = \left\langle \zeta_5 = e^{2\pi i/5} \right\rangle$$

actuando en la forma $\zeta_5 \circ (z_1, z_2, z_3) \to (\zeta_5 z_1, \zeta_5^2 z_2, \zeta_5^3 z_3)$. En esta representación los parámetros (z_1, z_2, z_3) que parametrizan una curva de género 2 $y^2 = f(x)$ son ciertas funciones simétricas de las 6 raíces del polinomio $f(x)$. Se tiene

1)Obviamente $(0,0,0)$ que es el único punto singular, luego debe parametrizar la superficie $S_0 \equiv \{y^2 = x^5 - 1\}$. Se sabe que $Aut(S_0)$ es un grupo de orden 10 generado por $\tau(x,y) = (\zeta_5 x, -y)$. Las potencias τ^i, $i \neq 5$ son maximales mientras que τ^5 =involución hiperelíptica.

2)$\pi_1(\mathcal{M}_2) = \pi_1(\mathbf{C}^3/C_5) = C_5/\langle\langle\text{torsion}\rangle\rangle = 1$ como ya sabíamos.

Denotemos por $\mathcal{M}_2^*$ el subconjunto obtenido al eliminar el punto singular y por $\mathcal{T}_2^*$ su preimagen en $\mathcal{T}_2$, entonces, puesto que tanto $\mathbf{C}^3 \setminus \{0\}$ como $\mathcal{T}_2^*$ son todavía simplemente conexos (el conjunto de puntos eliminado es discreto), se tiene además

3)$\pi_1(\mathcal{M}_2^*) = \pi_1((\mathbf{C}^3 \setminus \{0\})/C_5) = C_5$. O también:

4) $\pi_1(\mathcal{M}_2^*) = \pi_1(\dfrac{\mathcal{T}_2^*}{Mod_2}) = \dfrac{Mod_2}{\langle\langle f\ : Fix(f) \cap \mathcal{T}_2^* \neq \emptyset \rangle\rangle}$

$= \dfrac{Mod_2}{\langle\langle f \text{ de torsión } / \ f \neq \tau^i, i \neq 5 \rangle\rangle}$

Por otro lado recordemos que

5)$\pi_1^\infty(\mathcal{M}_2) = \dfrac{Mod_2}{\langle\langle f \text{ torsión } / \ f \text{ no maximal } \rangle\rangle}$

Podemos ahora enunciar el resultado final

Teorema 8 $\pi_1^\infty(\mathcal{M}_2) \equiv C_5$.

Demostración Por lo que precede basta ver que $\langle\langle f \text{ torsión } / \ f \neq \tau^i, i \neq 5 \rangle\rangle = \langle\langle f \text{ torsión } / \ f \text{ no maximal } \rangle\rangle$

$\supseteq$) Obvio.

$\subseteq$) En principio el conjunto $\{f \text{ torsión } / \ f \text{ no maximal }\}$ es más pequeño que el conjunto $\{f \text{ torsión } / \ f \neq \tau^i, i \neq 5\}$ pues hay otras superficies de género 2, distintas de la S_0, que admiten elementos maximales. Son dos: $y^2 = x^6 - 1$ y $y^2 = x(x^4 - 1)$

1)$Aut($ $y^2 = x^6 - 1$ $)$ es un grupo de orden orden 24 con generadores

$\gamma(x,y) = (\xi_6 x, y)$ y $\sigma(x,y) = (\dfrac{1}{x}, \dfrac{iy}{x^3})$

a) $\gamma(x,y) = (\xi_6 x, y)$, de orden 6, es maximal pero $\gamma = \gamma^3\gamma^4$ y γ^3,γ^4 tienen órdenes 2 y 3 $\Rightarrow$no son maximales (Riemann Hurwitz)$\Rightarrow$ $\gamma \in \langle\langle f \text{ torsión } / \ f \text{ no maximal } \rangle\rangle$

b)$\sigma(x,y) = (\dfrac{1}{x}, \dfrac{iy}{x^3})$ es de orden 4 y no es maximal: su cociente es la esfera con 4 puntos.

2) $Aut($ $y^2 = x(x^4 - 1))$ es un grupo de orden 48 con generadores ρ, β, α de órdenes 8, 3, 2 respectivamente, dados por

$$
\begin{aligned}
\rho(x,y) &= (ix, \xi_8 y),\\
\alpha(x,y) &= (\frac{x-i}{x+i}, \frac{4y}{(i-1)(x+i)^3}),\\
\beta(x,y) &= (\frac{x-i}{ix-1}, \frac{2\sqrt{2}iy}{(x+i)^3})
\end{aligned}
$$

Como α y β tienen órdenes 3 y 2 deducimos, de nuevo, que son no maximales. Por su parte ρ es maximal pero se comprueba que $\rho = \alpha\beta$ (tomando $\xi_8 = \frac{\sqrt{2}i}{1-i}$) [2]. Esto concluye la demostración.

References

[1] M. A. Armgstrong, The fundamental group of the quotient space of a discontinuous group, Proc. Cambridge Phil. Soc. 64. (1968), 299-301.

[2] J. Cirre. Curvas algebraicas de género 2, Tesis doctoral, Universidad Complutense, Madrid, 1997.

[3] G.Gonzalez-Diez, W.J. Harvey. Moduli of Riemann sufaces with symmetry, in Discrete Groups and Geometry, London Math. Soc. Lecture Notes 173, Cambridge U. Press, 1992, 75-94.

[4] J. Igusa, Arithmetic variety of moduli for genus two, Ann. of Math. 72. (1960).

[5] P.Lochak, The fundamental group at infinity of the moduli space of curves, in Geometric Galois Actions I, London Math. Soc. Lecture notes 242, Cambridge U. Press, 1997, 139-158.

[6] J.McCarthy, A. Papadopoulos, Involutions in surface mapping class groups, L'Enseignement Mathèmatique 33 (1987), 275-290

[7] C.Maclachlan, Modulus space is simply connected, Proc. AMS 29 (1971), 85-86. Proc. London Math. Soc. 30 (1975), 495-512.

[8] D.Mumford. A remark on Mahler's compactness theorem, Proc. AMS 28 (1971), 289-294.