UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

23

Cristóbal GONZÁLEZ

TÉCNICAS DE SIMETRIZACIÓN APLICADAS A ECUACIONES DIFERENCIALES

TÉCNICAS DE SIMETRIZACIÓN APLICADAS A ECUACIONES DIFERENCIALES

Cristóbal González

5 de julio de 2000

Contenidos

TÉCNICAS DE SIMETRIZACIÓN APLICADAS A ECUACIONES DIFERENCIALES

CRISTÓBAL GONZÁLEZ

SUMARIO. El presente es un artículo expositorio de cómo algunas técnicas de simetrización pueden ser usadas para obtener estimaciones integrales entre soluciones de algunas ecuaciones diferenciales.

1. PRELIMINARES HISTÓRICOS

El presente es un artículo expositorio de cómo algunas técnicas de simetrización pueden ser usadas para obtener estimaciones integrales entre soluciones de algunas ecuaciones diferenciales. Una versión más extensa de este trabajo aparece en [13].

Empezamos mencionando el trabajo que Faber (1923) y Krahn (1925) realizaron, de forma independiente, acerca de una conjetura que Lord Rayleigh (1877) propuso en su libro *The Theory of Sound*: "Entre todos los tambores de igual área, el que es circular es el que tiene el tono más grave posible". Traduciendo ésto al lenguaje matemático tenemos que un tambor es un dominio D en $\mathbb{R}^n$, y que el tono más grave que un tambor D puede obtener viene dado por el primer autovalor del laplaciano en D, cuya ecuación la podemos expresar como sigue:

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & \text{en } D, \\ u = 0, & \text{en } \partial D, \end{cases}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$.

El primer autovalor de D, $\lambda_0(D)$, viene caracterizado también por el llamado *cociente de Rayleigh*:

$$\lambda_0(D) = \inf \frac{\int_D |\nabla u|^2}{\int_D u^2},$$

Fecha: 5 de julio de 2000.

Códigos AMS 2000. Primarios 34A40, 35B05, 26D10; Secundarios 35J25, 35J65, 26Axx, 28Axx.

Trabajo financiado en parte por el Ministerio de Educación y Cultura, proyecto PB97-1081; y por la Junta de Andalucía, proyecto FQM-210.

donde el ínfimo se toma sobre una conveniente clase de funciones admisibles cuya definición omitimos. Solo destacamos que esta clase contiene funciones con cierta regularidad en D que se anulan en la frontera de D. Dicho ínfimo es en realidad un mínimo sobre esta clase de funciones, y es alcanzado por una única función no negativa u_0, que resulta ser solución de (P) con $\lambda = \lambda_0(D)$. Ahora es cuando interviene un proceso de *simetrización*, llamado de Schwarz, el cual, en pocas palabras, transforma D en una bola $D^{\#}$ de igual volumen que D, y una función u la transforma en otra función $u^{\#}$ definida en $D^{\#}$, de manera que se satisface $\{u^{\#} > t\} = \{u > t\}^{\#}$. Así, usando que este tipo de simetrización reduce integrales de Dirichlet y preserva normas, obtenemos el siguiente desarrollo, que permite decir que la conjetura de Rayleigh es cierta.

$$\begin{aligned}\lambda_0(D) &= \frac{\int_D |\nabla u_0|^2}{\int_D u_0^2} \\ &\geq \frac{\int_{D^{\#}} |\nabla u_0^{\#}|^2}{\int_{D^{\#}} u_0^{\#2}} \\ &\geq \inf \frac{\int_{D^{\#}} |\nabla u|^2}{\int_{D^{\#}} u^2} = \lambda_0(D^{\#}).\end{aligned}$$

Nos adelantamos ahora en el tiempo para dar otro uso de simetrización, en este caso *simetrización circular* en el plano complejo, aunque tampoco la definiremos. Sea $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ el disco unidad, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ una región anular centrada en 0 con radios r_1 y r_2, y $\Omega^{\mathcal{I}} = \{\rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r_1 < \rho < r_2,\ 0 < \varphi < \pi\}$. Baernstein [3] probó en 1974 que si u es subarmónica Ω y $u^{\mathcal{I}}$ viene dada por

$$u^{\mathcal{I}}(\rho e^{i\varphi}) = \sup_{\substack{F \subseteq \partial\mathbb{D} \\ |F| = 2\varphi}} \int_F u(\rho e^{i\theta})d\theta, \qquad \rho e^{i\varphi} \in \Omega^{\mathcal{I}},$$

entonces $u^{\mathcal{I}}$ es subarmónica en $\Omega^{\mathcal{I}}$. O sea,

$$\Delta u \geq 0 \text{ en } \Omega \quad \Longrightarrow \quad \Delta u^{\mathcal{I}} \geq 0 \text{ en } \Omega^{\mathcal{I}}.$$

Este resultado tuvo grandes consecuencias en el estudio de la clase de funciones $S = \{f \text{ analítica y univalente en } \mathbb{D} : f(0) = 0, f'(0) = 1\}$. Sin entrar en los detalles, enunciamos el siguiente resultado.

TEOREMA A ([3]). *Sea $f \in S$, y sea $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \in S$ la función de Koebe. Si u es la función de Green de $f(\mathbb{D})$ con polo en 0, y v es la correspondiente función de Green de $k(\mathbb{D})$ con polo en 0, ambas extendidas como 0 fuera de $f(\mathbb{D})$ y $k(\mathbb{D})$, respectivamente, entonces*

$$u^{\mathcal{I}}(\rho e^{i\varphi}) \leq v^{\mathcal{I}}(\rho e^{i\varphi}), \qquad \rho e^{i\varphi} \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{\mathcal{I}},$$

lo que equivale a decir que para toda función convexa, $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene la siguiente propiedad extremal de la función de Koebe,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F\Big(\log\big|f(re^{i\theta})\big|\Big)\,d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} F\Big(\log\big|k(re^{i\theta})\big|\Big)\,d\theta.$$

Estos son simplemente ejemplos de una extensa variedad de resultados que se han obtenido usando un tipo u otro de simetrización. En 1975, Borell [6] introdujo el concepto de *simetrización con respecto a la medida de Gauss en* $\mathbb{R}^n$, y fue estudiada extensamente por Ehrhard [9, 10], y el mismo Borell [7] en los 80's. De aquí se ha pasado a considerar la simetrización con respecto a ciertas medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Sin definir este concepto por el momento, enunciamos un resultado de comparación de soluciones de ecuaciones diferenciales, obtenido por Borell [8] en 1985.

TEOREMA B ([8]). *Sea φ una función con soporte en el intervalo finito $[-a,a]$ tal que $\log\varphi$ es analítica real en $[-a,a]$, y $d\mu(x) = \varphi(x)dx$ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$, que además es regularizante (lo definiremos en la sección 3). Consideremos los siguientes operadores diferenciales,*

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{\varphi}D(\varphi D) = -D^2 - \frac{\varphi'}{\varphi}D, \qquad \mathcal{B} = -\varphi D\big(\frac{1}{\varphi}D\big) = -D^2 + \frac{\varphi'}{\varphi}D.$$

Supongamos que f es una función continua en $\mathbb{R}$, no negativa, con soporte en $[-a,a]$, y que f° es la simetrización de f con respecto a φ. Supongamos también que u y v son soluciones continuas de los siguientes problemas de Dirichlet,

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathcal{A})u = 0, & -a < x < a,\ t > 0,\\ u(-a,t) = 0, & t > 0,\\ u(a,t) = 0, & t > 0,\\ u(x,0) = f(x), & -a \le x \le a, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\partial_t + \mathcal{A})v = 0, & -a < x < a,\ t > 0,\\ v(-a,t) = \sup\limits_{[-a,a]} f, & t > 0,\\ v(a,t) = 0, & t > 0,\\ v(x,0) = f^\circ(x), & -a \le x \le a. \end{cases}$$

Si $u^{\mathcal{I}}$ viene dada por

$$u^{\mathcal{I}}(s,t) = \sup_{\substack{F\subseteq[-a,a]\\ \mu(F)=\mu(-a,s)}} \int_F u(x,t)\,d\mu(x), \qquad t > 0,\ -a < s < a,$$

y $v^{\mathcal{I}}$ de forma análoga, entonces

(a) $(\partial_t + \mathcal{B})u^{\mathcal{I}} \le 0$.

(b) *v coincide con su φ-simetrización, v°, y además* $(\partial_t + \mathcal{B})v^{\mathcal{I}} \ge 0$.

(c) $u^{\mathcal{I}} \le v^{\mathcal{I}}$.

Baernstein probó en [3] que (c) equivale a decir que si $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa y creciente, entonces

$$\int_{-a}^{a} F\Big(u(x,t)\Big)d\mu(x) \leq \int_{-a}^{a} F\Big(v(x,t)\Big)d\mu(x), \qquad t > 0.$$

En particular, si u y v son no negativas, entonces

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(d\mu)} \leq \|u(\cdot,t)\|_{L^p(d\mu)}, \qquad t > 0, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

En el artículo [13] hemos generalizado el resultado de Borell en varias direcciones. Hemos considerado una clase de medidas de probabilidad más extensa, las igualdades diferenciales han sido cambiadas por desigualdades, se han añadido términos no lineales a las ecuaciones. Y finalmente, las condiciones de tipo Dirichlet en la frontera han sido cambiadas por condiciones de tipo Neumann. En esta exposición pretendemos dar una idea de cómo realizar las mencionadas generalizaciones; aunque también se enuncian resultados de índole general, que, de acuerdo con lo que el autor conoce, parecen ser nuevos.

2. φ-Simetrización

Consideremos el siguiente intervalo centrado en 0, $J = (-a,a)$ donde $0 < a \leq \infty$. Consideremos también una función $\varphi \in C(J)$, tal que $\varphi > 0$ en J y además $\int_J \varphi(x)dx = 1$. Entonces, extendiendo φ como 0 fuera de J, tenemos que $d\mu(x) = \varphi(x)dx$ define una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$, cuya función de acumulación es

$$\Phi(x) = \mu(-\infty,x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy.$$

Definimos la *φ-simetrización (por la izquierda)* de un conjunto A μ-medible como el intervalo $A^\circ = (-a,\beta)$, donde β se escoge de manera que $\mu(A^\circ) = \mu(A)$, o sea, $\Phi(\beta) = \mu(A)$, o lo que es lo mismo, $\beta = \Phi^{-1}\big(\mu(A)\big)$.

Por otro lado, la *φ-simetrización (por la izquierda)* de una función $u\colon A \subseteq J \to \mathbb{R}$ μ-medible se define como una función $u^\circ\colon A^\circ \subseteq J \to \mathbb{R}$ de manera que satisfaga $\{u^\circ > t\} = \{u > t\}^\circ$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ¿Cómo queda entonces definida u°?

> Ha de ocurrir que $\{u^\circ > t\} = \{u > t\}^\circ = \big(-a,\beta(t)\big)$, donde $\beta(t) = \Phi^{-1}\Big(\mu\{u > t\}\Big)$. Luego si $x < \beta(t)$ entonces debería ser $u^\circ(x) > t$, y por tanto una posible definición sería:
>
> $$u^\circ(x) = \sup\Big\{t : x < \beta(t)\Big\} = \sup\Big\{t : \mu\{u > t\} > \Phi(x)\Big\}.$$

Por otro lado, si $x \geq \beta(t)$ entonces debería ser $u^\circ(x) \leq t$, y así otra posible definición sería:

$$u^\circ(x) = \inf\Big\{t : x \geq \beta(t)\Big\} = \inf\Big\{t : \mu\{u > t\} \leq \Phi(x)\Big\}.$$

Se da el caso de que ambas posibilidades definen una misma función, luego u° se define indistintamente de una u otra manera.

Entre las propiedades que podemos destacar están las siguientes:

(2.1) $\{u^\circ > t\} = \{u > t\}^\circ$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(2.2) u° es decreciente y continua a la derecha en A°.

(2.3) $u < v \quad \Longrightarrow \quad u^\circ < v^\circ$.

(2.4) $u^\circ(x^-) = \inf\Big\{t : \mu\{u \geq t\} < \Phi(x)\Big\} = \sup\Big\{t : \mu\{u \geq t\} \geq \Phi(x)\Big\}$.

(2.5) Si $u_n \to u$ puntualmente, entonces $u_n^\circ \to u$ en todo punto x donde u° es continua, por tanto hay convergencia puntual salvo en un conjunto a lo sumo numerable.

(2.6) Si $u_n \to u$ en casi todo punto, entonces $u_n^\circ \to u$ en casi todo punto también.

Estas dos últimas propiedades parecen ser nuevas, pues en la literatura encontrada acerca de este tipo de convergencia, sólo se menciona que si $u_n \nearrow u$, entonces $u_n^\circ \nearrow u^\circ$; y que, para cualquier u, la sucesión $u_n = \max\{u, (-n)\}$ satisface $u_n^\circ \searrow u^\circ$. Enunciamos a continuación otras propiedades de gran utilidad para el manejo de esta transformación.

(2.7) *φ-simetrización es una transformación equimedible.*
Si $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel y $u\colon A \subseteq J \to \mathbb{R}$ es μ-medible, entonces

$$\int_A G\circ u \, d\mu = \int_{A^\circ} G\circ u^\circ d\mu.$$

En particular, φ-simetrización preserva normas:

$$||u^\circ||_{L^p(d\mu)} = ||u||_{L^p(d\mu)}.$$

(2.8) *φ-simetrización es una transformación no expansiva.*
Si $F\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ es creciente, convexa, con $F(0) = 0$, y $u, v\colon A \subseteq J \to \mathbb{R}$ son μ-medibles, entonces

$$\int_{A^\circ} F\Big(|u^\circ - v^\circ|\Big) d\mu \leq \int_A F\Big(|u - v|\Big) d\mu.$$

En particular,

$$||u^\circ - v^\circ||_{L^p(d\mu)} \leq ||u - v||_{L^p(d\mu)}.$$

(2.9) *Desigualdad de tipo Hardy-Littlewood.*
Si $u, v\colon A \subseteq J \to \mathbb{R}$ son μ-medibles, entonces

$$\int_A uv\, d\mu \leq \int_{A^\circ} u^\circ v^\circ d\mu.$$

La generalidad de este resultado, sin necesidad de imponer condiciones adicionales a u y v, se debe a que estamos trabajando en un espacio de medida finita, y también a las propiedades de convergencia expuestas en (2.5) y (2.6).

También se puede definir el concepto de *φ-simetrización por la derecha.* Si A es μ-medible, entonces su φ-simetrización por la derecha es $A^\bullet = -A^\circ$, y si $u\colon A \subseteq J \to \mathbb{R}$, entonces su φ-simetrización por la derecha es $u^\bullet\colon A^\bullet \subseteq J \to \mathbb{R}$, dada por

$$u^\bullet(x) = u^\circ\big((-x)^-\big).$$

Así resulta que $u^\bullet$ posee similares propiedades que u°, entre ellas, es creciente, continua a la derecha, y se trata de una transformación equimedible no expansiva, que además satisface la siguiente desigualdad de tipo Hardy-Littlewood: Para $u, v\colon J \to \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_J u^\bullet v^\circ d\mu \leq \int_J uv\, d\mu.$$

3. La Propiedad Regularizante

En esta sección continuamos exponiendo propiedades de la φ-simetrización definida en la sección previa. Ahora nos interesa que esta transformación haga decrecer integrales de Dirichlet como ocurre con la simetrización clásica, o sea, nos interesa saber si la φ-simetrización hace "más suave" las funciones o no. En este sentido, usando el teorema de Bolzano, se puede comprobar lo siguiente:

(3.1) Si $I \subseteq J$ es un intervalo de J y $u\colon I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $u^\circ\colon I^\circ \to \mathbb{R}$ es continua.

Pero cuando tratamos de ver si la φ-simetrización reduce módulos de continuidad o constantes de Lipschitz, entonces nos encontramos con la necesidad de pedir una condición más a φ. Veamos cierta motivación:

> Si $I \subseteq J$ es un intervalo de J y $u\colon I \to \mathbb{R}$, definimos el *módulo de continuidad de u* como la siguiente función,
>
> $$\omega(\delta, u) = \sup_{\substack{x,y \in I \\ |x-y|<\delta}} |u(x) - u(y)|, \qquad \delta > 0.$$

Esta función puede ser caracterizada en términos de conjuntos de nivel,

$$\omega(\delta, u) \le \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{u > t + \omega\}_\delta \subseteq \{u > t\} \ \forall t \in \mathbb{R},$$

donde, para un conjunto S y $r > 0$, S_r denota el conjunto de puntos que distan de S menos de r, o sea,

$$S_r = \{x : \operatorname{dist}(x, S) < r\}.$$

Ahora, si queremos que $\omega(\delta, u^\circ) \le \omega(\delta, u)$ para todo $\delta > 0$, entonces esto equivale a decir que $\{u^\circ > t + \omega(\delta, u)\}_\delta \subseteq \{u^\circ > t\}$ para todo $\delta > 0$ y todo $t \in \mathbb{R}$. Esto a su vez es equivalente a que

$$(*) \qquad \left(\{u > t + \omega(\delta, u)\}^\circ\right)_\delta \subseteq \{u > t\}^\circ, \qquad \forall \delta > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien, como siempre se tiene $\omega(\delta, u) \le \omega(\delta, u)$, entonces siempre es cierto que $\{u > t + \omega(\delta, u)\}_\delta \subseteq \{u > t\}$, o equivalentemente,

$$(**) \qquad \left(\{u > t + \omega(\delta, u)\}_\delta\right)^\circ \subseteq \{u > t\}^\circ, \qquad \forall \delta > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Luego $(*)$ se tendrá si, por ejemplo, se da que

$$(***) \qquad \left(\{u > t + \omega(\delta, u)\}^\circ\right)_\delta \subseteq \left(\{u > t + \omega(\delta, u)\}_\delta\right)^\circ, \qquad \forall \delta > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La condición $(***)$ es la que normalmente se ha adoptado para decir que una medida sea regularizante, término usado por Ehrhard [9], o isoperimétrica, término usado por Borell [8].

Definición. Decimos que φ-simetrización es un *proceso regularizante*, o que $d\mu(x) = \varphi(x)dx$ es una *medida regularizante, o isoperimétrica,* si para todo conjunto $A \subseteq J$ μ-medible, y para todo $r > 0$,

$$(\mathcal{R}) \qquad (A^\circ)_r \subseteq (A_r)^\circ.$$

Lo anterior impone como condición suficiente, para que φ-simetrización reduzca módulos de continuidad, que $d\mu(x) = \varphi(x)dx$ sea regularizante. En realidad, es fácil dar ejemplos que muestran que ésta es también una condición necesaria. Así pues, llegamos a tener lo siguiente.

(3.2) $\omega(\delta, u^\circ) \le \omega(\delta, u) \quad \forall \delta > 0, \ \forall u \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu$ es regularizante.

(3.3) $\operatorname{Lip}(u^\circ) \le \operatorname{Lip}(u) \quad \forall u \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu$ es regularizante.

La condición regularizante es también apropiada para que φ-simetrización reduzca integrales de Dirichlet, [11]:

(3.4) Si μ es regularizante, y u es localmente lipschitziana en J, entonces

$$\int_J G\circ u^\circ\, F(|Du^\circ|)\, d\mu \leq \int_J G\circ u\, F((|Du|)\, d\mu,$$

para toda $G\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ medible Borel y toda $F\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ convexa, creciente, con $F(0) = 0$. En particular, haciendo $G = \chi_A$ y $F(x) = x^2$, se tiene

$$\int_{u^{\circ\,-1}(A)} |Du^\circ|^2 d\mu \leq \int_{u^{-1}(A)} |Du|^2 d\mu.$$

Por otro lado, parece posible que también esta propiedad de reducir integrales de Dirichlet implique que la medida con respecto a la cual se realiza la simetrización sea regularizante.

Señalemos por otro lado que una gran cantidad de medidas conocidas satisfacen la propiedad regularizante, entre ellas se incluye la medida de Gauss, o más general, cualquier medida $\varphi(x)dx$ tal que $\log\varphi$ es cóncava. También existen medidas que son no regularizantes. Esto puede verse fácilmente a partir de la caracterización de la clase $\mathcal{W}$ de las medidas regularizantes [7, 12, 5]: $\varphi \in \mathcal{W}$ si, y sólo si, *(i)* φ es simétrica con respecto al punto x_0 con $\Phi(x_0) = \frac{1}{2}$, (ocurre que $x_0 = 0$ si J es finito); y *(ii)* para $\psi = \varphi\circ\Phi^{-1}$, se da

$$\psi(z_2 - z_1) \leq \psi(z_1) + \psi(z_2), \qquad 0 < z_1 < z_2 < 1.$$

4. Resultados de Comparación de Soluciones

A partir de esta sección en adelante, exponemos los resultados obtenidos en el artículo [13], y damos una idea de cómo se demuestran. Como queremos trabajar con soluciones de ecuaciones diferenciales asociadas al operador $\mathcal{A}$, dado por

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{\varphi}D(\varphi D) = -D^2 - \frac{\varphi'}{\varphi}D,$$

para cuando $\varphi(x)dx$ es una medida regularizante, parece conveniente pedir que $\varphi \in \mathcal{C}^1(J)$, y que el espacio base para el operador $\mathcal{A}$ sea el siguiente,

$$\mathcal{F}(J) = \left\{ u\colon J \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} \text{localmente } u \text{ es diferencia de dos funciones convexas,} \\ \text{y además } \varphi Du \text{ es de variación acotada en J} \end{array} \right\}.$$

El pedir que φDu sea una función de variación acotada en J, ($\varphi Du \in \mathrm{BV}(J)$), es una cuestión técnica, la otra condición es para poder interpretar $\mathcal{A}u$ en algún sentido distribucional como una medida de Borel con signo.

Para poder enunciar el resultado principal, hemos de introducir otros operadores:

$$\mathcal{B} = -\varphi D(\frac{1}{\varphi}D) = -D^2 + \frac{\varphi'}{\varphi}D.$$

$$\mathfrak{J}u(y) = \int_{-a}^{y} u(x)d\mu(x).$$

$$u^{\mathcal{I}}(y) = \mathfrak{J}u^{\circ}(y) = \int_{-a}^{y} u^{\circ}(x)d\mu(x) = \sup_{\substack{F \subseteq J \\ \mu(F)=\mu(-a,y)}} \int_F u(x)d\mu(x).$$

Para que el operador $\mathfrak{J}$ pueda aplicarse a u, es necesario que u sea μ-integrable en cada intervalo de la forma $(-a, y)$. Denominamos entonces por $L_{\mathfrak{J}}$ el espacio de funciones integrables en cada intervalo del tipo $(-a, y)$, $y \in J$.

TEOREMA 1. *Supongamos que $u, v \in \mathcal{F}(J)$, $u^{\circ}, v \in L_{\mathfrak{J}}$, y que u, v satisfacen (en un sentido débil) las desigualdades*

$$\mathcal{A}u + cu \leq G\!\circ\! u + \nu, \qquad \mathcal{A}v + c^{\bullet}v \geq G\!\circ\! v + \pi,$$

con las siguientes condiciones de regularidad e integrabilidad de los coeficientes:

$$c \text{ es continua y acotada en } J;\ G \text{ es convexa; y } cu, G\!\circ\! u, G\!\circ\! v, \nu, \pi \in L^1(d\mu);$$
$$\text{si } c \text{ no es constante, entonces ha de ser } u \geq 0;$$
$$\nu^{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{J}\pi;$$
$$\sup_J (G'\!\circ\! u) \leq \inf_J c;$$

además de las siguientes condiciones de frontera:

$$\varphi Du(-a) \geq 0 \geq \varphi Du(a),$$
$$\varphi Dv(-a) \leq 0,$$
$$\limsup_{x \to a^-} \big(u(x) - v(x)\big) \leq 0.$$

Entonces

$$u^{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{J}v.$$

En particular, como $\mathfrak{J}v(y) = \int_{-a}^{y} u(x)d\mu(x) \leq \int_{-a}^{y} u^{\circ}(x)d\mu(x) = v^{\mathcal{I}}(y)$, *entonces*

$$u^{\mathcal{I}} \leq v^{\mathcal{I}}.$$

Destaquemos algunas notas interesantes de este teorema.

(4.1) El sentido en el que debemos entender las desigualdades diferenciales que aparecen en el teorema es el siguiente: Decimos que u satisface la desigualdad $\mathcal{A}u + cu \leq G\!\circ\! u + \nu$ en sentido débil si para toda función no negativa $\zeta \in \mathcal{C}_c^1(J)$ se tiene que

$$\int_J Du\, D\zeta\, d\mu + \int_J c\, u\, \zeta\, d\mu \leq \int_J G\!\circ\! u\, \zeta\, d\mu + \int_J \nu\, \zeta\, d\mu,$$

lo cual entra en perfecto acuerdo con el caso en el que $u \in \mathcal{C}^2(J)$. La otra desigualdad se entiende de forma análoga.

(4.2) La primera consecuencia de este teorema es una estimación integral entre u y v, gracias a que, según Baernstein [3], $u^{\mathcal{I}} \le v^{\mathcal{I}}$ equivale a que

$$\int_J F\big(u(x)\big)\,d\mu(x) \le \int_J F\big(v(x)\big)\,d\mu(x), \ \forall F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ convexa y creciente.}$$

En particular, si u y v son no negativas, entonces $u^{\mathcal{I}} \le v^{\mathcal{I}}$ implica

$$\|u\|_{L^p(d\mu)} \le \|v\|_{L^p(d\mu)}, \qquad 1 \le p \le \infty.$$

(4.3) La siguiente consecuencia que podemos mencionar es un resultado de unicidad de soluciones cuando los coeficientes son "simétricos": Supongamos que $u \in \mathcal{F}(J)$, que $u, u^\circ \in L_{\mathfrak{J}}$, y que u satisface

$$\mathcal{A}u + cu = G\circ u + \nu,$$

donde $c = c^\bullet$ es continua y acotada en $\mathbb{R}$, G es convexa, $cu, G\circ u, \nu \in L^1(d\mu)$, $u \ge 0$ en el supuesto que c no sea constante, $\nu = \nu^\circ$, $\sup_J G'\circ u \le \inf_J c$, $\varphi Du(-a) = 0 \ge \varphi Du(a)$, y $u(a^-)$ existe. Entonces

$$u = u^\circ.$$

La razón por la que este resultado es cierto es que del teorema se deduce que $u^{\mathcal{I}} \le \mathfrak{J}u \le u^{\mathcal{I}}$, o sea,

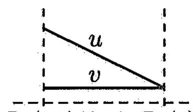
$$\int_{-a}^{y} u(x)\,d\mu(x) = \int_{-a}^{y} u^\circ(x)\,d\mu(x), \qquad y \in J.$$

Luego, derivando, obtenemos $u = u^\circ$.

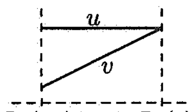
(4.4) En esta nota apuntamos que las condiciones de frontera que aparecen en el teorema son necesarias para que el resultado sea cierto. En efecto, supongamos que $c \equiv G \equiv \nu \equiv \pi \equiv 0$, $\varphi \equiv$ cte, entonces las desigualdades diferenciales son

$$D^2u \ge 0 \qquad\qquad D^2v \le 0,$$

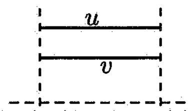
o sea, u es convexa en J, y v es cóncava en J. Los siguientes ejemplos muestran entonces que todas las condiciones de frontera, salvo la que pide $\varphi Du(a) \le 0$, han de ser necesarias:



$Du(-a) \not\geq 0 \geq Du(a)$
$Dv(-a) \leq 0$
$u(a) \leq v(a)$
$u^{\mathcal{I}} > \mathfrak{J}v$

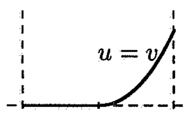


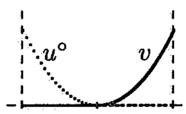
$Du(-a) \geq 0 \geq Du(a)$
$Dv(-a) \not\leq 0$
$u(a) \leq v(a)$
$u^{\mathcal{I}} > \mathfrak{J}v$



$Du(-a) \geq 0 \geq Du(a)$
$Dv(-a) \leq 0$
$u(a) \not\leq v(a)$
$u^{\mathcal{I}} > \mathfrak{J}v$

Para ver que $\varphi Du(a) \leq 0$ es también una condición necesaria, tomamos $c \equiv G \equiv 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}$, $u = v = x^2\chi_{[0,1)}$, y $\nu = \pi = -2\chi_{[0,1)}$, entonces se satisfacen todas las hipótesis del teorema excepto la condición frontera $\varphi Du(a) \leq 0$; de hecho, se tiene $\varphi Du(a) = 1$. Y sin embargo, puede comprobarse que $u^{\mathcal{I}} = \mathfrak{J}u^\circ > \mathfrak{J}v$ en $(-1,1)$.





(4.5) Finalmente decimos que uno puede introducir tiempo en las ecuaciones del teorema, y obtener resultados similares. Las desigualdades diferenciales pasarían a ser:

$$(\partial t + \mathcal{A})u + cu \leq G\circ u + \nu, \qquad (\partial t + \mathcal{A})v + c^\bullet v \geq G\circ v + \pi.$$

5. Cómo Demostramos el Teorema 1

La demostración del teorema 1 se basa principalmente en la obtención de una desigualdad diferencial que enunciamos a continuación, y de la que damos una idea de cómo se prueba en la sección siguiente.

Teorema 2. *Supongamos que $u \in \mathcal{F}(J)$, $u^\circ \in L_{\mathfrak{J}}$, y que u satisface (en sentido débil) la desigualdad $\mathcal{A}u + cu \leq G\circ u + \nu$, con las siguientes condiciones de regularidad e integrabilidad, y de frontera:*

c es continua y acotada en J; G es continua; y $cu, G\circ u, G\circ v, \nu, \pi \in L^1(d\mu)$;
si c no es constante, entonces ha de ser $u \geq 0$;
$$\varphi Du(-a) \geq 0 \geq \varphi Du(a).$$

Entonces la siguiente desigualdad es cierta (en sentido débil):

$$\mathcal{B}u^{\mathcal{I}} + \mathfrak{J}(c^\bullet u^\circ) \leq \mathfrak{J}(G\circ u^\circ) + \nu^{\mathcal{I}}.$$

Volviendo a la demostración del teorema 1, aplicamos el operador $\mathfrak{J}$ a la desigualdad $\mathcal{A}v + c^\bullet v \geq G_\circ v + \pi$, y obtenemos $\mathfrak{J}\mathcal{A}v + \mathfrak{J}(c^\bullet v) \geq \mathfrak{J}(G_\circ v) + \mathfrak{J}\pi$. Ahora, usando que $\varphi Dv(-a) \leq 0$, se llega a que $\mathfrak{J}\mathcal{A}v \leq \mathcal{B}\mathfrak{J}v$. De aquí obtenemos una desigualdad diferencial similar a la del teorema 2, pero para v,

$$\mathcal{B}\mathfrak{J}v + \mathfrak{J}(c^\bullet v) \geq \mathfrak{J}(G_\circ v) + \mathfrak{J}\pi.$$

Juntando estas dos desigualdades, y usando que $\nu^{\mathcal{I}} \leq \mathfrak{J}\pi$, obtenemos la siguiente relación para $w = u^{\mathcal{I}} - \mathfrak{J}v$,

$$(*) \qquad \mathcal{B}w \leq \mathfrak{J}\big((G_\circ u^\circ - G_\circ v) - c^\bullet(u^\circ - v)\big).$$

Nuestra intención es probar que $w \leq 0$. Para $\varepsilon > 0$, consideramos $w_\varepsilon = w - 3\varepsilon\Phi + \frac{1}{2}\varepsilon\Phi^2$. Observemos que si $w_\varepsilon \not\leq 0$, entonces existe $s_0 \in [-a, a]$ tal que

$$w_\varepsilon(s_0) = \sup_{s\in J} w(s) > 0.$$

Ahora bien, $s_0 \neq -a$ pues $w_\varepsilon(-a) = 0$. También ha de ser $s_0 \neq a$ pues la condición $\limsup_{x\to a^-}\big(u(x) - v(x)\big) \leq 0$ lo impide. Así que debería ser $s_0 \in J$, pero esto también es imposible, pues con la ayuda de la desigualdad $(*)$, que G es convexa y que $\sup_J G_\circ u \leq inf_J c$, obtendríamos algo parecido a que w_ε alcanza el máximo en un punto interior y su segunda derivada es positiva. Todo esto nos muestra que ha de ser $w_\varepsilon \leq 0$ para todo $\varepsilon > 0$, y consecuentemente $w \leq 0$. □

6. Cómo Demostramos el Teorema 2

La demostración del teorema 2 pasa por un proceso de aproximación, cuyos detalles omitimos en esta exposición, refiriéndonos al artículo [13]. Sin embargo podemos decir que la idea básica surge cuando consideramos $u \in \mathcal{C}^2(J) \cap \mathcal{F}(J)$, y solamente tiene un número finito de puntos críticos.

En este caso, $\mu\{u = t\} = \mu\{u^\circ = t\} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica que u° es continua y estrictamente decreciente en J. Por otro lado, fijado $t \in u(J)$, de manera que t no sea un valor crítico, podemos escribir

$$\mu\{u > t\} = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i),$$

donde $u(a_i) = u(b_i) = t$, salvo quizás en el caso en que $u(-a) > t$ ($\Longrightarrow$ $a_1 = -a$), ó $u(a) > t$ ($\Longrightarrow$ $b_n = a$). Además, haciendo uso de que $\varphi Du(-a) \geq 0 \geq \varphi Du(a)$ si es necesario, también tenemos que $\varphi Du(a_i) \geq 0 \geq \varphi Du(b_i)$ es cierto para todo $i = 1, \ldots, n$.

Cuando se trabaja con desigualdades diferenciales es habitual analizar la expresión del tipo $\int_{\{u>t\}} \mathcal{A}u(x)d\mu(x)$. Haciendo esto, obtenemos

$$\int_{\{u>t\}} \mathcal{A}u(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi Du(a_i) - \varphi Du(b_i) \geq \sum_{u(x)=t} |\varphi Du(x)|.$$

Ahora, si x es tal que $u(x) = t$ y $\varphi Du(x) > 0$, entonces, en un entorno de x, u es estrictamente creciente. Así que llamando $\tilde{u}$ a la restricción de u sobre este entorno de x, haciendo uso del Primer Teorema Fundamental del Cálculo y de un cambio de variables, obtenemos

$$\begin{aligned} |\varphi Du(x)| &= \varphi D\tilde{u}(x) = \varphi D\tilde{u}\left(\tilde{u}^{-1}(t)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \varphi D\tilde{u}\left(\tilde{u}^{-1}(s)\right) ds \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\tilde{u}^{-1}(t-\varepsilon)}^{\tilde{u}^{-1}(t+\varepsilon)} \varphi D\tilde{u}(x) D\tilde{u}(x) dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{t-\varepsilon<\tilde{u}<t+\varepsilon\}} |D\tilde{u}|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Algo análogo se obtiene cuando $u(x) = t$ y $\varphi Du(x) < 0$. Luego todo junto nos da

$$\sum_{u(x)=t} |\varphi Du(x)| = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{t-\varepsilon<u<t+\varepsilon\}} |Du(x)|^2 d\mu(x)$$

Esta expresión nos apunta que debemos utilizar el hecho de que φ-simetrización reduce integrales de Dirichlet. Así que utilizando este hecho, y después volviendo sobre nuestros pasos con u°,

$$\begin{aligned} \sum_{u(x)=t} |\varphi Du(x)| &\geq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{t-\varepsilon<u^\circ<t+\varepsilon\}} |Du^\circ(x)|^2 d\mu(x) \\ &= \cdots = \left|\varphi Du^\circ\left(u^{\circ^{-1}}(t)\right)\right| = -\varphi Du^\circ\left(u^{\circ^{-1}}(t)\right) \\ &= -\varphi D\Big(\frac{1}{\varphi} D \int_{-a}^{\odot} u^\circ(x)\varphi(x)dx\Big)\left(u^{\circ^{-1}}(t)\right) \\ &= \mathcal{B}\mathfrak{J}u^\circ\left(u^{\circ^{-1}}(t)\right) = \mathcal{B}u^{\mathcal{I}}\left(u^{\circ^{-1}}(t)\right). \end{aligned}$$

Todo esto nos dice que si $y \in J$ es tal que $u^\circ(y)$ no es un valor crítico, entonces, llamando $\xi = \chi_{(-\infty,y)}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}u^{\mathcal{I}}(y) &\leq \int_{\{u>u^\circ(y)\}} \mathcal{A}u\, d\mu = \int_J \mathcal{A}u\, \xi_\circ u^{\circ^{-1}}{}_\circ u\, d\mu \\ &\leq \int_J G_\circ u\, \xi_\circ u^{\circ^{-1}}{}_\circ u\, d\mu + \int_J \nu\, \xi_\circ u^{\circ^{-1}}{}_\circ u\, d\mu - \int_J c\, u\, \xi_\circ u^{\circ^{-1}}{}_\circ u\, d\mu. \end{aligned}$$

Ahora, usando la equimedibilidad de φ-simetrización,

$$\int_J G_\circ u\, \xi_\circ u^{\circ^{-1}}{}_\circ u\, d\mu = \int_J G_\circ u^\circ\, \xi_\circ u^{\circ^{-1}}{}_\circ u^\circ\, d\mu = \int_{-a}^{y} G_\circ u^\circ\, d\mu = \mathfrak{J}\left(G_\circ u^\circ\right)(y).$$

También, debido a que $\mu\{u > u^\circ(y)\} = \mu\{u^\circ > u^\circ(y)\} = \mu(-a, y)$,

$$\int_J \nu\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u\, d\mu = \int_{\{u>u^\circ(y)\}} \nu\, d\mu \leq \sup_{\substack{F\subseteq J\\ \mu(F)=\mu(-a,y)}} \int_F \nu\, d\mu = \nu^{\mathcal{I}}(y).$$

Por tanto, sólo nos queda considerar el sumando $\int_J c\, u\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u\, d\mu$. Observemos que si c es constante entonces $c = c^\bullet$, luego por la equimedibilidad de φ-simetrización,

$$\int_J c\, u\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u\, d\mu = c^\bullet \int_J u^\circ\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u^\circ\, d\mu = \int_{-a}^{y} c^\bullet\, u^\circ\, d\mu = \mathfrak{J}\big(c^\bullet u^\circ\big)\,(y).$$

Por otro lado, si c no es constante, entonces, por hipótesis, es $u \geq 0$, en cuyo caso se tiene $(u\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u)^\circ = u^\circ\, \xi$, ya que $u^\circ\, \xi$ es decreciente (pues $u \geq 0$) y además

$$\begin{aligned}
\mu\{u\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u > \sigma\} &= \mu\Big(\{u > \sigma\} \cap \{u > u^\circ(y)\}\Big)\\
&= \mu\Big(\{u^\circ > \sigma\} \cap \{u^\circ > u^\circ(y)\}\Big)\\
&= \mu\Big(\{u^\circ > \sigma\} \cap (-\infty, y)\Big) = \mu\{u^\circ\, \xi > \sigma\}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de la desigualdad de tipo Hardy-Littlewood, obtenemos

$$\int_J c\, u\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u\, d\mu \geq \int_J c^\bullet\, (u\, \xi\circ u^{\circ\,-1}\circ u)^\circ\, d\mu = \int_{-a}^{y} c^\bullet\, u^\circ\, d\mu = \mathfrak{J}\big(c^\bullet u^\circ\big)\,(y).$$

Juntando todo esto, concluímos lo que queríamos,

$$\mathcal{B}u^{\mathcal{I}}(y) \leq \mathfrak{J}\big(G\circ u^\circ\big)(y) + \nu^{\mathcal{I}}(y) - \mathfrak{J}\big(c^\bullet u^\circ\big)(y). \quad \square$$

Referencias

[1] A. Alvino, P.-L. Lions, y G. Trombetti, *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization*, Ann. Inst. Henri Poincaré **7** (1990), 37–65.

[2] ———, *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization: A new approach*, Differential and Integral Equations **4** (1991), 25–50.

[3] A. Baernstein II, *Integral means, univalent functions and circular symmetrization*, Acta Math **133** (1974), 139–169.

[4] ———, *A unified approach to symmetrization*, Partial Differential Equations of Elliptic Type (A. Alvino et al., eds.), Symposia Mathematica, vol. 35, Cambridge Univ. Press, 1994, pp. 47–91.

[5] S.G. Bobkov y C. Houdré, *Some connections between Sobolev-type inequalities and isoperimetry*, Mem. Amer. Math. Soc. **129** (1997), no. 616, viii + 111 pp.

[6] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. **30** (1975), 207–216.

[7] ———, *Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process*, Z. Wahr. verw. Geb. **70** (1985), 1–13.

[8] ———, *Intrinsic bounds on some real-valued stationary random functions*, Probability in Banach Spaces V; Proceedings, Medford 1984 (A. Beck et al., eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1153, Springer-Verlag, 1985, pp. 70–95.

[9] A. Ehrhard, *Symétrization dans l'espace de Gauss*, Math. Scand. **53** (1983), 281–301.

[10] ———, *Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4$^{\underline{e}}$ série **17** (1984), 317–332.

[11] J.B. Epperson, *A class of monotone decreasing rearrangements*, J. Math. Anal. Appl. **150** (1990), 224–236.

[12] C. González, *Differential inequalities associated with weighted symmetrization processes on the real line*, Ph.D. thesis, Wash. Univ. in St. Louis, 1996.

[13] ———, *Differential inequalities associated with weighted symmetrization processes on the real line*, J. d'Analyse Math. (Aparecerá).

[14] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353–372.

[15] ———, *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4) **3** (1976), 697–718.

Correo electrónico: `gonzalez@anamat.cie.uma.es`

DEPT. ANÁLISIS MATEMÁTICO, FAC. CIENCIAS, UNIV. MÁLAGA, 29071 MÁLAGA.

Números anteriores

1 **Luigi Grasselli,** Crystallizations and other manifold representations.
2 **Ricardo Piergallini,** Manifolds as branched covers of spheres.
3 **Gareth Jones,** Enumerating regular maps and hypermaps.
4 **J. C. Ferrando and M. López-Pellicer,** Barrelled spaces of class N and of class χ_0.
5 **Pedro Morales,** Nuevos resultados en Teoría de la medida no conmutativa.
6 **Tomasz Natkaniec,** Algebraic structures generated by some families of real functions.
7 **Gonzalo Riera,** Algebras of Riemann matrices and the problem of units.
8 **Lynne D. James,** Representations of Maps.
9 **Grzegorz Gromadzki,** On supersoluble groups acting on Klein surfaces.
10 **María Teresa Lozano,** Flujos en 3 variedades.
11 **P. Morales y F. García Mazario,** Medidas sobre proyecciones en anillos estrellados de Baer.
12 **L. Grasselli and M. Mulazzani,** Generalized lins-mandel spaces and branched coverings of S^3.
13 **V. F. Mazurovskii,** Rigid isotopies of real projective configurations.
14 **R. Cantó,** Properties of the singular graph of nonnegative matrices.
15 **M. B. S. Laporta,** A short intervals result for linear equations in two prime variables.
16 **D. Girela,** El teorema grande de Picard a partir de un método de J. Lewis basado en las desigualdades de Hardnack.
17 **L. Ribes,** Grupos separables con respecto a conjugación.
18 **P. A. Zalesskii,** Virtually free pro-p groups.
19 **S. M. Natanzon,** Fuchsian groups and uniformization of Hurwitz spaces.
20 **M. Izquierdo,** On the fixed-point set of an automorphism of a closed nonorientable surface.
21 **J. M. Ansemil,** Algunos resultados sobre espacios de funciones holomorfas.
22 **J. F. Fernando Galván,** Triángulos racionales con grupo de reflexiones discreto.