UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

# DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

17

**LUIS RIBES**

## GRUPOS SEPARABLES CON RESPECTO A CONJUGACIÓN

GRUPOS SEPARABLES CON RESPECTO A CONJUGACION

Luis Ribes
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ont., Canada K1S 5B6
lribes@math.carleton.ca

## 1. Introducción

Sean $A$ y $B$ dos matrices invertibles $n \times n$ sobre un cuerpo $K$. Podemos considerar a estas matrices como representantes de automorfismos lineales de un espacio vectorial $V$ de dimensión $n$ sobre $K$, con respecto a ciertas bases de $V$. Entonces $A$ y $B$ representan el mismo automorfismo si son semejantes, o, con la terminología que utilizaremos mas adelante, si son 'conjugadas'. El recíproco también es válido. Expresemos ésto de manera equivalente: supongamos que $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$ (el grupo general lineal de grado $n$); entonces $A$ y $B$ representan el mismo automorfismo lineal de $V$ (con respecto a dos bases) si y solo si existe una matriz $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ de manera que $B = T^{-1}AT$.

Consideremos ahora una situación mas general. Sea $G$ un grupo, y sean $a$ y $b$ elementos de $G$. Decimos que $a$ y $b$ son *conjugados* en $G$ si existe un elemento $t \in G$ tal que $b = t^{-1}at$. En este artículo investigararemos el siguiente problema.

Dado un grupo $G$ ?'existe un algoritmo para decidir si dos cualesquiera de sus elementos son conjugados? Este es uno de los problemas clásicos en la teoría de grupos (infinitos). Fue planteado por Dehn [Dehn 11] a principios del siglo XX, en relación con los grupos fundamentales de superficies. En el presente artículo nos conformaremos con algo menos ambicioso: buscar ejemplos de grupos para los que un tal algoritmo existe. Observemos que en los grupos de la forma $\mathrm{GL}_n(K)$ existe un tal algoritmo: si $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$, entonces $A$ y $B$ son conjugadas si y solo si tienen la misma forma racional canónica. Si un grupo $G$ es finito, evidentemente existe un procedimiento para decidir si dos elementos $a$ y $b$ de $G$ son conjugados: simplemente calculemos todos los productos $t^{-1}at$, para cada $t \in G$, y comprobemos si alguno de ellos es $b$. Este es, desde luego, un algoritmo poco elegante, pero como contrapartida, es completamente general. De hecho, este es el punto de partida de los resultados que expondremos en este artículo: adoptamos el punto de vista de que encontrar un algoritmo para determinar si en un grupo $G$ dos elementos son conjugados, es un problema trivial si el grupo es finito; y nuestro objetivo es buscar grupos $G$ para los que decidir si dos elementos de $G$ son conjugados es algo que se puede averiguar mediante una reducción del problema a grupos finitos que están relacionados con $G$. Para hacer esta idea mas transparente necesitamos una definición. **Definición** *Decimos que un grupo $G$ es separable con respecto a conjugación, o, de forma mas breve, $G$ es sc, si siempre que $a, b \in G$, y $a$ y $b$ no son conjugados en $G$ se tiene que existe un cociente finito $G/N$ de $G$, de manera que las imágenes de $a$ y $b$ en $G/N$ no son conjugadas en $G/N$.*

Dicho de otra forma, $G$ es *sc* si para todo $a, b \in G$, los elementos $a$ y $b$ son conjugados en $G$ si y solo si, sus imáges en los cocientes finitos de $G$ son conjugadas. Si un grupo $G$ es *sc*, está claramente muy cerca de los grupos que buscamos (aquellos para los que existe un algoritmo que decida si dos cualesquiera de sus elementos son conjugados; en la terminología de Dehn, grupos para los que *el problema de la conjugación es resoluble*). El próximo teorema hace esta idea mas precisa. Recordemos que un grupo $G$ admite un presentación finita si tiene la forma $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$.

**Teorema 1.1** ([Mal'cev 58], [Mostowski 66]) *Si un grupo tiene una presentación finita y es separable con respecto a conjugación, entonces el problema de la conjugación es resoluble en ese grupo (es decir, existe un algoritmo para decidir si dos cualesquiera de los elementos del grupo son conjugados).*

La próxima sección contiene los ejemplos básicos de grupos *sc*. Dedicaremos el resto del artículo a mostrar métodos para construir nuevos grupos separable con respecto a conjugación.

## 2. Ejemplos de Grupos Separable con Respecto a Conjugación

Se dice que un grupo $G$ es *virtualmente libre* si es una extensión finita de un grupo libre, es decir, si $G$ contiene un subgrupo normal de índice finito que es libre.

**Teorema 2.1** [Baumslag 65], [Dyer 79] *Todo grupo virtualmente libre es separable con respecto a conjugación.*

Se dice que un grupo $G$ es *policíclico* si admite una serie finita

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{1\}$$

tal que cada cociente $G_i/G_{i+1}$ sea cíclico. Por ejemplo, todo grupo abeliano (o, mas general, nilpotente) finitamente generado es policíclico. El grupo $G$ es *virtualmente policíclico* si contiene un subgrupo normal de índice finito que es policíclico.

**Teorema 2.2** ([Remeslennikov 69], [Formanek 76]) *Los grupos virtualmente policíclicos son separable con respecto a conjugación.*

Si $G_1$ y $G_2$ son dos grupos, su *producto libre* $G_1 * G_2$ es un grupo cuyos elementos son 'productos formales' $x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G_1$ and $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G_2$; la multiplicación en $G_1 * G_2$ se hace concatenando estos 'productos formales', y utilizando las operaciones en $G_1$ y en $G_2$ siempre que se sea factible. (Para una definición mas precisa se puede consultar [Lyndon-Schupp 77], por ejemplo.)

**Teorema 2.3** [Remeslennikov 71] *El producto libre de dos grupos separables con respecto a conjugación es también separable con respecto a conjugación.*

Estos tres teoremas permiten construir bastantes ejemplos de grupos *sc*. Para ampliar nuestro conocimiento de los grupos *sc*, C. Y. Tang conjeturó hace tiempo otra forma de construir nuevos grupos *sc* basada en los productos libres amalgamados. Sea $H$ un subgrupo de un grupo $G_1$ y también de un grupo $G_2$. Recordemos que el *producto libre amalgamado* $G_1 *_H G_2$ de $G_1$ y $G_2$ amalgamando $H$, se construye identificando en el producto libre $G_1 * G_2$ cada elemento $h \in H$ como elemento de $G_1$ con el correspondiente $h$ como elemento de $G_2$ (cf. [Lyndon-Schupp 77]).

**Pregunta/Conjetura de C. Y. Tang** [Kourovka Notebook 82]. *?'Es el producto libre*

$$G_1 *_H G_2$$

*de dos grupos policíclicos $G_1$ y $G_2$ amalgamando un subgrupo cíclico $H$, separable con respecto a conjugación?*

El siguiente resultado contiene una respuesta positiva a esta conjetura, y proporciona una gran cantidad de grupos que son *sc*.

**Teorema 2.4** [Ribes-Segal-Zalesskii 98] *Definamos de manera recursiva una sucesión $\chi_1, \chi_2, \ldots$ de clases de grupos:*

*$\chi_1$ es la clase de todos los grupos que son bien virtualmente libres o bien virtualmente policíclicos. Si $i > 1$ y las clases $\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}$ ya se han definido, entonces $\chi_i$ consiste en todos los grupos de la forma*

$$G_1 *_H G_2,$$

*donde $G_1, G_2 \in \chi_{i-1}$ y $H$ es un subgrupo cíclico de $G_1$ y $G_2$. Entonces cualquier grupo en la clase*

$$\chi' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \chi_i$$

*es separable con respecto a conjugación.*

Este teorema es consecuencia de dos resultados mas generales. Para poder enunciarlos necesitamos primero introducir cierta terminología. Este es el tema de la siguiente sección.

## 3. La Topología Profinita de un Grupo

Dado un grupo $G$, consideremos la colección $\mathcal{N}$ de todos sus subgrupos normales $N$ de índice finito. Entonces $G$ se convierte en un grupo topológico si imponemos que $\mathcal{N}$ sea una base fundamental de entornos del elemento identidad 1 de $G$. Esta es la llamada *topología profinita* de $G$. La compleción con respecto a esta topología

$$\widehat{G} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$$

es un grupo topológico compacto, Hausdorff y totalmente discontinuo, es decir un *grupo profinito*, y se denomina la *compleción profinita* de $G$.

Observemos que existe un homomorfismo canónico

$$\iota : G \longrightarrow \widehat{G}.$$

Este homomorfismo es una inyección si y solo si $G$ es *residualmente finito*, es decir si y solo si

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = 1.$$

Denotemos la clase de conjugación de un elemento $x \in G$ mediante

$$x^G = \{g^1 x g \mid g \in G.$$

Entonces es fácil traducir a una terminología topológica el concepto de separabilidad con respecto a conjugación:

**Lema 3.1** *Un grupo $G$ es separable con respecto a conjugación si y solo si las clases de conjugación de $G$ son conjuntos cerrados en la topología profinita de $G$.*

La siguiente observación es igualmente sencilla de verificar:

**Lema 3.2** *Si un grupo $G$ es separable con respecto a conjugación, entonces es residualmente finito o, lo que es lo mismo, la topología profinita de $G$ es Hausdorff.*

Aunque ésta es una afirmación casi obvia, nos proporciona una primera advertencia de que demostrar que un grupo es *sc*, no será, en general, una tarea sencilla. Se sabe de antiguo que el problema de averiguar si un producto libre amalgamado es residualmente finito ofrece bastantes escollos (véase, e.g., [Baumslag 63]).

Se dice que un grupo $R$ es *casi-potente* si todo subgrupo cíclico $H$ de $R$ contiene un subgrupo $K$, de manera que los subgrupos de índice finito en $K$ tienen la forma $H \cap N$ para algún subgrupo normal $N$ de $G$ de índice finito. Una consecuencia, mas intuitiva, de concepto de 'casi-potencia' es la siguiente: la topología profinita de $G$ induce en cada subgrupo cíclico $H$ su propia topología profinita. El próximo lema nos proporciona una gran colección de ejemplos de grupos casi-potentes.

**Lema 3.3** *Todo grupo virtualmente libre o virtualmente policíclico es casi-potente.*

## 4. Dos Resultados Fundamentales

En esta sección enunciamos los dos teoremas que mencionábamos mas arriba. Necesitamos primero definir una cierta clase de grupos que, en un principio, puede parecer excesivamente restringida. Sin embargo, es precisamente la adecuada elección de las propiedades que definen a esta clase lo que nos permite obtener unos resultados lo suficientemente amplios como para conseguir una demostración del Teorema 2.4. Un primer intento de demostrar la conjetura de Tang aparece en [Ribes-Zalesskii 96]. El teorema central de ese artículo demuestra que la conjetura de Tang es correcta si en vez de grupos policíclicos nos limitamos a grupos finitamente generados que sean virtualmente nilpotentes. La clase $\chi$ que definimos a continuación refleja las propiedades que aparecen en la demostración de ese teorema.

*La clase $\chi$*

Por definición $\chi$ es la clase de todos los grupos $R$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $R$ separable con respecto a conjugación. (ii) $R$ es casi-potente. (iii) Si $A$ y $B$ son subgrupos cíclicos de $R$, entonces el conjunto $AB$ es cerrado en la topología profinita de $R$; o, de manera equivalente, si $x \in R - AB$, existe un subgrupo normal de índice finito en $R$ tal que $x \notin ABN$. (iv) Si $A$ es un subgrupo cíclico de $R$ y $x$ es un elemento de $R$ con $x^R \cap A = \emptyset$ (es decir, $A$ no contiene ninguno de los conjugados de $x$ en $R$), entonces $x^{\widehat{R}} \cap \bar{A} = \emptyset$ [aquí identificamos a $R$ con su imagen canónica en $\widehat{R}$; y $\bar{A}$ denota la clausura de $A$ en $\widehat{R}$]. (v) Si $A$ y $B$ son subgrupos cíclicos de $R$ y $A \cap B = 1$, entonces $\bar{A} \cap \bar{B} = 1$ en $\widehat{R}$. (vi) Si $r \in R$ es un elemento de orden infinito, y $\gamma \in \widehat{R}$ normaliza a $\overline{\langle r \rangle}$, es decir si $\gamma \langle r \rangle \gamma^{-1} = \langle r \rangle$, entonces bien $\gamma r \gamma^{-1} = r$ o bien $\gamma r \gamma^{-1} = r^{-1}$.

Los siguiente teoremas justifican y explican la importancia de la clase $\chi$. El primero establece que la clase $\chi$ es cerrada con respecto a la formación de productos libres amalgamando subgrupos cíclicos. Y el segundo proporciona una gran variedad de grupos que pertecen a la clase $\chi$.

**Teorema 4.1** *Consideremos dos grupos $G_1$ y $G_2$ en $\chi$. Supongamos que $H$ sea un subgrupo cíclico común a $G_1$ y $G_2$. Entonces $G_1 *_H G_2 \in \chi$.*

**Teorema 4.2** *La clase $\chi$ contiene a*

*i) Todos los grupos virtualmente libres;*
*ii) Todos los grupos virtualmente policíclicos;*
*iii) Todos los grupos Fuchsianos;*
*iv) Todos los grupos de superficies.*

Notemos que el Teorema 2.4 se sigue inmediatamente de estos dos resultados.

Para hacer esta exposición lo mas completa posible, recordaremos las definiciones de grupos Fuchsiano y grupo de superficies. Lo mas útil para nosotros es dar una definición en términos de presentaciones.

Un grupo Fuchsiano admite una presentación del siguiente tipo:

$$\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, c_1, \ldots, c_n \mid$$

$$c_1^{e_1} = \cdots = c_n^{e_n} = 1, \quad c_1 \cdots c_n \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \rangle,$$

$\ni$ *dondecadae*$_i$ es bien un número natural mayor o igual a 2, o bien $\infty$.

Por tanto, un grupo Fuchsiano es un producto libre de un grupo que es un producto libre de grupos cíclicos, y de un grupo libre amalgamando un subgrupo cíclico.

Un grupo de superficies admite una presentación de uno de los tipos siguientes:

$$\langle s_1, \ldots, s_r, v_1, \ldots, v_k \mid \prod_{i=1}^{r} s_i \prod_{i=1}^{k} v_i^2 \rangle \qquad (k > 0)$$

$\ni o$

$$\langle s_1, \ldots, s_r, t_1, u_1, \ldots, t_g, u_g \mid \prod_{i=1}^{r} s_i \prod_{i=1}^{g} [t_i, u_i] \rangle$$

Por consiguiente, un grupo de superficies es un producto libre de dos grupos libres amalgamando un subgrupo cíclico.

Vemos pues que, en realidad, las dos últimas partes del Teorema 4.2 son consecuencias inmediatas del Teorema 4.1 y de las partes i) y ii) del Teorema 4.2.

## 5. Los Métodos de Demostración

La herramienta básica en las demostraciones de estos teoremas es la teoría de grupos que operan sobre árboles. Los árboles que utilizamos son de dos tipos: por una parte árboles en el sentido habitual (lo que llamamos árboles abstractos, es decir, grafos conexos y sin circuitos), y por otra, árboles profinitos (éstos son ciertos grafos en los que los conjuntos de vértices y de aristas tienen una topología compacta, Hausdorff y totalmente discontinua; para una definición precisa véase [Gildenhuys-Ribes 78] o el libro de próxima aparición [Ribes-Zalesskii 99]).

Consideremos un producto libre amalgamado

$$G = G_1 *_H G_2$$

$\ni$ *degruposabstractos*$G_1$ and $G_2$ amalgamando un subgrupo común $H$. Denotemos mediante $\mathbf{S}(G)$ el árbol (orientado) asociado canónicamente a esta construcción. Recordemos la definición de este árbol:

VERTICES $\quad V(\mathbf{S}(G)) = G/G_1 \cup G/G_2$

EDGES $\quad E(\mathbf{S}(G)) = G/H$

FUNCIONES DE INCIDENCIA $\quad d_i(gH) = gG_i \quad (i = 1, 2).$

Supongamos ahora que tenemos la construcción análoga en la categoría de grupos profinitos: sea

$$\Gamma = \Gamma_1 \amalg_\Delta \Gamma_2$$

$\ni$ *unproductolibrededosgrupos*$profinitos\Gamma_1$ and $\Gamma_2$ amalgamando un subgrupo cerrado común $\Delta$ (exigiremos además que los homomorfismos canónicos $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma$ $(i = 1, 2)$, sean inyecciones; este requisito se cumple automáticamente en el caso de grupos abstractos, pero no en el caso de grupos profinitos: véase [Ribes 71]). Asociado con esta construcción existe un un grafo profinito (orientado):

VERTICES $\quad V(\mathbf{S}(\Gamma)) = \Gamma/\Gamma_1 \cup \Gamma/\Gamma_2$

ARISTAS $\quad E(\mathbf{S}(\Gamma)) = \Gamma/\Delta$

FUNCIONES DE INCIDENCIA $\quad d_i(\gamma\Delta) = \gamma\Gamma_i \quad (i = 1, 2).$

De hecho $\mathbf{S}(\Gamma)$ es un árbol profinito.

Para las demostraciones de los resultados que nos incumben aquí, queremos que $\Gamma_i$ sea la compleción profinita de $G_i$, es decir, $\Gamma_i = \widehat{G}_i$, $(i = 1, 2)$ y $\Delta$ de $H$. Bajo ciertas condiciones resulta que si $G = G_1 *_H G_2$ , entonces

$$\widehat{G} = \widehat{G}_1 *_{\widehat{H}} \widehat{G}_2.$$

Esto implica que el árbol abstracto $\mathbf{S}(G)$ aparece de forma natural como un subárbol (denso) del árbol profinito $\mathbf{S}(\widehat{G})$. Eso nos permite trasladar las propiedades de grupos a propiedades de estos árboles y, con un poco de trabajo, obtener demostraciones de los resultados expuestos en esta nota. (Para mas detalles se puede consultar el artículo [Ribes-Segal-Zalesskii 98].

## BIBLIOGRAFIA


[Baumslag 63] G. Baumslag, On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963) 193-209.

[Baumslag 65] G. Baumslag, Residual nilpotency and relations in free groups, J. Algebra **2** (1965) 271-282.

[Dehn 11] M. Dehn, Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, Math. Ann. **71** (1911) 116-144. [Dyer 79] J. L. Dyer, Separating conjugates in free-by-finite groups, J. London Math. Soc. (2) **20** (1979) 35-51.

[Formanek 76] E. Formanek, Conjugacy separability in polycyclic groups, J. Algebra, **42** (1976) 1-10. [Gildenhuys-Ribes 78] D. Gildenhuys y L. Ribes, Profinite groups and Boolean graphs, J. Pure Appl. Algebra **12** (1978) 21-47.

[Kourovka Notebook 82] Kourovka Notebook, Unsolved Problems in Group Theory, 8th edition, Acad. Science USSR, Novosibirsk 1982.

[Lyndon-Schupp 77] R. Lyndon y P. E. Schupp, Combinatorial Group Theory, Springer 1977, Berlin.

[Mal'cev 58] A. I. Mal'cev, On the homomorphisms onto finite groups, Uchen. Zap. Ivanovskogo Gos. Ped. Inst. **18**(1958) 49-60. [Mostowski 66] A. W. Mostowski, On the decidability of some problems in special classes of groups, Fund. Math. **59** (1966) 123-135.

[Remeslennikov 69] V. N. Remeslennikov, Conjugacy in polycyclic groups, Algebra and Logic, **8** (1969) 404-411. [Remeslennikov 71] V. N. Remeslennikov, Groups that are residually finite with respect to conjugacy, Siberian J. Math. **12** (1971) 783-792.

[Ribes 71] L. Ribes, On amalgamated products of profinite groups, Math. Zeits., **123** (1971) 357-364. [Ribes-Zalesskii 96] L. Ribes y P. A. Zalesskii, Conjugacy separability of amalgamated products of groups, J. Algebra **179** (1996) 751-774.

[Ribes-Zalesskii 99] L. Ribes y P. A. Zalesskii, Profinite Groups, próxima aparición. [Ribes-Segal-Zalesskii 98] L. Ribes, D. Segal y P. A. Zalesski, J. London Math. Soc., próxima aparición.