UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

16

D. DANIEL GIRELA

EL TEOREMA GRANDE DE PICARD A PARTIR DE UN MÉTODO DE J. LEWIS BASADO EN LAS DESIGUALDADES DE HARNACK

EL TEOREMA GRANDE DE PICARD A PARTIR DE UN MÉTODO DE J. LEWIS BASADO EN LAS DESIGUALDADES DE HARNACK

Daniel Girela
Análisis Matemático, Facultad de Ciencias,
Universidad de Málaga, 29071 Málaga, Spain

1. Introducción.

En 1879 Émile Picard probó que una función entera y no constante omite como máximo un valor complejo. A este resultado es al que hoy día se conoce como **"El Teorema (pequeño) de Picard".** Existe un resultado más fuerte:

Una función entera que no es polinómica toma todo valor complejo, con como máximo una excepción, infinitas veces.

Este último resultado es en realidad cierto en una situación local. Se tiene:

El Teorema Grande de Picard. *Sea z_0 un punto de la esfera. Sea f una función holomorfa en un entorno perforado de z_0 y con una singularidad esencial en z_0. Entonces en cada entorno de z_0 la función f toma todo valor complejo, con como máximo una excepción, infinitas veces.*

Se conocen bastantes demostraciones distintas de los teoremas de Picard. Así, pueden probarse:

(i) Utilizando la función modular ([9, Vol. II, p. 220 y p. 258]).

(ii) Utilizando los teoremas de Bloch y Schottky (véase el capítulo XII de [4]).

(iii) A partir de una generalización del Lema de Schwarz debida a Ahlfors utilizando "métricas ultrahiperbólicas"(véase el capítulo 1 de [2]).

(iv) Como consecuencia del "Segundo Teorema Fundamental de la Teoría de Nevanlinna"(véase [9], [10], [11]).

(v) Utilizando resultados de Probabilidad [5], [6].

Este trabajo está subvencionado en parte por una ayuda del Ministerio de Educación y Cultura y otra de la Junta de Andalucía.

En [12] Rickman probó un análogo del teorema pequeño de Picard para funciones quasiregulares. En [8], Lewis probó que tanto el teorema pequeño de Picard como el de Rickman pueden obtenerse como consecuencia de las desigualdades de Harnack.

En este trabajo veremos que el método de Lewis puede utilizarse también para dar una demostración simple del Teorema Grande de Picard.

En la sección 2 recordaremos las básicas desigualdades de Harnack sobre funciones armónicas positivas y algunas consecuencias entre las que hemos de destacar el Lema probado por J. Lewis en [8, p. 199-201] y que fue la base de su demostración del "Teorema pequeño de Picard". La anunciada demostración del Teorema grande de Picard basada en el Lema de Lewis será presentada en la sección 3.

Antes de finalizar esta sección indiquemos que si $R > 0$ y $w \in \mathbb{C}$ entoces $\Delta(w, R)$ denotará al disco abierto de centro w y radio R,

$$\Delta(w, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < R\},$$

y si F es un subconjunto de $\mathbb{C}$ entonces $\overline{F}$ denotará a la adherencia de F. También, si h es una función real definida en el disco $\Delta(w, R)$ entonces denotaremos

$$M(r, h, w) = \sup_{|z-w|<r} h(z), \quad 0 < r \leq R.$$

2. Desigualdades de Harnack.

El núcleo de Poisson

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2}, \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

satisface la simple desigualdad

$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(\theta) \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

A partir de esta desigualdad y de la fórmula integral de Poisson para funciones armónicas, se deducen de forma inmediata útiles desigualdades para funciones armónicas positivas.

Desigualdad de Harnack. *Sea h una función armónica y positiva en el disco $\Delta(w, R)$. Entonces, para $0 < r < R$,*

$$\frac{R-r}{R+r} h(w) \leq h(z) \leq \frac{R+r}{R-r} h(w), \quad \text{para todo } z \in \Delta(w, r). \tag{2.1}$$

Nótese que con la notación introducida en la sección anterior, la desigualdad de Harnack puede enunciarse como sigue:

Si h es una función armónica y positiva en el disco $\Delta(w, R)$ entonces

$$\frac{R-r}{R+r}h(w) \leq M(r,h,w) \leq \frac{R+r}{R-r}h(w), \quad 0 < r < R, \tag{2.2}$$

en particular, tomando $r = R/2$,

$$\frac{1}{3}h(w) \leq M\left(\frac{R}{2}, h, w\right) \leq 3h(w). \tag{2.3}$$

A partir de las desigualdades de Harnack para discos que acabamos de enunciar se deducen resultados análogos para otros dominios.

Desigualdad de Harnack para dominios arbitrarios. *Sean D un dominio en $\mathbb{C}$, K un subconjunto compacto de D y $z_0 \in D$. Entonces existe una constante positiva $C = C(D, K, z_0)$ tal que para toda función h armónica y positiva en D se tiene*

$$C^{-1}h(z_0) \leq h(z) \leq Ch(z_0), \quad \text{para todo } z \in K.$$

Es bien sabido que si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones armónicas en un dominio D que converge a la función u uniformemente en cada subconjunto compacto de D entonces u es armónica. Las desigualdades de Harnack fácilmente implican otro importante teorema de convergencia de sucesiones de funciones armónicas conocido como "Principio de Harnack".

Principio de Harnack.

(i) Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión puntualmente creciente de funciones armónicas en D. Entonces existen sólo dos posibilidades: O bien $u_n \to \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, o existe una función u armónica en D tal que $u_n \to u$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

(ii) Sea D un dominio en $\mathbb{C}$ y $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones armónicas positivas en D. Entonces se verifica exactamente una de las dos siguientes posibilidades:

(a) $u_n \to \infty$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D, o, (b) existe una función u armónica en D y una subsucesión u_{n_j} de u_n tal que $u_{n_j} \to u$ uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

Todos estos resultados pueden encontrarse por ejemplo en [1, pp. 243-244], en el capítulo 3 de [3], en el capítulo X de [4] y en el capítulo 11 de [13].

Finalizamos esta sección con el Lema probado por J. Lewis en [8] y que fue la base de su demostración del "Teorema pequeño de Picard".

Lema A. (Lewis). *Existe una constante absoluta $A > 0$ tal que cualquiera que sea $R > 0$ se verifica que si u es una función armónica y acotada en $\Delta(0, 2R)$ con $u(0) = 0$ entonces existen $w \in \Delta(0, 2R)$ y $r > 0$ tales que*

$$u(w) = 0, \tag{2.4}$$

$$\overline{\Delta(w, 2r)} \subset \Delta(0, 2R), \tag{2.5}$$

y

$$A^{-1}M(R, u, 0) \leq M(2r, u, w) \leq AM(r, u, w). \tag{2.6}$$

Indiquemos que, en realidad, Lewis probó en [8] una versión más general de este resultado válido para "funciones de Harnack en $\mathbb{R}^n$". Previas versiones de este lema aparecieron en [12] y [7]. Presentaremos una demostración del Lema A por completitud.

Demostración del Lema A. Sea $R > 0$ y sea u una función armónica y acotada en $\Delta(0, 2R)$ con $u(0) = 0$. Para cada $z \in \Delta(0, 2R)$, definimos

$$\delta(z) = 2R - |z| = \operatorname{dist}(z, \partial\Delta(0, 2R)).$$

Sean

$$E = \{z \in \Delta(0, 2R) : u(z) = 0\},$$
$$F = \overline{\bigcup_{z \in E} \Delta\left(z, \frac{\delta(z)}{4}\right)}.$$

Definamos

$$\gamma = \sup\{u(z) : z \in F\} = \sup_{z \in E} M\left(\frac{\delta(z)}{4}, u, z\right),$$

como u es acotada, $\gamma < \infty$. Elijamos $w \in E$ tal que

$$M\left(\frac{\delta(w)}{4}, u, w\right) \geq \frac{\gamma}{2}, \tag{2.7}$$

y tomemos

$$r = \frac{\delta(w)}{4}. \tag{2.8}$$

Veremos que la conclusión del Lema A es válida con esta elección de w y r. Como $w \in E$, se tiene que $u(w) = 0$. También, (2.8) implica que $\overline{\Delta(w, 2r)} \subset \Delta(0, 2R)$. Nos falta por comprobar (2.6). Observemos que (2.7) equivale a

$$M(r, u, w) \geq \frac{\gamma}{2}. \tag{2.9}$$

Sea $z \in \Delta(0, R)$ con $u(z) \geq 0$.
-Si $z \in F$ entonces $u(z) \leq \gamma \leq 2M(r, u, w)$.
-Si $z \notin F$ entonces, como $0 \in F$ y F es cerrado, se tiene que existe $z' \in [z, 0] \cap F$ tal que $[z, z') \cap F = \emptyset$. Entonces, es claro que $u > 0$ en $[z, z')$. De hecho, se tiene que

$$u > 0, \quad \text{en } \Delta\left(\xi, \tfrac{R}{5}\right), \quad \text{para cada } \xi \in [z, z'). \tag{2.10}$$

Demostración de 2.10. Sean $\xi \in [z, z')$ y $\xi' \in \Delta\left(\xi, \frac{R}{5}\right)$. Como $\xi \in [0, z]$ y $|z| < R$, se tiene que también $|\xi| < R$ lo que implica que $\delta(\xi) > R$. Ahora,

$$\delta(\xi') \geq \delta(\xi) - |\xi - \xi'| \geq R - \frac{R}{5} = \frac{4R}{5} > 4|\xi - \xi'|,$$

por tanto,

$$|\xi - \xi'| < \frac{\delta(\xi')}{4}$$

lo que implica que $u(\xi') \neq 0$ (ya que si fuese $u(\xi') = 0$ entonces ξ pertenecería a F) y, por tanto, $u(\xi') > 0$. Esto prueba (2.10).

Utilizando (2.10) y la desigualdad de Harnack (2.3), deducimos que

$$M\left(\frac{R}{10}, u, \xi\right) \leq 3u(\xi), \quad \text{para cada } \xi \in [z, z']. \tag{2.11}$$

Definamos

$$\xi_k = z' + \frac{z - z'}{10}k, \quad k = 0, 1, \ldots, 10.$$

entonces es claro que $\xi_0 = z'$, $z_{10} = z$, y que $\xi_k \in [z, z')$ y que $|\xi_k - \xi_{k-1}| < \frac{R}{10}$ para todo k. Entonces, utilizando (2.11) para $\xi = \xi_k$, $k = 9, 8, \ldots, 1, 0$ sucesivamente, obtenemos que

$$u(z) = u(z_{10}) \leq 3u(z_9) \leq \ldots 3^k u(z_{10-k}) \leq \ldots 3^{10} u(z_0) = 3^{10} u(z').$$

Ahora, como $z' \in F$, teniendo en cuenta (2.9), vemos que $u(z') < \gamma < 2M(r, u, w)$ con lo que

$$u(z) < 2 \times 3^{10} M(r, u, w)$$

lo que prueba la desigualdad de la izquierda de (2.6) con $A = 2 \times 3^{10}$.

Para demostrar la otra desigualdad de (2.6) razonamos de una forma muy parecida. Tomemos $w' \in \Delta(w, 2r)$ con $u(w') \geq 0$.

-Si $w' \in F$, entonces $u(w') \leq \gamma \leq 2M(r, u, w)$.

-Si $w' \notin F$, entonces, como $w \in F$, existe $w_1 \in (w', w) \cap F$ tal que $[w', w_1) \cap F = \emptyset$. Entonces, razonando como anteriormente, se prueba que

$$u > 0, \quad \text{en } \Delta\left(\xi, \tfrac{r}{5}\right), \quad \text{para cada } \xi \in [w', w_1),$$

lo que utilizando la desigualdad de Harnack como anteriormente nos lleva a probar que

$$u(w') \leq 2 \times 3^{10} M(r, u, w).$$

Por tanto, tenemos la desigualdad de la derecha de (2.6) también con $A = 2 \times 3^{10}$. Así finaliza la demostración del Lema A.

3. Una demostración del Teorema Grande de Picard.

La demostración del Teorema Grande de Picard se basará en el siguiente resultado que está inspirado en [7, Th. 1].

Proposición 1. *Existe una constante absoluta $B > 1$ tal que para todo $\lambda > 0$ y para todo par u_1, u_2 de funciones armónicas en $\Delta = \Delta(0,1)$ que satisfacen*

$$\{z \in \Delta : u_1(z) < -\lambda\} \bigcap \{z \in \Delta : u_2(z) < -\lambda\} = \emptyset, \tag{3.1}$$

$$|u_1^+ - u_2^+| \leq \lambda, \tag{3.2}$$

y

$$|u_j(0)| \leq \lambda, \quad j = 1, 2, \tag{3.3}$$

se verifica que

$$M\left(\frac{1}{2}, u_j, 0\right) \leq B\lambda, \quad j = 1, 2. \tag{3.4}$$

En primer lugar, es claro que basta considerar funciones u_1 y u_2 que sean acotadas. Es fácil ver que si $\lambda > 0$ y u_1, u_2 son funciones armónicas y acotadas en Δ que satisfacen (3.1), (3.2) y (3.3) y

$$u(z) = \frac{u_1(z) - u_1(0)}{3\lambda}, \quad v(z) = \frac{u_2(z)}{3\lambda}, \quad z \in \Delta,$$

entonces u y v son armónicas y acotadas en Δ y satisfacen

$$\{z \in \Delta : u(z) < -1\} \bigcap \{z \in \Delta : v(z) < -1\} = \emptyset, \tag{3.5}$$

$$|u^+ - v^+| \leq 1, \tag{3.6}$$

$$u(0) = 0, \tag{3.7}$$

y

$$|v(0)| \leq 1. \tag{3.8}$$

Además,

$$M\left(\frac{1}{2}, u_1, 0\right) \leq 3\lambda M\left(\frac{1}{2}, u, 0\right) + \lambda$$

y

$$M\left(\frac{1}{2}, u_2, 0\right) \leq 3\lambda M\left(\frac{1}{2}, v, 0\right).$$

Por tanto, es claro que la Proposición 1 se deduce de la siguiente.

Proposición 2. *Existe una constante absoluta $B > 1$ tal que si u y v son dos funciones armónicas y acotadas en Δ que satisfacen (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8) entonces*

$$M\left(\frac{1}{2}, u, 0\right) \leq B \tag{3.9}$$

y

$$M\left(\frac{1}{2}, v, 0\right) \leq B.$$

Demostración de la Proposición 2. En primer lugar observemos que, utilizando (3.6) y (3.7), se tiene que

$$M\left(\frac{1}{2}, v, 0\right) \leq M\left(\frac{1}{2}, v^+, 0\right) \leq M\left(\frac{1}{2}, u^+, 0\right) + 1 = M\left(\frac{1}{2}, u, 0\right) + 1.$$

Así pues, basta probar (3.9). Para ello, razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones armónicas y acotadas en Δ satisfaciendo

$$\{z \in \Delta : u_n(z) < -1\} \bigcap \{z \in \Delta : v_n(z) < -1\} = \emptyset, \tag{3.11}$$

$$|u_n^+ - v_n^+| \leq 1, \tag{3.12}$$

$$u_n(0) = 0, \tag{3.13}$$

y

$$|v_n(0)| \leq 1. \tag{3.14}$$

para todo n y tales que

$$m_n = M\left(\frac{1}{2}, u_n, 0\right) \to \infty, \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.15}$$

Utilizando el Lema A, deducimos que para cada n existen $z_n \in \Delta$ y $r_n > 0$ con $\overline{\Delta(z_n, 2r_n)} \subset \Delta$ tales que

$$u_n(z_n) = 0 \tag{3.16}$$

y

$$A^{-1} m_n \leq M_n \leq A M_n' \tag{3.17}$$

donde, $M_n = M(2r_n, u_n, z_n)$ y $M_n' = M(r_n, u_n, z_n)$. Observemos que (3.15) y (3.17) implican que

$$M_n \to \infty, \quad \text{as } n \to \infty.$$

Definamos

$$U_n(z) = \frac{u_n(z_n + 2r_n z)}{M_n}, \quad V_n(z) = \frac{u_n(z_n + 2r_n z)}{M_n}, \quad z \in \Delta.$$

Las funciones U_n y V_n son armónicas y acotadas en Δ y satisfacen

$$U_n(0) = 0, \tag{3.18}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, U_n, 0\right) \geq A^{-1}, \tag{3.19}$$

$$|U_n^+ - V_n^+| \leq \frac{1}{M_n}, \tag{3.20}$$

y

$$\{z \in \Delta : U_n(z) < \frac{-1}{M_n}\} \bigcap \{z \in \Delta : V_n(z) < \frac{-1}{M_n}\} = \emptyset. \tag{3.21}$$

Además, es claro que $U_n \leq 1$ para todo n. Por tanto, aplicando la segunda parte del Principio de Harnack a la sucesión $\{1 - U_n\}$ y teniendo en cuenta (3.18), deducimos que una subsucesión $\{U_{n_j}\}$ de $\{U_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Δ a una función U armónica en Δ. Utilizando (3.20), vemos que la sucesión $\{V_n\}$ también está uniformemente acotada superiormente y, por tanto, existe una subsucesión de $\{V_{n_j}\}$ que es uniformemente convergente a una función V que es o bien armónica en Δ o idénticamente igual a $-\infty$. En vista de (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21), deducimos que

$$U(0) = 0, \tag{3.22}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, U, 0\right) \geq A^{-1}, \tag{3.23}$$

$$U^+ = V^+, \tag{3.24}$$

y

$$\max(U, V) \geq 0. \tag{3.25}$$

Por (3.23) vemos que existe $\xi \in \Delta$ tal que $U(\xi) > 0$, entonces (3.25) implica que V es armónica en Δ y que $U = V$ en un entorno de ξ, lo que, por el Teorema de identidad para funciones armónicas, implica que $U = V$ en Δ. Entonces (3.25) implica que $U \geq 0$ en Δ lo que, junto con (3.22) y el principio del máximo, implica que U es idénticamente nula en Δ. Hemos llegado a una contradicción con (3.23). Así finaliza la demostración.

Pasamos ya a demostrar el Teorema Grande de Picard. Es claro que éste es equivalente al siguiente resultado.

Proposición 3. *Sea $R > 0$ y sea f una función holomorfa en $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Supongamos $0, 1 \notin f(G)$. Entonces ∞ no es una singularidad esencial de f.*

Demostración de la Proposición 3. Supongamos que f está en las condiciones de la Proposición y además que ∞ es una singularidad esencial de f. Por el Teorema de Casorati-Weierstrass (véase [9, Vol. I, p.215] o [4, p. 109]) deducimos que, para cada $r > R$, $f(\{|z| > r\})$ es denso en el plano. Por tanto, existe una sucesión de números $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$2R < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < r_{n+1} < \ldots$$

tal que para cada n existe $z_n \in \mathbb{C}$ con $|z_n| = r_n$ y

$$e + 1 < |f(z_n)| < e^2. \tag{3.26}$$

Sean

$$u_1(z) = \log|f(z)|, \quad u_2(z) = \log|f(z) - 1|, \quad z \in G. \tag{3.27}$$

Como f no toma los valores 0 no 1 en G, vemos que u_1 y u_2 son armónicas en G. Se comprueba fácilmente que

$$|u_1^+ - u_2^+| \leq 1, \tag{3.28}$$

y que

$$\max(u_1, u_2) \geq \log\frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

Tomemos $n \geq 1$. Observemos que, como $r_n > 2R$, para todo z con $|z| = r_n$ se tiene que $\overline{\Delta(z, \frac{r_n}{2})} \subset G$. Sea N un natural tal que

$$|1 - e^{2\pi i/N}| < \frac{1}{4}. \tag{3.30}$$

Definamos

$$z_{n,k} = z_n e^{2k\pi i/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.31}$$

(por tanto $z_{n,0} = z_n$). Observemos que

$$z_{n,k} \in \Delta\left(z_{n,k-1}, \frac{r_n}{4}\right), \quad k = 1, 2, \ldots N, \tag{3.32}$$

y que los discos $\Delta\left(z_{n,k}, \frac{r_n}{4}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ cubren a la circunferencia $|z| = r_n$.

Definamos

$$u_{j,k}(z) = u_j\left(z_{n,k} + \frac{r_n}{2}z\right), \quad z \in \Delta, \quad k = 0, 1 \ldots, N-1, \quad j = 1, 2. \tag{3.33}$$

Las funciones $u_{j,k}$ son armónicas y acotadas en Δ. Utilizando (3.26), se deduce que

$$|u_{j,0}(0)| \leq 3, \quad j = 1, 2, \tag{3.34}$$

y, (3.28) y (3.29) implican que

$$|u_{1,0}^{+} - u_{2,0}^{+}| \leq 3, \tag{3.35}$$

y

$$\{z \in \Delta : u_{1,0}(z) < -3\} \bigcap \{z \in \Delta : u_{2,0}(z) < -3\} = \emptyset. \tag{3.36}$$

Entonces, utilizando la Proposición 1, deducimos que

$$M\left(\frac{1}{2}, u_{j,0}, 0\right) \leq 3B, \quad j = 1, 2,$$

lo que es equivalente a

$$M\left(\frac{r_n}{4}, u_j, z_{n,0}\right) \leq 3B, \quad j = 1, 2. \tag{3.37}$$

En particular, como $|z_{n,1} - z_{n,0}| < \frac{r_n}{4}$, se tiene que

$$|u_j(z_{n,1})| \leq 3B, \quad j = 1, 2. \tag{3.38}$$

Utilizando (3.38), (3.28) y (3.29), vemos que las funciones $u_{1,1}$ y $u_{2,1}$ satisfacen

$$|u_{j,1}(0)| \leq 3B, \quad j = 1, 2,$$

$$|u_{1,1}^{+} - u_{2,1}^{+}| \leq 3B,$$

y

$$\{z \in \Delta : u_{1,1}(z) < -3B\} \bigcap \{z \in \Delta : u_{2,1}(z) < -3B\} = \emptyset.$$

Entonces, aplicando de nuevo la Proposición 1, deducimos que

$$M\left(\frac{1}{2}, u_{j,1}, 0\right) \leq 3B^2, \quad j = 1, 2,$$

lo que es equivalente a

$$M\left(\frac{r_n}{4}, u_j, z_{n,1}\right) \leq 3B^2, \quad j = 1, 2.$$

Repitiendo este proceso, encontramos tras N pasos que, siendo $M = 3B^N$,

$$M\left(\frac{r_n}{4}, u_j, z_{n,k}\right) \leq M, \quad j = 1, 2, \quad k = 0, 1, \ldots N-1. \tag{3.39}$$

Ahora, como los discos $\Delta\left(z_{n,k}, \frac{r_n}{4}\right)$ cubren a la circunferencia $|z| = r_n$, (3.39) implica que

$$u_j(z) \leq M, \quad \text{si } |z| = r_n, \quad j = 1, 2,$$

y, por tanto,

$$|f(z)| \leq e^M, \quad \text{si } |z| = r_n \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Aplicando el principio del máximo en cada uno de los anillos $r_n \leq |z| < r_{n+1}$, deducimos que f está acotada en $|z| > r_1$. Esto contradice que ∞ es una singularidad esencial de f.

REFERENCIAS.

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third edition, McGraw-Hill, 1979.
[2] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants*, McGraw-Hill, 1973.
[3] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, 1992.
[4] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Second edition, Springer-Verlag, 1978.
[5] B. Davis, *Picard's theorem and Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1975), 353-362.
[6] B. Davis, *Brownian motion and analytic functions*, Ann. Prob. **7** (1979), 913-932.
[7] A. Eremenko and J. L. Lewis, *Uniform limits of certain $\mathcal{A}$-harmonic functions with applications to quasiregular mappings*, Ann. Acad. Si. Fenn. Ser. A. I. Math. **16** (1991), 361-375.
[8] J. L. Lewis, *Picard's Theorem and Rickman's theorem by way of Harnack's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), no. 1, 199-206.
[9] E. Hille, *Analytic Function Theory, Vol. I and II*, Chelsea Pub. Co., 2nd edition, 1976.
[10] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Oxford Univ. Press, 1964.
[11] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Translated from the 2nd German Edition, Springer-Verlag, 1970.
[12] S. Rickman, *On the number of omitted values of entire quasiregular mappings*, J. Analyse Math. **37** (1980), 100-117.
[13] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, Traduución de Real and Complex Analysis, 2nd edition, McGraw-Hill, Alhambra, 1979.

D. GIRELA, DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE MÁLAGA, 29071 MÁLAGA, SPAIN
E-mail address: girela@anamat.cie.uma.es