UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

11

P. MORALES Y F. GARCÍA MAZARÍO

MEDIDAS SOBRE PROYECCIONES EN ANILLOS ESTRELLADOS DE BAER

MEDIDAS SOBRE PROYECCIONES EN ANILLOS ESTRELLADOS DE BAER

PEDRO MORALES Y FRANCISCO GARCÍA MAZARÍO

1. Introducción

Cuando se analizan los sistemas físicos de la Mecánica Cuántica desde el punto de vista estadístico, se encuentran en su base una estructura ordenada $\mathcal{L}$ de "proposiciones", una estructura convexa $\mathcal{S}$ de "estados" y una relación entre estas dos estructuras que permite a cada estado de $\mathcal{S}$ comportarse como una "medida de probabilidad" sobre $\mathcal{L}$. Este análisis fue realizado magistralmente por Mackey [15] en su formulación axiomática de la Mecánica Cuántica, donde se postula que $\mathcal{S}$ es isomorfo al retículo ortomodular completo de todos los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ separable y de dimensión infinita.

Además, la estructura $(\mathcal{L}, \mathcal{S})$ genera de manera natural para cada $a \in L$ una aplicación $g_a : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ que se interpreta como la transformación sufrida por el estado del sistema físico después de una medición idealizada de a. Foulis [9] descubrió la manera de obtener del conjunto $\{g_a : a \in L\}$ un "semigrupo estrellado de Baer" que, en ciertos casos, conduce a un anillo estrellado de Baer. La importancia de estas estructuras para la teoría de la medición en Mecánica Cuántica está lúcidamente expuesta en [2, Chapter 16]. Notemos que los anillos estrellados de Baer tienen sus raíces en la teoría de las álgebras de operadores (ver [21]) y sirven para axiomatizar algunas partes de la teoría de las álgebras de von Neumann (ver [12]).

El propósito de esta nota es estudiar ciertas propiedades no triviales de medidas sobre proyecciones en un anillo estrellado de Baer y con valores en un *po*-grupo m-valorado G. Los resultados principales aparecen en las secciones 4 y 5, y son los siguientes:

1) El establecimiento de condiciones necesarias y suficientes para la existencia del soporte de una G-medida, que extiende un reciente resultado que se encuentra en [16] y el resultado clásico de existencia del soporte para todo funcional lineal positivo normal sobre un álgebra de von Neumann [8].

2) La aproximación de una $\mathbb{R}$-medida completamente aditiva sobre proyecciones en $B(H)$, donde H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ tal que $\dim(H) \geq 3$, y que extiende un resultado que se encuentra en [14].

3) La descomposición de Yosida-Hewitt de una medida definida en un conjunto ordenado ortomodular y con valores en un l-grupo m-valorado, y que extiende resultados que

se encuentran en [1] y [13].

Para conseguir que esta nota sea casi autocontenida, exponemos en las secciones 2 y 3 algunas nociones básicas sobre los anillos estrellados de Baer y los espacios normados de Riesz.

2. Anillos estrellados de Baer

Todos los anillos considerados en esta nota son asociativos.

Sea A un anillo. Una <u>involución</u> en A es una aplicación $x \longrightarrow x^*$ de A en A que satisface los siguientes axiomas:

i) $(x^*)^* = x$ para todo $x \in A$.

ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$ para todo $x, y \in A$.

iii) $(xy)^* = y^* x^*$ para todo $x, y \in A$.

Si $*$ es una involución en A, el par $(A, *)$ recibe el nombre de <u>anillo con involución</u> o <u>anillo involutivo</u>.

Cuando el anillo A es también un álgebra sobre un cuerpo F con una involución $\lambda \longrightarrow \overline{\lambda}$ ($\lambda \in F$), supondremos además que $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$ para todo $x \in A$ y $\lambda \in F$, y diremos que $(A, *)$ es un <u>álgebra con involución</u>. Por ejemplo, si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, $A = B(H)$ es el álgebra sobre $\mathbb{C}$ de todos los operadores lineales y acotados sobre H y para $a \in A$ se define a^* como el operador adjunto de a, entonces $(A, *)$ es un álgebra con involución.

Sea $(A, *)$ un anillo con involución.

Un elemento $e \in A$ se dice que es una <u>proyección</u> en A si $e^2 = e = e^*$. El conjunto de todas las proyecciones en A será denotado por $P(A)$. Si 0 es el cero de A, entonces $0 \in P(A)$. Además, si el anillo A posee una unidad 1, entonces $1 \in P(A)$.

Definamos una relación binaria $\leq$ sobre $P(A)$ por la fórmula: $e \leq f \iff ef = e$ (o equivalentemente $fe = e$).

Lema 2.1. *El conjunto $(P(A), \leq)$ es parcialmente ordenado y 0 es su primer elemento. Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $e \leq f$

ii) $eA \subset fA$

iii) $Ae \subset Af$

Demostración. La verificación de que $\leq$ es una relación de orden parcial con primer elemento es inmediata.

Probemos que i) $\Rightarrow$ ii). Sea $x \in eA$. Entonces existe $a \in A$ tal que $x = ea$. Pero $fe = e$. Entonces $x = (fe)a = f(ea) \in fA$.

Probemos que ii) $\Rightarrow$ iii). Sea $x \in Ae$. Entonces existe $a \in A$ tal que $x = ae$. Se tiene que $x^* = ea^* \in eA \subset fA$. Entonces existe $b \in A$ tal que $x^* = fb$. En consecuencia, $x = b^* f \in Af$.

Probemos que iii) $\Rightarrow$ i). Puesto que $e = e^2$, se tiene que $e \in Ae \subset Af$. Entonces existe $a \in A$ tal que $e = af$, de donde $ef = (af)f = af^2 = af = e$.

Dos proyecciones e y f se dicen ortogonales, y se escribe $e \perp f$, si $ef = 0$ (o equivalentemente $fe = 0$). Notemos que

$$e, f \in P(A) \quad \text{y} \quad e \perp f \Longrightarrow e + f \in P(A)$$

Lema 2.2. *Sean $e, f \in P(A)$ tales que $e \leq f$. Entonces $f - e \in P(A)$, $f - e \perp e$ y $f - e \leq f$.*

Demostración. Puesto que $(-a)^* = -a^*$ para todo $a \in A$, se tiene que $(f-e)^* = f - e$. Además, $(f-e)^2 = (f-e)(f-e) = f - fe - ef + e$. Puesto que $fe = e = ef$, se deduce que $(f-e)^2 = f - e$.

Además, $e(f-e) = ef - e = 0$. Finalmente, $f(f-e) = f - fe = f - e$.

Sea D un subconjunto no vacío de un conjunto parcialmente ordenado $(E, \leq)$. Si el supremo (respectivamente el ínfimo) de D existe en E, se denotará por $\bigvee D$ (respectivamente $\bigwedge D$). En particular, escribiremos

$$\bigvee\{x, y\} = x \vee y, \quad \bigvee\{x_i \,:\, i \in I\} = \bigvee\nolimits_{i \in I} x_i, \quad \bigvee\{x_i \,:\, i \in \mathbb{N}\} = \bigvee\nolimits_{i=0}^{\infty} x_i$$
$$\bigwedge\{x, y\} = x \wedge y, \quad \bigwedge\{x_i \,:\, i \in I\} = \bigwedge\nolimits_{i \in I} x_i, \quad \bigwedge\{x_i \,:\, i \in \mathbb{N}\} = \bigwedge\nolimits_{i=0}^{\infty} x_i$$

Lema 2.3. *Sean $e, f \in P(A)$ tales que $ef = fe$. Entonces $e \wedge f$ y $e \vee f$ existen en $P(A)$ y vienen dados por las fórmulas $e \wedge f = ef$ y $e \vee f = e + f - ef$.*

Demostración. Notemos en primer lugar que la hipótesis $ef = fe$ implica que $ef \in P(A)$. Sea $g = ef$. Trivialmente g es una cota inferior del conjunto $\{e, f\}$. Sea g' una cota inferior del conjunto $\{e, f\}$. Entonces $g' \leq e$ y $g' \leq f$. Por consiguiente, $g'e = g'$ y $g'f = g'$, de donde $g' = g'f = (g'e)f = g'g$.

Notemos, en segundo lugar, que $e + f - ef \in P(A)$ bajo la hipótesis $ef = fe$. Sea $h = e + f - ef$. Trivialmente h es una cota superior del conjunto $\{e, f\}$. Sea h' una cota superior del conjunto $\{e, f\}$. Entonces $h'e = e$ y $h'f = f$, de donde $h'(e + f) = e + f$ y $h'(ef) = ef$. En consecuencia, $h'h = h$.

Un subconjunto B de A se dice que es un subanillo de A si B es un subgrupo del grupo aditivo de A y $xy \in B$ para todo $x, y \in B$. Notemos que si A tiene una unidad 1, un subanillo de A puede tener una unidad diferente de 1. Por ejemplo, si se define $(u, v)^* = (\overline{u}, \overline{v})$ para todo $(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, entonces $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *)$ es un anillo involutivo tal que $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ es un anillo con unidad $(1, 1)$, mientras que $\mathbb{C} \times \{0\}$ es un subanillo de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ cuya unidad es $(1, 0)$.

Sea B un subgrupo del grupo aditivo de A. Se dice que

i) B es un <u>ideal por la derecha</u> de A si $Ba \subset B$ para todo $a \in A$.

ii) B es un <u>ideal por la izquierda</u> de A si $aB \subset B$ para todo $a \in A$.

iii) B es un <u>ideal</u> de A si es un ideal por la derecha y por la izquierda de A.

Por ejemplo, si $x \in A$, entonces $B_1 = xA$ es un ideal por la derecha de A y $B_2 = Ax$ es un ideal por la izquierda de A.

Notemos que todo ideal por la derecha o por la izquierda de A es un subanillo de A.

Sea M un subconjunto no vacío de A. Se dice que M es un <u>subconjunto estrellado</u> de A si $x \in M \Longrightarrow x \in M^*$, o, equivalentemente, si $M = M^*$, donde $M^* = \{x^* : x \in M\}$.

Un <u>subanillo estrellado</u> de $(A, *)$ es un subanillo B de A tal que B es un subconjunto estrellado de A. Claramente, si B en un subanillo estrellado de $(A, *)$, entonces $(B, *|_B)$ es un anillo estrellado. Un <u>ideal estrellado</u> de $(A, *)$ es un ideal B de A tal que B es un subconjunto estrellado de A. Claramente todo ideal estrellado de $(A, *)$ es un subanillo estrellado de $(A, *)$, pero no recíprocamente. Por ejemplo, si S es un subconjunto estrellado de A y $B = \{x \in A : sx = xs \text{ para todo } s \in S\}$, entonces B es un subanillo estrellado de $(A, *)$ que no es un ideal estrellado de $(A, *)$.

Sea S un subconjunto no vacío de A. Escribamos

$$R(S) = \{x \in A : sx = 0 \text{ para todo } s \in S\}$$

$$L(S) = \{x \in A : xs = 0 \text{ para todo } s \in S\}$$

Notemos que $0 \in R(S) \cap L(S)$. El conjunto $R(S)$ (respectivamente $L(S)$) se llama el <u>anulador por la derecha</u> (respectivamente el <u>anulador por la izquierda</u>) de S.

Lema 2.4. *Sea S un subconjunto no vacío de A. Entonces*

i) $R(S)$ es un ideal por la derecha de A.

ii) $L(S)$ es un ideal por la izquierda de A.

iii) $R(S^*) = (L(S))^*$ y $L(S^*) = (R(S))^*$.

Demostración. i) Claramente $R(S)$ es un subgrupo del grupo aditivo de A. Sea $a \in A$. Si $x \in R(S)$, entonces $sx = 0$ para todo $s \in S$, de donde $s(xa) = (sx)a = 0$ para todo $s \in S$. Por lo tanto, $xa \in R(S)$.

ii) La demostración es similar a i).

iii) Sea $x \in R(S^*)$. Entonces $s^*x = 0$ para todo $s \in S$. Puesto que $x^*s = 0$ para todo $s \in S$, se tiene que $x^* \in L(S)$ y, en consecuencia, $x \in (L(S))^*$. Sea $y \in (L(S))^*$. Entonces $y^* \in L(S)$ y, en consecuencia, $y^*s = 0$ para todo $s \in S$. Puesto que $s^*y = 0$ para todo $s^* \in S^*$, se deduce que $y \in R(S^*)$.

Puesto que $(S^*)^* = S$, se tiene que $R((S^*)^*) = (L(S^*))^*$, de donde $(R(S))^* = L(S^*)$.

Un <u>anillo estrellado de Baer</u> es un anillo con involución $(A, *)$ que satisface el siguiente axioma:

(B) Para todo subconjunto no vacío S de A existe un elemento $e \in P(A)$ tal que $R(S) = eA$.

Lema 2.5. *Un anillo con involución $(A,*)$ es un anillo estrellado de Baer si y sólo si satisface el siguiente axioma:*

(B*) *Para todo subconjunto no vacío T de A existe un elemento $f \in P(A)$ tal que $L(T) = Af$.*

Demostración. Supongamos que $(A,*)$ es un anillo estrellado de Baer. Sea T un subconjunto no vacío de A y consideremos $S = T^*$. De acuerdo con el axioma (B), existe un elemento $e \in P(A)$ tal que $R(S) = eA$. Utilizando el lema 2.4 se deduce que $L(T) = (eA)^* = Af$ con $f = e^* = e$.

Supongamos que $(A,*)$ es un anillo con involución que satisface el axioma (B*). Sea S un subconjunto no vacío de A. Sea $T = S^*$. De acuerdo con el axioma (B*), existe un elemento $f \in P(A)$ tal que $L(T) = Af$. Utilizando el lema 2.4 se deduce que $R(S) = (Af)^* = eA$ con $e = f^* = f$.

Lema 2.6. *Sea $(A,*)$ un anillo estrellado de Baer y S un subconjunto no vacío de A. Entonces la proyección e en A que genera eA es única.*

Demostración. Supongamos que existan dos elementos $e_1, e_2 \in P(A)$ tales que $R(S) = e_1A$ y $R(S) = e_2A$. Entonces $e_1A = e_2A$. El lema 2.1 implica que $e_1 \leq e_2$ y $e_2 \leq e_1$. Entonces $e_1 = e_2$.

Observación 2.7. Sea $(A,*)$ un anillo estrellado de Baer y T un subconjunto no vacío de A. Entonces se puede igualmente probar que la proyección f en A que genera Af es única.

Lema 2.8. *Todo anillo estrellado de Baer $(A,*)$ es un anillo con unidad.*

Demostración. Sean $S = T = \{0\}$. Entonces $R(S) = L(S) = A$. De acuerdo con el lema 2.6 y la observación 2.7, existen dos únicos elementos $e_0, f_0 \in P(A)$ tales que $e_0A = A = Af_0$. Puesto que $A = (Af_0)^* = f_0A$, el lema 2.1 implica que $e_0 = f_0$. Sea $e_0 = f_0 = 1$. Probemos que 1 es la unidad de A. Sea $x \in A$. Entonces existen dos elementos $a, b \in A$ tales que $x = 1a$ y $x = b1$. Se tiene: $1x = 1(1a) = 1a = x$ y $x1 = (b1)1 = b1 = x$, de donde $1x = x1 = x$.

Puesto que $e1 = e$ para todo $e \in P(A)$, se deduce que 1 es el último elemento del conjunto parcialmente ordenado $(P(A), \leq)$. Además, si $e \in P(A)$ el lema 2.2 implica que $1 - e \in P(A)$ y $1 - e \perp e$.

En lo sucesivo $(A,*)$ designará un anillo estrellado de Baer.

Lema 2.9. *Si $x \in A$, entonces $xx^* = 0$ implica $x = 0$.*

Demostración. Sea $S = \{x\}$. De acuerdo con el lema 2.6 existe un único elemento $e \in P(A)$ tal que $R(S) = eA$. Puesto que $e \in eA$, se tiene que $xe = 0$, de donde $ex^* = 0$. Pero $xx^* = 0$. Por lo tanto, $x^* \in eA$. Sea $a \in A$ tal que $x^* = ea$. Entonces $0 = ex^* = e(ea) = ea = x^*$, de donde $x = 0$.

Sean S y T dos subconjuntos no vacíos de A. De acuerdo con el lema 2.6 y la observación 2.7 existen dos únicas proyecciones e y f en A tales que $R(S) = eA$ y $L(T) = Af$. Entonces

a) la proyección $1 - e$ se llama <u>proyección por la derecha</u> de S, y se denota por $RP(S)$, y

b) la proyección $1 - f$ se llama <u>proyección por la izquierda</u> de T, y se denota por $LP(T)$.

Para todo $x \in A$ escribiremos en lo sucesivo $RP(x)$ y $LP(x)$ en lugar de $RP(\{x\})$ y $LP(\{x\})$, respectivamente.

Lema 2.10. *Sea S un subconjunto no vacío de A. Entonces*

i) $yRP(S) = y$ *para todo* $y \in S$.

ii) $LP(S)y = y$ *para todo* $y \in S$.

iii) $RP(S)x = 0 \iff yx = 0$ *para todo* $y \in S$.

iv) $xLP(S) = 0 \iff xy = 0$ *para todo* $y \in S$.

v) $RP(x) = LP(x^*)$ *para todo* $x \in A$.

vi) Si $x \in A$, $e \in P(A)$ *y* $xe = x$, *entonces* $RP(x) \leq e$.

Demostración. i) Sea $RP(S) = 1 - e$. Puesto que $e \in eA$, se tiene que $ye = 0$ para todo $y \in S$. Entonces $y(1 - e) = y - ye = y$ para todo $y \in S$.

ii) La demostración es similar a i).

iii) Sea $RP(S)x = 0$. Entonces $0 = (1 - e)x = x - ex$, de donde $x = ex \in eA = R(S)$. Se deduce que $yx = 0$ para todo $y \in S$.

Supongamos que $yx = 0$ para todo $y \in S$. Entonces $x \in R(S) = eA$. Sea $a \in A$ tal que $x = ea$. Entonces $ex = e(ea) = ea = x$, de donde $(1 - e)x = x - ex$. En consecuencia, $RP(S)x = 0$.

iv) La demostración es similar a iii).

v) Sea $x \in A$. Pongamos $R(\{x\}) = eA$ y $L(\{x^*\}) = Af$ con $e, f \in P(A)$. Puesto que $\{x^*\} = \{x\}^*$, el lema 2.4 implica que $L(\{x^*\}) = (R(\{x\}))^* = (eA)^* = Ae$. En consecuencia, se deduce del lema 2.1 que $e = f$, de donde $RP(x) = LP(x^*)$.

vi) Puesto que $x(1 - e) = 0$, la propiedad iii) implica que $RP(x)(1 - e) = 0$, de donde $RP(x) \leq e$.

Consideremos el sistema $(L, \leq, {}^\perp, 0, 1)$ donde L es un conjunto, $\leq$ es una relación binaria sobre L, ${}^\perp$ es una aplicación de L en L y 0 y 1 son dos elementos distinguidos y diferentes de L. Decimos que el sistema $L = (L, \leq, {}^\perp, 0, 1)$ es un <u>conjunto ordenado ortomodular</u> si satisface los siguientes axiomas:

a) $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

b) 0 es el primer elemento de L y 1 es el último elemento de L.

c) $a \leq b \Longrightarrow b^\perp \leq a^\perp$.

d) $(a^\perp)^\perp = a$ y $a \wedge a^\perp = 0$ para todo $a \in L$.

e) Si $a, b \in L$ y $a \leq b^{\perp}$, entonces $a \vee b$ existe en L.

f) Si $a, b \in L$ y $a \leq b$, entonces $b = a \vee (a^{\perp} \wedge b)$.

De estos axiomas se deduce inmediatamente que $0^{\perp} = 1$, $1^{\perp} = 0$ y $a \vee a^{\perp} = 1$ para todo $a \in L$.

Un retículo ortomodular es un conjunto ordenado ortomodular tal que $(L, \leq)$ es un retículo. Un retículo ortomodular distributivo se llama un álgebra de Boole. Un retículo ortomodular L se dice completo si para toda familia $(a_i)_{i \in I}$ de elementos de L, $\bigvee_{i \in I} a_i$ y $\bigwedge_{i \in I} a_i$ existen en L.

Teorema 2.11. *Si* $^{\perp} : P(A) \longrightarrow P(A)$ *es la aplicación definida por la fórmula* $e^{\perp} = 1 - e$, *entonces* $(P(A), \leq, ^{\perp}, 0, 1)$ *es un retículo ortomodular completo. Además,* $e \perp f \iff e \leq f^{\perp}$ *para todo* $e, f \in P(A)$.

Demostración. Verifiquemos en primer lugar los axiomas a) - f) de la definición precedente.

Los axiomas a) y b) son consecuencias inmediatas de los lemas 2.1 y 2.8.

Verifiquemos el axioma c): Sean $e, f \in P(A)$ tales que $e \leq f$. Entonces $fe = e$. Por lo tanto, $f^{\perp}e^{\perp} = (1-f)(1-e) = 1 - e - f + fe = 1 - f = f^{\perp}$, de donde $f^{\perp} \leq e^{\perp}$.

Verifiquemos el axioma d): Sea $e \in P(A)$. En primer lugar, $(e^{\perp})^{\perp} = (1-e)^{\perp} = 1 - (1-e) = e$. Además, puesto que $ee^{\perp} = 0 = e^{\perp}e$, se deduce del lema 2.3 que $e \wedge e^{\perp} = 0$.

Verifiquemos el axioma e): Sean $e, f \in P(A)$ tales que $e \leq f^{\perp}$. Entonces $ef^{\perp} = e$, de donde $ef = 0$, y, por consiguiente, $fe = 0$. De acuerdo con el lema 2.3, $e \vee f$ existe en $P(A)$ y es igual a $e + f - ef = e + f$.

Verifiquemos el axioma f): Sean $e, f \in P(A)$ tales que $e \leq f$. Entonces $ef = fe = e$. Puesto que $e^{\perp}f = fe^{\perp}$, el lema 2.3 implica que $e^{\perp} \wedge f$ existe en $P(A)$ y es igual a $f - e$. También $e(f-e) = 0 = (f-e)e$, y el mismo lema 2.3 implica que $e \vee (e^{\perp} \wedge f)$ existe en $P(A)$ y es igual a $e + (f-e) - e(f-e) = f$.

Comprobemos ahora que $(P(A), \leq)$ es un retículo. Sean $e, f \in P(A)$. Vamos a probar que $e \vee f = f + RP[e(1-f)]$ y $e \wedge f = e - LP[e(1-f)]$.

Escribamos $x = e(1-f) = e - ef$ y $g = RP(x)$. Puesto que $xf = 0$, se tiene que $gf = 0$ y, por lo tanto, $f + g \in P(A)$. Pongamos $h = f + g$. Debemos probar que $h = e \vee f$. Claramente $f \leq h$. También $e \leq h$. En efecto, puesto que $g = RP(x)$, el lema 2.10 implica que $xg - x = 0$. Pero $xg - x = (e - ef)g - (e - ef) = eg - e(fg) - e + ef = eg - e + ef$, de donde $e = ef + eg = eh$. Por otra parte, supongamos que k es una proyección en A tal que $e \leq k$ y $f \leq k$. Claramente $xk = x$, de donde $x(1-k) = 0$. Entonces, de acuerdo con el lema 2.10, se tiene que $g(1-k) = 0$, de donde $g \leq k$. Puesto que $f \leq k$ resulta que $h \leq k$.

En consecuencia, $h = e \vee f$. Se sigue inmediatamente que $e \wedge f$ existe en $P(A)$ y es igual a $1 - (1-f) \vee (1-e)$. Entonces $e \wedge f = 1 - ((1-e) + RP[(1-f)(1-(1-e))]) = e - RP[(1-f)e] = e - LP[e(1-f)]$ en virtud del lema 2.10.

Hasta aquí hemos demostrado que $(P(A), \leq, ^{\perp}, 0, 1)$ es un retículo ortomodular. Probemos que $(P(A), \leq)$ es un retículo completo. Sea $(e_i)_{i \in I}$ una familia cualquiera de elementos de $P(A)$. Pongamos $S = \{e_i : i \in I\}$ y escribamos $RP(S) = e$, donde $e \in P(A)$. De acuerdo con el lema 2.10, se tiene que $e_i e = e_i$ para todo $i \in I$ y, en consecuencia, e es una cota superior del conjunto S. Sea $f \in P(A)$ una cota superior del conjunto S. Entonces $e_i(1-f) = 0$ para todo $i \in I$. De acuerdo con el lema 2.10, se tiene que $e(1-f) = 0$, de donde $e \leq f$. En consecuencia, $e = \bigvee_{i\in I} e_i$. Además, $1 - \bigvee_{i\in I}(1-e_i)$ existe en $P(A)$ y se comprueba fácilmente que es igual a $\bigwedge_{i\in I} e_i$.

La última afirmación es trivial.

Observación 2.12. Sea $(A,*)$ un anillo con involución tal que A posee una unidad 1. Si para todo $e \in P(A)$ se define $e^{\perp} = 1-e$, entonces la demostración anterior establece que, en general, el sistema $(P(A), \leq, ^{\perp}, 0, 1)$ es solamente un conjunto ordenado ortomodular.

Sea B un subanillo estrellado de $(A,*)$. Se dice que B un <u>subanillo estrellado de Baer</u> de $(A,*)$ si se verifican las siguientes condiciones:

i) $x \in B \Longrightarrow RP(x) \in B$.

ii) Si $(e_i)_{i\in I}$ es una familia de elementos de $P(B)$, entonces $\bigvee_{i\in I} e_i \in B$.

Por ejemplo, si $e \in P(A)$ y $B = eAe$, entonces B es un subanillo estrellado de Baer de $(A,*)$ tal que B posee como unidad e y $P(B) = \{f \in P(A) : f \leq e\}$.

Para más detalles concernientes a los anillos estrellados de Baer pueden consultarse las monografías [3] y [12].

Ejemplos 2.13. 1) Todo anillo conmutativo con unidad y sin divisores de cero A es un anillo estrellado de Baer si se define $x^* = x$ para todo $x \in A$.

2) Sean $(A,*)$ un anillo estrellado de Baer y B un subanillo estrellado de Baer de $(A,*)$. Entonces $(B, *|_B)$ es un anillo estrellado de Baer tal que B posee como unidad $e = \bigvee_{x\in B} RP(x)$.

3) Si $(A,*)$ es un anillo estrellado de Baer y $(B_i)_{i\in I}$ es una familia cualquiera de subanillos estrellados de Baer de $(A,*)$, entonces $\bigcap_{i\in I} B_i$ es también un subanillo estrellado de Baer de $(A,*)$.

4) Sean $(A_i,*)_{i\in I}$ una familia de anillos estrellados de Baer y A el anillo producto directo de la familia $(A_i)_{i\in I}$. Si para $x = (a_i)_{i\in I}$ se define $x^* = (a_i^*)_{i\in I}$, entonces $(A,*)$ es un anillo estrellado de Baer llamado <u>producto directo</u> de la familia $(A_i)_{i\in I}$ y que se denota por $\prod_{i\in I}(A_i,*)$.

5) Sean $(A_i,*)_{i\in I}$ una familia de anillos estrellados de Baer, $(B,*) = \prod_{i\in I}(A_i,*)$, B_0 el ideal estrellado de $(B,*)$ formado por todos los elementos $x^* = (a_i^*)_{i\in I}$ de B para los cuales todas las componentes a_i de x, excepto un número finito, son nulas, B_1 el subanillo de B generado por $P(B)$ y $A = B_0 + B_1$. Entonces, $(A, *|_A)$ es un anillo estrellado de Baer llamado la <u>(P^*)-suma</u> de la familia $(A_i,*)_{i\in I}$.

6) Sea $(L, \leq, ^{\perp}, 0, 1)$ un álgebra de Boole completa (éste es el caso, por ejemplo, si L es σ-completa y existe una $\mathbb{R}$-medida estrictamente positiva sobre L (ver [18])). Entonces L dotado de las operaciones binarias $a + b = (a^{\perp} \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp})$ y $ab = a \wedge b$ es un anillo conmutativo con cero 0 y unidad 1. Además, si se define $a^* = a$ para todo $a \in L$, entonces $(L, *)$ es un anillo estrellado de Baer.

7) Sea F un cuerpo, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, A el anillo de las matrices $n \times n$ sobre F y $*$ la involución sobre A dada por la transposición. Entonces $(A, *)$ es un anillo estrellado de Baer si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ y $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 0$ implica $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. (Esto ocurre, por ejemplo, si $F = \mathbb{R}$, o bien $n = 2$ y $F = GF(3)$, el cuerpo de tres elementos $0, 1, -1$).

8) Sea $A = \{a = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lambda_n \in \mathbb{C}, \bigvee_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty$ y $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Im}(\lambda_n) = 0\}$. Entonces A dotado de las operaciones binarias $a + b = (\lambda_n + \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $ab = (\lambda_n \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un anillo conmutativo con cero $(0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ y unidad $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Además, si se define $a^* = (\overline{\lambda}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $(A, *)$ es un anillo estrellado de Baer tal que $P(A)$ es el conjunto de sucesiones de 0 y 1.

9) Sean T un espacio stoniano y $A = C(T)$ el álgebra conmutativa sobre $\mathbb{C}$ de todas las aplicaciones continuas de T en $\mathbb{C}$. Si para $a \in A$ se define $a^*(t) = \overline{a(t)}$ para todo $t \in T$, entonces $(A, *)$ es un anillo estrellado de Baer (para la definición de espacio stoniano ver [21]).

10) Si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, un <u>álgebra de von Neumann</u> sobre H es una subálgebra A de $B(H)$ tal que A es un subconjunto estrellado de $(B(H), *)$ y $A = A''$, donde $A'' = (A')'$ y $A' = \{x \in B(H) : ax = xa$ para todo $a \in A\}$. Entonces $(A, *)$ es un anillo estrellado de Baer. En particular, $B(H)$ es un álgebra de von Neumann sobre H.

3. Espacios normados de Riesz

Sea $(E, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sean $x, y \in E$. Si $x \leq y$ se escribe también $y \geq x$. Si $x \leq y$ y $x \neq y$, se escribe $x < y$ o también $y > x$.

Sean $x, y \in E$ tales que $x \leq y$. Entonces el conjunto $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ se llama <u>intervalo ordenado en</u> E <u>de</u> x <u>a</u> y.

Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre E y $x \in E$. Se dice que $\mathcal{F}$ <u>converge en orden a</u> x si $\mathcal{F}$ contiene una familia $([x_i, y_i])_{i \in I}$ de intervalos ordenados en E tal que $\bigcap_{i \in I} [x_i, y_i] = \{x\}$.

Sea D un subconjunto no vacío de E. Entonces

a) D se llama <u>filtrante inferiormente</u>, y se escribe $D \downarrow$, si para todo $x, y \in D$ existe $z \in D$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$. Si $D \downarrow$ y existe $x_0 = \bigwedge D$ en E, escribiremos $D \downarrow x_0$.

b) D se llama <u>filtrante superiormente</u>, y se escribe $D \uparrow$, si para todo $x, y \in D$ existe $z \in D$ tal que $z \geq x$ y $z \geq y$. Si $D \uparrow$ y existe $y_0 = \bigvee D$ en E, escribiremos $D \uparrow y_0$.

Sean $D\downarrow$ y $x \in D$. Entonces el conjunto $B_x = \{y \in D : y \leq x\}$ se llama la sección de D determinada por x. La familia $(B_x)_{x\in D}$ es una base de filtro en E, y el filtro engendrado $\mathcal{F}(D)$ recibe el nombre de filtro de secciones de D. En particular, si $D\downarrow x$, entonces $\mathcal{F}(D)$ contiene a la familia $([x,y])_{y\in D}$ de intervalos ordenados en E y $\bigcap_{y\in D}[x,y] = \{x\}$. En consecuencia, el filtro $\mathcal{F}(D)$ converge en orden a x.

Si A es un conjunto no vacío cualquiera, el conjunto E^A de todas las aplicaciones $f : A \longrightarrow E$ es un conjunto parcialmente ordenado mediante el orden canónico definido por la fórmula: $f \leq g \iff f(a) \leq g(a)$ para todo $a \in A$.

En lo sucesivo V denotará un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Un subconjunto C de V se dice que es un cono en V si $C + C \subset C$, $\mathbb{R}_+ C \subset C$ y $C \cap (-C) = \{0\}$. Trivialmente cada cono en V es un conjunto convexo que contiene a 0. Un cono C en V se llama cono generador si $C - C = V$

Sea C un cono en V. Entonces la relación binaria $\leq_C$ sobre V definida por la fórmula: $x \leq_C y \iff y - x \in C$, es una relación de orden parcial sobre V que satisface las dos propiedades siguientes:

i) $x \leq_C y \Longrightarrow x + z \leq_C y + z$ para todo $z \in V$.

ii) $x \leq_C y \Longrightarrow \lambda x \leq_C \lambda y$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Se dice entonces que $\leq_C$ es un orden lineal sobre V y el par $(V, \leq_C)$ se llama espacio vectorial ordenado.

Sea $\leq$ un orden lineal sobre V. Entonces el conjunto $C = \{x \in V : 0 \leq x\}$ es un cono en V y $\leq_C = \leq$. En consecuencia, existe una correspondencia biunívoca entre conos en V y órdenes lineales sobre V.

Sea $(V, \leq)$ un espacio vectorial ordenado.

Se llama unidad ordenada de $(V, \leq)$ a todo elemento $u \in V$ tal que $u > 0$ y $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-ku, ku]$. Por ejemplo, si $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y V es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ dotado del orden canónico $\leq$, entonces $u = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$ es una unidad ordenada de $(V, \leq)$.

Lema 3.1. *Sea C un cono en V. Si $(V, \leq_C)$ tiene una unidad ordenada u, entonces C es un cono generador.*

Demostración. Sea $x \in V$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tal que $-nu \leq x \leq nu$. Puesto que $x = \frac{1}{2}(x + nu) - \frac{1}{2}(-x + nu)$ y $\frac{1}{2}(\pm x + nu) \in C$, se deduce que $x \in C - C$.

Sea M un subconjunto no vacío de V. Entonces

a) M es absolutamente convexo si M es convexo y $\lambda M \subset M$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Notemos que V y $\{0\}$ son absolutamente convexos.

b) M es absorbente si para todo $x \in M$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda M$.

Lema 3.2. *Si $(V, \leq)$ tiene una unidad ordenada u, entonces el intervalo ordenado $[-u, u]$ es un conjunto absolutamente convexo y absorbente.*

Demostración. Probemos, en primer lugar, que $[-u,u]$ es convexo. Sean $x,y \in [-u,u]$ y sea $\lambda \in I\!R$ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces $-\lambda u \leq \lambda x \leq \lambda u$ y $-(1-\lambda)u \leq (1-\lambda)y \leq (1-\lambda)u$, de donde $-u \leq \lambda x + (1-\lambda)y \leq u$.

Probemos, en segundo lugar, que $[-u,u]$ es absolutamente convexo. Sea $\lambda \in I\!R$ tal que $|\lambda| \leq 1$ y sea $x \in [-u,u]$. Si $\lambda \geq 0$, entonces $-u \leq -\lambda u \leq \lambda x \leq \lambda u \leq u$, de donde $\lambda x \in [-u,u]$. Si $\lambda < 0$, entonces $(-\lambda)x \in [-u,u]$. Por lo tanto, $\lambda x \in -[-u,u] = [-u,u]$.

Probemos finalmente que $[-u,u]$ es absorbente. Sea $x \in V$. Entonces existe $n \in I\!N \setminus \{0\}$ tal que $x \in [-nu,nu] = n[-u,u]$.

Corolario 3.3. *Supongamos que $(V,\leq)$ tiene una unidad ordenada u. Entonces el funcional de Minkowski de $[-u,u]$ dado por la fórmula*

$$\rho_u(x) = \bigwedge\{\lambda > 0 : -\lambda u \leq x \leq \lambda u\} \qquad (x \in V)$$

es una seminorma sobre V que verifica la siguiente propiedad: Si $0 \leq x \leq y$ entonces $\rho_u(x) \leq \rho_u(y)$.

Demostración. De acuerdo con el lema 3.2, el conjunto $[-u,u]$ es absolutamente convexo y absorbente. Puesto que todo conjunto absolutamente convexo es convexo y equilibrado, se sigue de [22, Prop. 5, p. 26] que ρ_u es una seminorma sobre V.

Sean $x,y \in V$ tales que $0 \leq x \leq y$. Puesto que $\{\lambda > 0 : -\lambda u \leq y \leq \lambda u\} \subset \{\lambda > 0 : -\lambda u \leq x \leq \lambda u\}$, resulta que $\rho_u(x) \leq \rho_u(y)$.

Una unidad ordenada u de $(V,\leq)$ se dice <u>arquimediana</u> si $x \in V$ y $nx \leq u$ para todo $n \in I\!N \setminus \{0\}$ implica $x \leq 0$. Por ejemplo, la unidad ordenada del ejemplo precedente es arquimediana.

Lema 3.4. *Supongamos que $(V,\leq)$ tiene una unidad ordenada arquimediana u. Entonces el funcional de Minkowski ρ_u de $[-u,u]$ es una norma tal que $[-u,u] = \{x \in V : \rho_u(x) \leq 1\}$.*

Demostración. Sea $x \in V$. Entonces para todo $n \in I\!N \setminus \{0\}$ se verifica que $x \in \left(\rho_u(x) + \frac{1}{n}\right)[-u,u]$. Entonces $n(x - \rho_u(x)u) \leq u$ y $n(-x - \rho_u(x)u) \leq u$ para todo $n \in I\!N \setminus \{0\}$. Puesto que u es arquimediana, se deduce que $x - \rho_u(x)u \leq 0$ y $-x - \rho_u(x)u \leq 0$. En consecuencia, $x \in \rho_u(x)[-u,u]$. En particular, si $\rho_u(x) = 0$, entonces $x = 0$. Además, $\{x \in V : \rho_u(x) \leq 1\} \subset [-u,u]$. Sea $z \in [-u,u]$. Entonces $-u \leq z \leq u$, de donde $\rho_u(x) \leq 1$.

Un espacio vectorial ordenado $(V,\leq)$ se dice <u>arquimediano</u> si $x,y \in V$ y $nx \leq y$ para todo $n \in I\!N \setminus \{0\}$ implica $x \leq 0$.

Lema 3.5. *Si $(V,\leq)$ tiene una unidad arquimediana u, entonces $(V,\leq)$ es un espacio vectorial ordenado arquimediano.*

Demostración. Sean $x,y \in V$ tales que $nx \leq y$ para todo $n \in I\!N \setminus \{0\}$. Escojamos $k \in I\!N \setminus \{0\}$ tal que $-ku \leq y \leq ku$. Entonces $n\left(\frac{x}{k}\right) \leq u$ para todo $n \in I\!N \setminus \{0\}$. Puesto que u es arquimediana, se deduce que $\frac{x}{k} \leq 0$, de donde $x \leq 0$.

Se llama (OUN)-espacio (en inglés "order unit normed space") a una terna $(V, \leq, u)$ donde $(V, \leq)$ es un espacio vectorial ordenado y u es una unidad ordenada arquimediana de $(V, \leq)$. En este caso, de acuerdo con el corolario 3.3 y el lema 3.4, (V, ρ_u) es un espacio normado y la norma ρ_u satisface la condición: $x, y \in V$ y $0 \leq x \leq y \Longrightarrow \rho_u(x) \leq \rho_u(y)$.

Ejemplos 3.6. 1) Sean K un subconjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo de Hausdorff E sobre $\mathbb{R}$ y $V = A(K)$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de todos los funcionales afines y continuos sobre K. Sean $\leq$ el orden canónico sobre V y u el elemento de V definido por la fórmula: $u(x) = 1$ para todo $x \in K$. Entonces $(V, \leq, u)$ es un (OUN)-espacio tal que ρ_u coincide con la norma del supremo.

2) Se llama C^*-álgebra a un álgebra de Banach A sobre $\mathbb{C}$ que posee una involución $*$ con las dos propiedades adicionales siguientes: i) $\|x^*\| = \|x\|$ y ii) $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$.

Sea A una C^*-álgebra con unidad 1. Entonces $A_h = \{x \in A : x^* = x\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ que es también un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|$ restringida a A_h. Además, $A_+ = \{x \in A : \text{existe } y \in A \text{ con } x = y^*y\}$ es un cono en A_h que genera A_h. Entonces $(A_h, \leq, 1)$ es un (OUN)-espacio tal que ρ_1 coincide con la norma de A_h.

Se llama espacio de Riesz a todo espacio vectorial ordenado $(V, \leq)$ tal que para todo $x, y \in V$, $x \vee y$ y $x \wedge y$ existen en V.

Si $(V, \leq)$ es un espacio de Riesz y $x \in V$, se define $|x| = x \vee (-x)$ y se dice que $|x|$ es el valor absoluto de x. Entre sus propiedades notemos las siguientes (ver [17, Prop. 1.4, p. 51] y [22, Prop. 4, p. 366]):

i) $|x| = x^+ - x^-$ donde $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = x \wedge 0$.

ii) $|x| \geq 0$.

iii) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

iv) $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in V$.

v) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in V$.

Si $(V, \leq)$ es un espacio de Riesz y $x \in V$, entonces se puede probar que un filtro $\mathcal{F}$ sobre V converge en orden a x si y sólo si existe una familia $(y_i)_{i\in I}$ en V tal que $\{y_i : i \in I\} \downarrow 0$ y $\{z \in V : |z - x| \leq y_i\} \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$.

Un espacio de Riesz $(V, \leq)$ se dice que es Dedekind-completo si para todo subconjunto no vacío y acotado superiormente D de V, $\bigvee D$ existe en V.

Sea $(V, \leq)$ un espacio de Riesz. Una norma $\|\cdot\|$ sobre V se dice que es una norma de Riesz si se verifican las siguientes condiciones:

a) $\|\,|x|\,\| = \|x\|$ para todo $x \in V$.

b) $x, y \in V$ y $0 \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|$.

Si $\|\cdot\|$ es una norma de Riesz sobre V, la terna $(V, \leq, \|\cdot\|)$ recibe el nombre de espacio normado de Riesz. Si además el espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es completo, se dice que $(V, \leq, \|\cdot\|)$ es un retículo de Banach. Notemos que todo espacio normado de Riesz es arquimediano.

Para más detalles concernientes a los espacios de Riesz pueden consultarse las monografías [10] y [17].

Ejemplos 3.7. 1) Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ (con $\mathbb{R}^0 = \{0\}$) dotado del orden canónico y de la norma euclídea es un retículo de Banach Dedekind-completo.

2) Sean I un conjunto infinito y $l^\infty(I)$ el conjunto de todas las familias $(x_i)_{i\in I}$ de números reales tales que $\bigvee_{i\in I} |x_i| < +\infty$. Dotado del orden canónico y de la norma $\|x\|_\infty = \bigvee_{i\in I} |x_i|$, $l^\infty(I)$ es un retículo de Banach Dedekind-completo.

3) Sean Ω un espacio topológico localmemte compacto de Hausdorff y $C_0(\Omega)$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de todas las aplicaciones continuas $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anulan en el infinito, es decir, que para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ es un subconjunto compacto de Ω. Dotado del orden canónico y de la norma $\|f\|_\infty = \bigvee_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$, $C_0(\Omega)$ es un retículo de Banach.

4) Sea I un conjunto infinito. Entonces I con la topología discreta es un espacio topológico localmemte compacto de Hausdorff. Entonces $C_0(I)$ es exactamente el conjunto de todas las familias $x = (x_i)_{i\in I}$ de números reales tales que el conjunto $\{i \in I : |x_i| \geq \epsilon\}$ es finito para cada $\epsilon > 0$. El retículo de Banach obtenido se denota habitualmente por $c_0(I)$. Notemos también que $c_0(I)$ es un ideal de $l^\infty(I)$, es decir, un subespacio vectorial de $l^\infty(I)$ tal que $x \in c_0(I)$, $y \in l^\infty(I)$ y $|y| \leq |x|$ implica $y \in c_0(I)$.

5) Un espacio normado de Riesz $(V, \leq, \|\cdot\|)$ se llama (KB)-espacio si se verifica la siguiente condición: Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de V tal que $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\bigvee_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ es convergente en norma.

6) Un espacio normado de Riesz $(V, \leq, \|\cdot\|)$ se dice que es un (AM)-espacio si se verifica la siguiente condición: Si $x, y \in V$ y $x, y \geq 0$, entonces $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$. De acuerdo con [17, Prop. 7.2, p. 102], si $(V, \leq)$ es un espacio de Riesz que posee una unidad ordenada arquimediana u, entonces el (OUN)-espacio $(V, \leq, u)$ es un (AM)-espacio.

7) Sean $(E, \leq)$ un espacio de Riesz, ρ una seminorma sobre E verificando las dos propiedades siguientes: i) $\rho(|x|) = \rho(x)$ para todo $x \in E$; ii) $0 \leq x \leq y \Longrightarrow \rho(x) \leq \rho(y)$, y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida clásico, es decir, Σ es un álgebra de Boole σ-completa de subconjuntos de Ω y $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ es una medida σ-aditiva. Consideremos el espacio vectorial $M(\Omega, E)$ sobre $\mathbb{R}$ de todas las aplicaciones $f : \Omega \longrightarrow E$ que son $(\Sigma, \mathcal{B}(E))$-medibles, siendo $\mathcal{B}(E)$ el álgebra de Boole σ-completa de los subconjuntos borelianos de (E, ρ). Sea $M_\mu(\Omega, E)$ el subespacio vectorial de $M(\Omega, E)$ de todos los elementos $f \in M(\Omega, E)$ tales que $\int_\Omega (\rho \circ f)(x)\, d\mu(x) < +\infty$. Dotado del orden canónico $\leq$, el par $(M_\mu(\Omega, E), \leq)$ es un espacio de Riesz. Pongamos $\rho_\mu(f) = \int_\Omega (\rho \circ f)(x)\, d\mu(x)$ para todo $f \in M_\mu(\Omega, E)$. Entonces ρ_μ es una seminorma sobre $M_\mu(\Omega, E)$ verificando las dos propiedades siguientes: i) $\rho_\mu(|f|) = \rho_\mu(f)$ y ii) $0 \leq f \leq g \Longrightarrow \rho_\mu(f) \leq \rho_\mu(g)$.

A partir de la terna $(M_\mu(\Omega,E),\leq,\rho_\mu)$ es posible construir un espacio normado de Riesz $(V,\leq,\|\cdot\|)$ mediante el siguiente procedimiento:

Sea $J_\mu = \{f \in M_\mu(\Omega,E) : \rho_\mu(f) = 0\}$. Es fácil probar que J_μ es un ideal de $(M_\mu(\Omega,E),\leq)$. Sean $V = M_\mu(\Omega,E)/J_\mu$ el espacio vectorial cociente y $q : M_\mu(\Omega,E) \longrightarrow V$ la proyección canónica. Pongamos $\|q(f)\| = \rho_\mu(f)$ para todo $f \in M_\mu(\Omega,E)$. Es fácil verificar que $\|\cdot\|$ está bien definida y que es una norma sobre V. De acuerdo con [17, Prop. 2.6, p. 59], V dotado del orden parcial $\leq$ definido por la fórmula:

$$q(f) \leq q(g) \iff \text{existen } f_1, g_1 \in M_\mu(\Omega,E) \text{ tales que } f_1 - f \in J_\mu,\ g_1 - g \in J_\mu \text{ y } f_1 \leq g_1$$

es un espacio de Riesz y $q : (M_\mu(\Omega,E),\leq) \longrightarrow (V,\leq)$ es un homomorfismo de retículos.

Probemos finalmente que $\|\cdot\|$ es una norma de Riesz sobre V.

Puesto que q es un homomorfismo de retículos se tiene que $|q(f)| = q(|f|)$ para todo $f \in M_\mu(\Omega,E)$. Entonces $\|\,|q(f)|\,\| = \|q(|f|)\| = \rho_\mu(|f|) = \rho_\mu(f) = \|q(f)\|$ para todo $f \in M_\mu(\Omega,E)$.

Sean $f,g \in M_\mu(\Omega,E)$ tales que $0 \leq q(f) \leq q(g)$. Entonces existen $h, f_1, f_2, g_1 \in M_\mu(\Omega,E)$ tales que $h - 0 \in J_\mu$, $f_1 - f \in J_\mu$, $f_2 - f \in J_\mu$, $g_1 - g \in J_\mu$, $h \leq f_1$ y $f_2 \leq g_1$. Sean $f' = f_1 - h$ y $g' = g_1 - f_2 + f_1 - h$. Se verifica fácilmente que $f' - f \in J_\mu$, $g' - g \in J_\mu$ y $0 \leq f' \leq g'$. Entonces $\rho_\mu(f') \leq \rho_\mu(g')$, de donde $\|q(f)\| = \|q(f')\| = \rho_\mu(f') \leq \rho_\mu(g') = \|q(g')\| = \|q(g)\|$.

8) Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida clásico. Si, en el ejemplo anterior, se escoge como E el espacio vectorial $I\!R$ sobre $I\!R$, $\leq$ el orden total habitual sobre $I\!R$ y ρ el valor absoluto en $I\!R$, se obtiene el espacio normado de Riesz $L^1\big((\Omega,\Sigma,\mu);I\!R\big)$.

9) Sean (Ω,Σ,μ) un espacio de medida clásico y $p \in I\!R$ tal que $1 < p < +\infty$. Sea $M^p_\mu(\Omega)$ el subespacio vectorial de $M(\Omega) = M(\Omega,I\!R)$ de todos los elementos $f \in M(\Omega)$ tales que $\int_\Omega |f(x)|^p\, d\mu(x) < +\infty$. Dotado del orden canónico $\leq$, el par $(M^p_\mu(\Omega),\leq)$ es un espacio de Riesz. Pongamos $\rho_p(f) = \big(\int_\Omega |f(x)|^p\, d\mu(x)\big)^{1/p}$ para todo $f \in M^p_\mu(\Omega)$. Entonces ρ_p es una seminorma sobre $M^p_\mu(\Omega)$ verificando las propiedades i) y ii) del ejemplo 7. Además, el conjunto de las funciones $f \in M^p_\mu(\Omega)$ que son μ-nulas coincide con el conjunto $J_p = \{f \in M^p_\mu(\Omega) : \rho_p(f) = 0\}$. Claramente J_p es un ideal de $(M^p_\mu(\Omega),\leq)$. Pongamos $L^p(\Omega,\Sigma,\mu) = M^p_\mu(\Omega)/J_p$. Mediante un procedimiento análogo al llevado a cabo en el ejemplo 7 se deduce que $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ es un espacio normado de Riesz. Se puede probar además que $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ es un retículo de Banach Dedekind-completo.

10) Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida clásico. Una aplicación $f \in M(\Omega)$ se dice <u>esencialmente acotada</u> si existe $\alpha \in I\!R_+$ tal que $|f(\omega)| \leq \alpha$ para todo $\omega \in \Omega$ excepto un conjunto μ-nulo, y a este α se le llama <u>cota superior esencial</u> de f. Entonces el conjunto $M^\infty_\mu(\Omega)$ de todas las aplicaciones esencialmente acotadas de $M(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $M(\Omega)$ que dotado del orden canónico $\leq$ es un espacio de Riesz. Pongamos $\rho_\infty(f) = \bigwedge\{\alpha \in I\!R_+ : \alpha \text{ es una cota superior esencial de } f\}$ para todo $f \in M^\infty_\mu(\Omega)$. Notemos que $\rho_\infty(f)$ es una cota superior esencial de f. Entonces ρ_∞ es una seminorma sobre $M^\infty_\mu(\Omega)$ verificando las propiedades i) y ii) del ejemplo 7. Además, $J_\infty = \{f \in M^\infty_\mu(\Omega) :$

$\rho_\infty(f) = 0\}$ es un ideal de $(M_\mu^\infty(\Omega), \leq)$. Pongamos $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = M_\mu^\infty(\Omega)/J_\infty$. Como en el ejemplo 7 se deduce que $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ es un espacio normado de Riesz.

4. Soportes de G-medidas

En lo sucesivo $G = (G, +, 0)$ denotará un grupo abeliano.

Si $\leq$ es una relación de orden parcial sobre G tal que $x, y \in G$ y $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $z \in G$, se dice que el par $(G, \leq)$ es un *po*-grupo. Si, además, para todo $x, y \in G$, $x \vee y$ y $x \wedge y$ existen en G, se dice que $(G, \leq)$ es un l-grupo. Si $(G, \leq)$ es un l-grupo y $x \in G$, se definen la parte positiva, la parte negativa y el valor absoluto de x por las fórmulas respectivas: $x^+ = x \vee 0$, $x^- = x \wedge 0$ y $|x| = x \vee (-x)$. Las siguientes identidades se siguen de [4, Chapter XIII, Formulae (15), (19), (21), (22), (23) and (35)]:

a) $x = x^+ + x^-$
b) $|x| \geq 0$
c) $x \neq 0 \Longrightarrow |x| > 0$
d) $|x| = x^+ - x^-$
e) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$
f) $|kx| = |k||x|$ para todo $k \in \mathbb{Z}$
g) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Se llama valoración sobre G a toda aplicación $\rho : G \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que satisface los siguientes axiomas:

i) $\rho(-x) = \rho(x)$
ii) $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
iii) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Si ρ es una valoración sobre G, el par (G, ρ) recibe el nombre de grupo valorado. De acuerdo con [6, Chapter IX, §3.1, Prop. 3, p. 162] todo grupo valorado (G, ρ) es un grupo topológico metrizable cuya topología puede derivarse de la métrica invariante sobre G: $d(x, y) = \rho(x - y)$ $(x, y \in G)$.

Sean $(G, \leq)$ un *po*-grupo y ρ una valoración sobre G. Se dice que ρ es una m-valoración sobre $(G, \leq)$ si $x, y \in G$ y $0 \leq x \leq y$ implica $\rho(x) \leq \rho(y)$ y la terna $(G, \leq, \rho)$ recibe el nombre de *po*-grupo m-valorado. Cuando el *po*-grupo $(G, \leq)$ es también un l-grupo, supondremos además que $\rho(|x|) = \rho(x)$ para todo $x \in G$ y diremos que la terna $(G, \leq, \rho)$ es un l-grupo m-valorado.

Ejemplos 4.1. 1) Sean $(V, \leq, u)$ un (OUN)-espacio y $(V, +, 0)$ el grupo aditivo de V. Entonces $(V, +, 0, \leq, \rho_u)$ es un *po*-grupo m-valorado.

2) Sean $(V, \leq, \|\cdot\|)$ un espacio normado de Riesz y $(V, +, 0)$ el grupo aditivo de V. Entonces $(V, +, 0, \leq, \|\cdot\|)$ es un l-grupo m-valorado.

3) Sean $\leq$ la relación de orden total habitual sobre $\mathbb{R}$, $[0, 1]$ el intervalo en $(\mathbb{R}, \leq)$ de 0 a 1 y $G = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\}$. Consideremos el grupo abeliano

$G = (G, +, 0)$. Dotado del orden canónico $\leq$, el par $(G, \leq)$ es un l-grupo. Además, la aplicación $\rho : G \longrightarrow I\!R_+$ definida por la fórmula:

$$\rho(f) = \int_0^1 \sqrt{|f(x)|}\, dx$$

es una valoración sobre G. Se puede verificar que la terna $(G, \leq, \rho)$ es un l-grupo m-valorado. Notemos que $\rho(\lambda f) \neq |\lambda|\rho(f)$ si $\lambda \in I\!R$, $\lambda \neq 0$ y $|\lambda| \neq 1$.

4) Consideremos el grupo multiplicativo conmutativo $(I\!R_+ \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Dotado de la relación de orden parcial $\leq$ sobre $I\!R_+ \setminus \{0\}$ definida por la fórmula: $x \leq y \iff x^{-1}y \in I\!N$, el sistema $(I\!R_+ \setminus \{0\}, \cdot, 1, \leq)$ es un po-grupo que no es un l-grupo, porque no existe el supremo del conjunto $\{1, \pi\}$. Además, la aplicación $\rho : I\!R_+ \setminus \{0\} \longrightarrow I\!R_+$ definida por la fórmula $\rho(x) = |\log x|$ es una valoración sobre $(I\!R_+ \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Finalmente, se puede verificar que $(I\!R_+ \setminus \{0\}, \cdot, 1, \leq, \rho)$ es un po-grupo m-valorado.

5) Consideremos el grupo abeliano $(2^{I\!N}, +, \emptyset)$ donde $x + y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ para todo $x, y \in 2^{I\!N}$. Dotado de la relación de orden parcial $\leq$ sobre $2^{I\!N}$ dada por la igualdad, $(2^{I\!N}, +, \emptyset, \leq)$ es un po-grupo que no es un l-grupo. Además, la aplicación $\rho : 2^{I\!N} \longrightarrow I\!R_+$ definida por la fórmula

$$\rho(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_x(i)}{\pi^i}$$

donde ψ_x es la función característica del conjunto x, es una valoración sobre $(2^{I\!N}, +, \emptyset)$. Trivialmente el sistema $(2^{I\!N}, +, \emptyset, \leq, \rho)$ es un po-grupo m-valorado.

En lo sucesivo $L = (L, \leq, ^\perp, 0, 1)$ denotará un conjunto ordenado ortomodular y $G = (G, +, 0, \leq, \rho)$ un po-grupo m-valorado.

Si $a, b \in L$ y $a \leq b^\perp$ diremos que a y b son ortogonales y escribiremos $a \perp b$. Si B es un subconjunto no vacío de L diremos que B es <u>ortogonal</u> si $a, b \in B$ y $a \neq b$ implica $a \perp b$. Se sigue del axioma e) de la definición de conjunto ordenado ortomodular que si F es un subconjunto finito y ortogonal de L, entonces $\bigvee F$ existe en L.

Se llama G-<u>medida</u> sobre L a toda aplicación $\mu : L \longrightarrow G$ tal que $a, b \in L$ y $a \perp b$ implica $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$.

Claramente si μ es una G-medida entonces $\mu(0) = 0$.

Ejemplos 4.2. 1) Sean A el anillo estrellado de Baer del ejemplo 2.13 (8), $L = P(A)$ y $c_0(I\!N) = (c_0(I\!N), +, 0, \leq, \|\cdot\|_\infty)$ (ejemplo 3.7 (4)). Si $e = (e_i)_{i \in I\!N}$ es un elemento de L, entonces $e_i = 0$ ó 1 para todo $i \in I\!N$. Pongamos

$$\mu(e) = \left(\frac{ie_i}{1 + i^2}\right)_{i \in I\!N}$$

para todo $e \in L$. Entonces μ es una $c_0(I\!N)$-medida sobre L.

2) Sean A el anillo estrellado de Baer del ejemplo 2.13 (10), $L = P(A)$ y $A_+ = \{a \in A :$ existe $b \in A$ tal que $a = b^*b\}$ y $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, 0, \leq, |\cdot|)$ (ejemplo 3.7 (1)). Se llama forma lineal positiva sobre A a toda aplicación lineal $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tau(a) \geq 0$ para todo $a \in A_+$. Sean τ una forma lineal positiva sobre A y $\mu = \tau|_L$. Entonces μ es una $\mathbb{R}$-medida sobre L.

3) Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ de dimensión infinita y con producto escalar $(\cdot|\cdot)$, A el anillo estrellado de Baer $(B(H), *)$ (ejemplo 2.13 (10)), $L = P(A)$, $(\varphi_i)_{i \in I}$ una base ortonormal de H y $l^\infty(I) = (l^\infty(I), +, 0, \leq, \|\cdot\|_\infty)$ (ejemplo 3.7 (2)). Para todo $f \in L$ pongamos $\mu(f) = \left((f\varphi_i|\varphi_i)\right)_{i \in I}$. Entonces μ es una $l^\infty(I)$-medida sobre L.

4) Consideremos el álgebra de Boole $2^{\mathbb{N}} = (2^{\mathbb{N}}, \subset, {}^c, \emptyset, \mathbb{N})$ donde a^c denota el conjunto complementario de $a \in 2^{\mathbb{N}}$ y $G = (G, +, 0, \leq, \rho)$ el l-grupo m-valorado del ejemplo 4.1 (3). Para todo $a \in 2^{\mathbb{N}}$ y $x \in [0,1]$ pongamos

$$\mu(a)(x) \doteq \sum_{k \in a} \frac{\sin k\pi x}{2^k}.$$

Entonces μ es una G-medida sobre $2^{\mathbb{N}}$.

5) Sean λ la medida de Lebesgue sobre $\mathcal{B}([0,1])$ y $G = (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \cdot, 1, \leq, \rho)$ el *po*-grupo m-valorado del ejemplo 4.1 (4). Para todo $a \in \mathcal{B}([0,1])$ pongamos $\mu(a) = e^{\lambda(a)}$. Entonces μ es una G-medida sobre $\mathcal{B}([0,1])$.

Sean $a, b \in L$ tales que $a \leq b$. Entonces $b \wedge a^\perp$ existe en L y será denotado por $b - a$. Notemos que $b - a \perp a$ y $b = a \vee (b - a)$ en virtud del axioma f) de la definición de conjunto ordenado ortomodular

Lema 4.3. *Toda G-medida μ sobre L es sustractiva, es decir, $a, b \in L$ y $a \leq b$ implica $\mu(b - a) = \mu(b) - \mu(a)$.*

Demostración. Puesto que $b - a \perp a$ y $b = a \vee (b - a)$ se tiene que $\mu(b) = \mu(a) + \mu(b - a)$, de donde $\mu(b) - \mu(a) = \mu(b - a)$.

Consideremos la siguiente relación binaria C sobre L: $a \,\mathrm{C}\, b$ si existe un subconjunto ortogonal $\{u, v, w\}$ de L tal que $a = u \vee v$ y $b = u \vee w$. Es fácil probar que si $a \,\mathrm{C}\, b$, entonces $a \,\mathrm{C}\, b^\perp$, $a^\perp \,\mathrm{C}\, b$, $a^\perp \,\mathrm{C}\, b^\perp$ y los elementos $a \wedge b$ y $a \vee b$ existen en L. Además, si $a \perp b$, entonces $a \,\mathrm{C}\, b$.

Lema 4.4. *Sea μ una G-medida sobre L. Si $a, b \in L$ y $a \,\mathrm{C}\, b$, entonces $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$.*

Demostración. Claramente el conjunto $\{a \wedge b, a - a \wedge b, b - a \wedge b\}$ es un subconjunto ortogonal de L. De acuerdo con [2, Theorems 12.1.3 and 12.2.2, pp. 126-127], se tiene que $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp)$, $b = (a \wedge b) \vee (a^\perp \wedge b)$, $a - a \wedge b = a \wedge (a^\perp \vee b^\perp) = (a \wedge a^\perp) \vee (a \wedge b^\perp) = a \wedge b^\perp$ y $b - a \wedge b = a^\perp \wedge b$. Entonces $a \vee b = (a \wedge b) \vee (a - a \wedge b) \vee (b - a \wedge b)$, de donde $\mu(a \vee b) = \mu(a \wedge b) + \mu(a - a \wedge b) + \mu(b - a \wedge b)$. De acuerdo con el lema 4.3, se tiene $\mu(a - a \wedge b) = \mu(a) - \mu(a \wedge b)$ y $\mu(b - a \wedge b) = \mu(b) - \mu(a \wedge b)$. Por lo tanto, $\mu(a \vee b) = \mu(a \wedge b) + \mu(a) - \mu(a \wedge b) + \mu(b) - \mu(a \wedge b)$, de donde $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b)$.

Una G-medida μ sobre L se dice positiva si $\mu(a) \geq 0$ para todo $a \in L$. Por ejemplo, las G-medidas de los ejemplos 4.2 (1) - 4.2 (3) son positivas.

Lema 4.5. *Toda G-medida positiva μ sobre A es monótona, es decir, $a, b \in L$ y $a \leq b$ implica $\mu(a) \leq \mu(b)$.*

Demostración. De acuerdo con el lema 4.3, se tiene que $\mu(b) - \mu(a) = \mu(b - a) \geq 0$, de donde $\mu(b) \geq \mu(a)$.

Sea μ una G-medida sobre L. Se dice que

i) μ satisface la condición de Jauch-Piron si $a, b \in L$ y $\mu(a) = \mu(b) = 0$ implica que existe un elemento $c \in L$ tal que $c \geq a$, $c \geq b$ y $\mu(c) = 0$.

ii) μ tiene soporte si existe un elemento $a \in L$ tal que $a^{\perp}$ es el último elemento del conjunto $\{b \in L : \mu(b) = 0\}$. Claramente si el elemento $a \in L$ existe, es único y se denota por $\mathrm{supp}(\mu)$.

Si la G-medida μ es positiva y tiene soporte, se puede probar que $\{b \in L : \mu(b) = 0\}$ $= \{b \in L : b \perp \mathrm{supp}(\mu)\}$. Además, si L es un retículo ortomodular, entonces μ satisface la condición de Jauch-Piron si y sólo si $a, b \in L$ y $\mu(a) = \mu(b) = 0 \Longrightarrow \mu(a \vee b) = 0$. Notemos que si L es un álgebra de Boole, entonces toda G-medida positiva sobre L satisface la condición de Jauch-Piron en virtud del lema 4.4.

Ejemplo 4.6. Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con producto escalar $(\cdot|\cdot)$ y $L = P(B(H))$. Escojamos un vector $\varphi \in H$ tal que $\|\varphi\| = 1$. Consideremos la aplicación $\mu : L \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula: $\mu(a) = (a\varphi|\varphi)$. Entonces μ es una $\mathbb{R}$-medida positiva sobre L tal que $\mathrm{supp}(\mu) = b_\varphi$ donde $b_\varphi\psi = (\varphi|\psi)\varphi$ para todo $\psi \in H$. Notemos también que μ satisface la condición de Jauch-Piron.

Sea $(x_i)_{i \in I}$ una familia no vacía de elementos de G. Designemos por $\mathcal{F}(I)$ el conjunto de todas las partes finitas y no vacías de I, y supongamos que $\mathcal{F}(I)$ está dirigido por $\supset$. Para cada $F \in \mathcal{F}(I)$ pongamos $s_F = \sum_{i \in F} x_i$. Entonces $(s_F)_{F \in \mathcal{F}(I)}$ es una red en G. Si esta red es d-convergente diremos que la familia es sumable en G y el límite $d\text{-}\lim_{F \in \mathcal{F}(I)} s_F$ se llama la suma de la familia $(x_i)_{i \in I}$ y se denota por el símbolo $\sum_{i \in I} x_i$.

Lema 4.7. *Sea $(x_i)_{i \in I}$ una familia de elementos de G. Si $(x_i)_{i \in I}$ es sumable en G, entonces para todo número real $\epsilon > 0$ existe $J_\epsilon \in \mathcal{F}(I)$ tal que $\rho(\sum_{i \in J} x_i) < \epsilon$ siempre que $J \in \mathcal{F}(I)$ y $J \cap J_\epsilon = \emptyset$.*

Demostración. Sea $s = \sum_{i \in I} x_i$. Entonces existe $J_\epsilon \in \mathcal{F}(I)$ tal que $K \in \mathcal{F}(I)$ y $K \supset J_\epsilon$ implica $d\left(s, \sum_{i \in K} x_i\right) < \frac{1}{2}\epsilon$. Sea $J \in \mathcal{F}(I)$ tal que $J \cap J_\epsilon = \emptyset$. Entonces $K = J \cup J_\epsilon \supset J_\epsilon$ y $\sum_{i \in J} x_i = \sum_{i \in K} x_i - \sum_{i \in J_\epsilon} x_i$. Puesto que $d\left(s, \sum_{i \in K} x_i\right) < \frac{1}{2}\epsilon$ y $d\left(s, \sum_{i \in J_\epsilon} x_i\right) < \frac{1}{2}\epsilon$, se deduce que $\rho(\sum_{i \in J} x_i) < \epsilon$.

Sea μ una G-medida sobre L. Se dice que

a) μ es numerablemente aditiva si para toda sucesión ortogonal $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de L tal que $\bigvee_{i=0}^{\infty} a_i$ existe en L se tiene que

$$\mu\left(\bigvee_{i=0}^{\infty} a_i\right) = d\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(a_i).$$

b) μ es completamente aditiva si para toda familia ortogonal $(a_i)_{i\in I}$ de elementos de L tal que $\bigvee_{i\in I} a_i$ existe en L la familia $\left(\mu(a_i)\right)_{i\in I}$ es sumable en G y

$$\sum_{i\in I} \mu(a_i) = \mu\left(\bigvee_{i\in I} a_i\right).$$

Ejemplos 4.8. 1) La G-medida del ejemplo 4.2 (1) es solamente numerablemente aditiva, porque cada familia ortogonal de $L\setminus\{0\}$ es finita o numerable.

2) La G-medida del ejemplo 4.2 (3) es completamente aditiva.

3) La G-medida del ejemplo 4.2 (4) es solamente numerablemente aditiva, porque cada familia ortogonal de $L\setminus\{\emptyset\}$ es finita o numerable.

4) La G-medida del ejemplo 4.2 (5) es numerablemente aditiva, pero no completamente aditiva ya que λ no es completamente aditiva.

Teorema 4.9. *Supongamos que L sea un retículo ortomodular completo. Entonces para toda G-medida positiva y numerablemente aditiva μ sobre L las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) μ tiene soporte.

ii) μ es completamente aditiva y satisface la condición de Jauch-Piron.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Sea $a = \operatorname{supp}(\mu)$. Para probar que μ satisface la condición de Jauch-Piron, sean $a_1, b_1 \in L$ tales que $\mu(a_1) = \mu(b_1) = 0$. Entonces $a_1 \leq a^{\perp}$ y $b_1 \leq a^{\perp}$, de donde $a_1 \vee b_1 \leq a^{\perp}$. Por lo tanto $a_1 \vee b_1 \perp a$, de lo que se concluye que $\mu(a_1 \vee b_1) = 0$.

Para probar que μ es completamente aditiva, sea $(a_i)_{i\in I}$ una familia ortogonal de elementos de L. Escribamos $a = \bigvee_{i\in I} a_i$ y $J = \{i \in I : \mu(a_i) \neq 0\}$. Podemos suponer que J es infinito. Puesto que G es un grupo topológico metrizable existe un sistema fundamental numerable de d-entornos de 0, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $J_n = \{i \in J : \mu(a_i) \notin U_n\}$. Probemos que cada J_n es un conjunto finito. Supongamos lo contrario. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que J_m es infinito. Sea M un subconjunto numerable de J_m y σ una biyección de M sobre $\mathbb{N}$. Como μ es una G-medida numerablemente aditiva sobre L se tiene que

$$\mu\left(\bigvee_{i=0}^{\infty} a_{\sigma(i)}\right) = d\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(a_{\sigma(i)}).$$

Como consecuencia, $d\text{-}\lim_{i\to\infty}\mu(a_{\sigma(i)}) = 0$, lo que contradice la hipótesis de que $\mu(a_{\sigma(i)}) \notin U_m$ para todo $i \in I\!N$.

Puesto que G es un espacio topológico de Hausdorff, resulta que $J \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ y, por lo tanto, J es un conjunto numerable. Pongamos $b = \bigvee_{j\in J} a_j$ y $c = \bigvee_{i\in I\setminus J} a_i$. Probemos que $b \perp c$. Sea $i \in I\setminus J$. Puesto que $a_j \perp a_i$ para todo $j \in J$, se tiene que $a_j \leq a_i^{\perp}$ para todo $j \in J$. Entonces $b \leq a_i^{\perp}$, de donde $b \perp a_i$ para todo $i \in I\setminus J$. Por consiguiente, $b \perp c$. Claramente $b \vee c = a$, de donde $\mu(b) + \mu(c) = \mu(a)$. Sea $i \in I\setminus J$. Entonces $\mu(a_i) = 0$. Por lo tanto $a_i \leq a^{\perp}$ para todo $i \in I\setminus J$, de donde $c \leq a^{\perp}$. Esto establece trivialmente que la familia $(\mu(a_i))_{i\in I\setminus J}$ es sumable en G y $\sum_{i\in I\setminus J}\mu(a_i) = 0 = \mu(c)$.

Sea σ una biyección de $I\!N$ sobre J. La aditividad numerable de μ implica que la serie $\sum_{i=0}^{\infty}\mu(a_{\sigma(i)})$ es conmutativamente d-convergente en G. De acuerdo con [5, Chapter III, §5.7, Prop. 9, p. 270], la familia $(\mu(a_{\sigma(i)}))_{i\in J}$ es sumable en G y $\sum_{i\in I\!N}\mu(a_{\sigma(i)}) = \mu(b)$. De acuerdo con [5, Chapter III, §5.1, Remark 2, p. 262], la familia $(\mu(a_i))_{i\in J}$ es sumable en G y $\sum_{i\in J}\mu(a_i) = \mu(b)$. Utilizando [5, Chapter III, §5.3, Prop. 3, p. 266] se concluye que la familia $(\mu(a_i))_{i\in I}$ es sumable en G y $\sum_{i\in I}\mu(a_i) = \mu(b) + \mu(c) = \mu(a)$.

ii) $\Rightarrow$ i) Observemos que si μ es una G-medida estrictamente positiva sobre L, es decir, $\mu(a) > 0$ para todo $a \in L\setminus\{0\}$, entonces $\mathrm{supp}(\mu) = 1$. Supongamos entonces que existe $a \in L\setminus\{0\}$ tal que $\mu(a) = 0$. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}, \subset)$ de subconjuntos no vacíos F de L satisfaciendo las siguientes propiedades:

a) Cada F es ortogonal.

b) $b \in F \Longrightarrow b \neq 0$.

c) $b \in F \Longrightarrow \mu(b) = 0$.

Puesto que $F = \{a\} \in \mathcal{F}$, el conjunto $\mathcal{F}$ es no vacío. Sean $\mathcal{T}$ un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$ y $T = \bigcup_{F\in\mathcal{T}} F$. Trivialmente T satisface b) y c). Sean $a_1, a_2 \in T$. Entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{T}$ tales que $a_1 \in F_1$ y $a_2 \in F_2$. Como $\mathcal{T}$ es totalmente ordenado se puede suponer que $F_1 \subset F_2$. Entonces $a_1, a_2 \in F_2$ y por lo tanto $a_1 \perp a_2$. En consecuencia, $\mathcal{T} \in \mathcal{F}$. De acuerdo con [7, Chapter III, §2.4, Coro. 2, p.155], el conjunto $(\mathcal{F}, \subset)$ contiene un elemento maximal F_0. Por lo tanto, F_0 satisface las condiciones a), b) y c). Sea $a_0 = \bigwedge_{b\in F_0} b^{\perp}$. Puesto que μ es una G-medida completamente aditiva sobre L, se tiene que $\mu(a_0^{\perp}) = \sum_{b\in F_0}\mu(b) = 0$. Sea $c \in L$ tal que $\mu(c) = 0$. Entonces $\mu(c \vee a_0^{\perp}) = 0$ por la condición de Jauch-Piron. Pongamos $e = (c \vee a_0^{\perp}) - a_0^{\perp}$. Puesto que $e = (c \vee a_0^{\perp}) \wedge a_0 \leq a_0 = (a_0^{\perp})^{\perp}$, se deduce que $e \perp a_0^{\perp}$. Por lo tanto, $e \perp b$ para todo $b \in F_0$. Además, de acuerdo con el lema 4.3, se tiene que $\mu(e) = \mu(c \vee a_0^{\perp}) - \mu(a_0^{\perp}) = 0$. Supongamos que $e \neq 0$. Entonces el conjunto $F_0 \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ y $F_0 \cup \{e\}$ contendría propiamente a F_0, lo que contradice la maximalidad de F_0. Por lo tanto, $c \leq c \vee a_0^{\perp} = a_0^{\perp}$, de donde se deduce que $a_0 = \mathrm{supp}(\mu)$.

El corolario siguiente generaliza un interesante resultado de Maeda [16, Prop. 1.11, p. 239]:

Corolario 4.10. *Sean $(A, *)$ un anillo estrellado de Baer y $L = P(A)$. Entonces para toda G-medida positiva y numerablemente aditiva μ sobre L las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) μ tiene soporte.

ii) μ es completamente aditiva y satisface la condición de Jauch-Piron.

Demostración. Basta aplicar los teoremas 2.11 y 4.9.

Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ con producto escalar $(\cdot|\cdot)$. En lo sucesivo A denotará un ágebra de von Neumann sobre H.

Claramente, $P(A) \subset A_+ = \{a \in A : \text{ existe } b \in A \text{ tal que } a = b^*b\} \subset A_h = \{a \in A : a^* = a\}$. Definamos sobre A_h la relación binaria $\leq$ por la fórmula: $a \leq b \iff b - a \in A_+$. Es fácil entonces verificar que $a \leq b \implies x^*ax \leq x^*bx$ para todo $x \in A$. Además, de acuerdo con [19, Prop. 2.12, p. 35] resulta que $a \in A_+ \iff (a\varphi|\varphi) \geq 0$ para todo $\varphi \in H$. Se deduce entonces que $(A_h, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que $0 \leq e$ para todo $e \in P(A)$.

El siguiente lema establece que la relación de orden parcial $\leq$ sobre A_h extiende la relación de orden parcial sobre $P(A)$ definida en la sección 2:

Lema 4.11. *Sean $e, f \in P(A)$. Entonces $f - e \in A_+ \iff ef = e$.*

Demostración. Supongamos que $f - e \in A_+$. Entonces $0 \leq e \leq f$. Por lo tanto, $0 \leq (1-f)e(1-f) \leq (1-f)f(1-f) = 0$, de donde $(1-f)e(1-f) = 0$. Pero $(1-f)e(1-f) = [(1-f)e][(1-f)e]^*$. Entonces el lema 2.9 implica que $(1-f)e = 0$, de donde $fe = e$. Por consiguiente, $ef = e$.

Supongamos que $ef = e$. Entonces $fe = e$. De acuerdo con el lema 2.2, $1 - e \in P(A)$. Por lo tanto, $e \leq 1$, de donde $e = fef \leq f$.

Lema 4.12. *Sean $a, b \in A_+$. Si $ab = ba$ entonces $ab \in A_+$.*

Demostración. De acuerdo con [20, Chapter 41, Theorem 3, p. 528], existen dos únicos elementos $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in A_+$ tales que $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$ y $a\sqrt{b} = \sqrt{b}\,a$. Puesto que $(\sqrt{a}\sqrt{b})^*(\sqrt{a}\sqrt{b}) = (\sqrt{b}\sqrt{a})(\sqrt{a}\sqrt{b}) = \sqrt{b}\,a\,\sqrt{b} = a(\sqrt{b})^2 = ab$, se deduce que $ab \in A_+$.

Lema 4.13. *Sean $e, f \in P(A)$. Entonces $RP(e + f) = e \vee f$.*

Demostración. Escribamos $x = e + f$ y $g = RP(x)$. Puesto que $e \leq e \vee f$ y $f \leq e \vee f$, se tiene, de acuerdo con el lema 4.11, que $e(e \vee f) = e$ y $f(e \vee f) = f$, de donde $(e + f)(e \vee f) = e + f$. Por lo tanto, el lema 2.10 (vi) implica que $g \leq e \vee f$. Por otra parte, $xg = x$, de donde $(1-g)e(1-g) + (1-g)f(1-g) = (1-g)x(1-g) = 0$. Puesto que $a \leq a + b$ para todo $a, b \in A_+$, se deduce que $0 = (1-g)e(1-g) = [(1-g)e][(1-g)e]^*$. El lema 2.9 implica que $(1-g)e = 0$, de donde $e \leq g$. Igualmente se prueba que $f \leq g$. Por lo tanto, $e \vee f = g$.

Una forma lineal positiva τ sobre A se llama <u>normal</u> si para todo subconjunto filtrante superiormente D de A_+ tal que $x_0 = \bigvee D$ existe en A_+, se tiene $\tau(x_0) = \bigvee_{a\in D} \tau(a)$.

Proposición 4.14. *Sean $L = P(A)$ y τ una forma lineal positiva normal sobre A. Si $\mu = \tau|_L$, entonces μ es una $I\!R$-medida positiva completamente aditiva sobre L que satisface la condición de Jauch-Piron.*

Demostración. Del ejemplo 4.2 (2) se sabe que μ es una $I\!R$-medida positiva sobre L.

Para probar que μ es completamente aditiva, sea $(e_i)_{i\in I}$ una familia ortogonal de elementos de L. Escribamos $e = \bigvee_{i\in I} e_i$ y consideremos el conjunto dirigido $(\mathcal{F}(I), \supset)$. Entonces $D = \{\bigvee_{j\in J} e_j : J \in \mathcal{F}(I)\}$ es un subconjunto filtrante superiormente de $(A_+, \leq)$ tal que $e = \bigvee D$ en A_+. Entonces $\tau(e) = \bigvee\{\tau(\bigvee_{j\in J} e_j) : J \in \mathcal{F}(I)\}$. Para cada $J \in \mathcal{F}(I)$ pongamos $s_J = \sum_{j\in J} \mu(e_j)$. Puesto que μ es una $I\!R$-medida positiva sobre L, el lema 4.5 implica que $s_J = \mu\left(\bigvee_{j\in J} e_j\right) \leq \mu(e)$ para todo $J \in \mathcal{F}(I)$. De acuerdo con [5, Chapter IV, §7.1, Theorem 1, p. 364], la familia $\left(\mu(e_i)\right)_{i\in I}$ es sumable en $I\!R$ y $\sum_{i\in I} \mu(e_i) = \bigvee\{s_J : J \in \mathcal{F}(I)\}$. En consecuencia, $\sum_{i\in I} \mu(e_i) = \tau(e) = \mu(e)$.

Sea $a \in A_+$ tal que $\tau(a) = 0$. Puesto que $a^* = a$, el lema 2.10 (v) implica que $RP(a) = LP(a)$. Probemos que $\tau(RP(a)) = 0$. De acuerdo con [19, Coro. 2.2, p. 48], existe una sucesión creciente $(e_n)_{n\in I\!N\setminus\{0\}}$ de elementos de L tal que $RP(a) = \bigvee_{n=1}^{\infty} e_n$, $ae_n = e_n a$ y $ae_n \geq \frac{1}{n} e_n$ para todo $n \in I\!N\setminus\{0\}$. Entonces $a(1-e_n) = (1-e_n)a$ para todo $n \in I\!N\setminus\{0\}$. Por lo tanto, el lema 4.12 implica que $a(1-e_n) \in A_+$, de donde $ae_n \leq a$ para todo $n \in I\!N\setminus\{0\}$. Puesto que τ es una forma lineal positiva, se tiene que $0 \leq \frac{1}{n}\tau(e_n) \leq \tau(ae_n) = 0$, de donde $\tau(e_n) = 0$ para todo $n \in I\!N\setminus\{0\}$. Puesto que τ es normal, se concluye que $\tau(RP(a)) = \bigvee_{n\in I\!N\setminus\{0\}} \tau(e_n) = 0$.

Para probar que μ satisface la condición de Jauch-Piron, sean $e, f \in P(A)$ tales que $\mu(e) = \mu(f) = 0$. De acuerdo con el lema 4.13 se tiene que $RP(e+f) = e \vee f$. Puesto que $\tau(e+f) = \tau(e) + \tau(f) = 0$ y $e+f \in A_+$, resulta que $\tau(e\vee f) = 0$, de donde $\mu(e\vee f) = 0$.

Corolario 4.15. ([8, Chap. I, §4.6, Prop. 3, p. 57]). *Sea τ una forma lineal positiva normal sobre A. El conjunto $\{e \in P(A) : \tau(e) = 0\}$ tiene un último elemento f tal que $\tau(af) = \tau(fa) = 0$ para todo $a \in A$.*

Demostración. Sean $L = P(A)$ y $\mu = \tau|_L$. De acuerdo con la proposición 4.14, μ es una $I\!R$-medida positiva completamente aditiva sobre L que satisface la condición de Jauch-Piron. Entonces, en particular, μ es una $I\!R$-medida positiva numerablemente aditiva. Entonces el corolario 4.10 implica que μ tiene soporte. Sea $f = 1 - \mathrm{supp}(\mu)$. Entonces f es el último elemento del conjunto $\{e \in L : \mu(e) = 0\} = \{e \in P(A) : \tau(e) = 0\}$.

Sea $a \in A$. De acuerdo con la desigualdad de Cauchy-Schwarz [19, Prop. 5.3, p. 122] se tiene:

$$|\tau(af)|^2 \leq \tau(aa^*)\tau(f) \quad \text{y} \quad |\tau(fa)|^2 \leq \tau(f)\tau(aa^*).$$

Puesto que $\tau(f) = 0$ se concluye que $\tau(af) = \tau(fa) = 0$.

La proyección $1 - f$ en L se llama soporte de τ.

El siguiente resultado generaliza [14, Prop. 3.1, p. 127]:

Proposición 4.16. *Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ tal que $\dim(H) \geq 3$, $A = B(H)$, $L = P(A)$ y μ una $\mathbb{R}$-medida positiva completamente aditiva sobre L. Entonces para todo $e \in L$ y todo número real $\epsilon > 0$, existe un elemento $f \in L$ de rango finito tal que $f \leq e$ y $\mu(e - f) < \epsilon$.*

Demostración. Sea $\lambda(\cdot) = \dfrac{\mu(\cdot)}{\mu(H)}$. Puesto que λ es una $\mathbb{R}$-medida positiva numerablemente aditiva tal que $\lambda(H) = 1$, la generalización de Maeda [16, Theorem 2.3, p. 241] del teorema clásico de Gleason [11] implica que existe un operador de traza $x \in A_+$ tal que $\mathrm{tr}(x) = 1$ y $\lambda(e) = \mathrm{tr}(xe)$ para todo $e \in L$.

Sean $e \in L$ de rango infinito y $\epsilon > 0$. Pongamos $M = e(H)$ y sea $(\varphi_i)_{i \in I}$ una base ortonormal de M. Entonces la familia $\big((x\varphi_i|\varphi_i)\big)_{i \in I}$ es sumable en $\mathbb{R}$ y $\mathrm{tr}(xe) = \sum_{i \in I}(x\varphi_i|\varphi_i)$. De acuerdo con el lema 4.7, existe $J_\epsilon \in \mathcal{F}(I)$ tal que $0 \leq \sum_{i \in J}(x\varphi_i|\varphi_i) < \frac{\epsilon}{2\mu(H)}$ siempre que $J \in \mathcal{F}(I)$ y $J \cap J_\epsilon = \emptyset$. Entonces

$$\sum_{i \in I \setminus J_\epsilon} (x\varphi_i|\varphi_i) \leq \frac{\epsilon}{2\mu(H)} < \frac{\epsilon}{\mu(H)}.$$

Sea $f = \sum_{i \in J_\epsilon} e_{\varphi_i}$, donde e_{φ_i} es el elemento de L determinado por la fórmula $e_{\varphi_i}\psi = (\varphi_i|\psi)\varphi_i$ para todo $\psi \in H$. Entonces $f \in L$ y $f \leq e$. Además, se tiene $\lambda(e - f) = \mathrm{tr}(x(e-f)) = \mathrm{tr}(xe) - \mathrm{tr}(xf) = \sum_{i \in I}(x\varphi_i|\varphi_i) - \sum_{i \in J_\epsilon}(x\varphi_i|\varphi_i) = \sum_{i \in I \setminus J_\epsilon}(x\varphi_i|\varphi_i) < \frac{\epsilon}{\mu(H)}$, de donde $\mu(e - f) = \mu(H)\lambda(e - f) < \epsilon$.

5. Descomposición de Yosida-Hewitt

En esta sección $L = (L, \leq, ^\perp, 0, 1)$ denota un conjunto ordenado ortomodular y $G = (G, +, 0, \leq, \rho)$ un l-grupo m-valorado.

Un l-grupo K se dice que es condicionalmente completo si para todo subconjunto no vacío y acotado D de K, $\bigvee D$ y $\bigwedge D$ existen en K.

Lema 5.1. *Para todo l-grupo $K = (K, +, 0, \leq)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) K es condicionalmente completo.

ii) Para todo subconjunto no vacío y acotado superiormente D de K, $\bigvee D$ existe en K.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii) Se sigue de [4, Chapter V, §3, Theorem 9, p. 115].

ii) $\Rightarrow$ i) Sea D un subconjunto no vacío y acotado de K. Entonces la hipótesis implica que $\bigvee D$ existe en K. Sea $E = -D$. Entonces E es no vacío. Puesto que $a \leq b \iff -b \leq -a$ para todo $a, b \in K$, cada cota inferior de D es una cota superior de E. Por lo tanto, E es un subconjunto acotado superiormente de K. Entonces $x = \bigvee E$ existe en K. Es fácil comprobar que $-x = \bigwedge D$.

Observación 5.2. Supongamos que K sea un l-grupo condicionalmente completo. Entonces para todo $a \in K$ y todo subconjunto no vacío y acotado superiormente D de K, se verifica:

i) $\bigwedge D = -\bigvee(-D)$

ii) $a + \bigvee D = \bigvee(a + D)$ (ver [4, Chapter XIII, Formula (8), p. 292]).

Diremos que ρ satisface la condición (oc) si para todo subconjunto no vacío D de G tal que $D \downarrow 0$, se verifica que $d\text{-}\lim \mathcal{F}(D) = 0$.

Ejemplos 5.3. 1) Sea G el l-grupo m-valorado derivado del ejemplo 3.7 (1). Entonces G es condicionalmente completo y $\rho =$"norma euclídea" satisface la condición (oc).

2) Sea G el l-grupo m-valorado derivado del ejemplo 3.7 (2). Entonces G es condicionalmente completo y $\rho = \|\cdot\|_\infty$ no satisface la condición (oc).

3) Sea G el l-grupo m-valorado derivado del ejemplo 3.7 (4). Entonces G es condicionalmente completo y $\rho = \|\cdot\|_\infty$ satisface la condición (oc).

4) Sea $V = (V, \leq, \|\cdot\|)$ un (KB)-espacio que es, al mismo tiempo, un retículo de Banach (ejemplo 3.7 (5)). Entonces el l-grupo m-valorado derivado de V es condicionalmente completo y $\rho = \|\cdot\|$ satisface la condición (oc).

5) Sea G el l-grupo m-valorado derivado del ejemplo 3.7 (9). Entonces G es condicionalmente completo y $\rho = \|\cdot\|_p$ satisface la condición (oc).

Dotado del orden canónico $\leq$, G^L es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea μ una G-medida positiva sobre L. Se dice que μ es débilmente puramente finitamente aditiva si para toda G-medida positiva completamente aditiva γ sobre L tal que $\gamma \leq \mu$ se tiene que $\gamma = 0$.

El siguiente resultado generaliza [13, Theorem 4.1]:

Teorema 5.4. *Supongamos que $G = (G, +, 0, \leq, \rho)$ sea un l-grupo m-valorado condicionalmente completo tal que ρ satisface la condición (oc). Si μ es una G-medida positiva sobre L entonces existen dos G-medidas positivas ξ y η sobre L con las siguientes propiedades:*

i) $\mu = \xi + \eta$.

ii) ξ *es completamente aditiva.*

iii) η *es débilmente puramente finitamente aditiva.*

Demostración. Definamos $\Gamma = \{\gamma \in G^L : \gamma$ es una G-medida positiva completamente aditiva sobre L y $\gamma \leq \mu\}$. Puesto que $0 \in \Gamma$, Γ es no vacío. Sea Γ_0 un subcunjunto totalmente ordenado de $(\Gamma, \leq)$. Fijemos $c \in L$. Puesto que $\mu(c)$ es una cota superior del conjunto $\{\gamma(c) : \gamma \in \Gamma_0\}$ en G y G es condicionalmente completo, se sigue del lema 5.1 que $\bigvee\{\gamma(c) : \gamma \in \Gamma_0\}$ existe en G. Escribamos $\gamma_0(c) = \bigvee\{\gamma(c) : \gamma \in \Gamma_0\}$ y $D(c) = \{\gamma_0(c) - \gamma(c) : \gamma \in \Gamma_0\}$. Puesto que Γ_0 es totalmente ordenado, se deduce que $D(c) \downarrow$. Además, de acuerdo con la observación 5.2, se tiene que $\bigwedge D(c) = -\bigvee\{-\gamma_0(c) + \gamma(c) : \gamma \in \Gamma_0\} = \gamma_0(c) - \bigvee\{\gamma(c) : \gamma \in \Gamma_0\} = 0$. Puesto que ρ satisface la condición (oc), se deduce que d-$\lim \mathcal{F}(D(c)) = 0$.

Escribamos $x_\gamma = \gamma_0(c) - \gamma(c)$ para todo $\gamma \in \Gamma_0$. Puesto que $(\Gamma_0, \geq)$ es un conjunto dirigido, resulta que $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_0}$ es una red en $D(c)$ tal que $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma_0 \text{ y } \gamma \geq \gamma_1\} \subset B_{x_{\gamma_1}}$ para todo $\gamma_1 \in \Gamma_0$, donde $B_{x_{\gamma_1}}$ es la sección de $D(c)$ determinada por x_{γ_1}. Escojamos un número real $\epsilon > 0$. Para cada $\alpha \in I\!R_+ \setminus \{0\}$ pongamos $V_\alpha = \{x \in G : \rho(x) < \alpha\}$. Puesto que el conjunto $\{V_\alpha : \alpha \in I\!R_+ \setminus \{0\}\}$ es un sistema fundamental de d-entornos de 0 en G, se sigue de [5, Chapter I, §7.1, Prop. 1, p. 69] que existe $\gamma_1 \in \Gamma_0$ tal que $B_{x_{\gamma_1}} \subset V_\epsilon$. Entonces $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma_0 \text{ y } \gamma \geq \gamma_1\} \subset V_\epsilon$, es decir, $\rho(x_\gamma) < \epsilon$ siempre que $\gamma \in \Gamma_0$ y $\gamma \geq \gamma_1$. Como $\rho(x_\gamma) = d(x_\gamma, 0)$, se concluye que

$$(1) \qquad d\text{-}\lim_{\gamma \in \Gamma_0} \big(\gamma_0(c) - \gamma(c)\big) = 0 \quad \text{para todo } c \in L.$$

Obviamente $\gamma_0 \in G^L$ y $0 \leq \gamma_0(a) \leq \mu(a)$ para todo $a \in L$. Probemos que γ_0 es una G-medida sobre L. Sean $a, b \in L$ tales que $a \perp b$. De acuerdo con la fórmula (1), se tiene: $\gamma_0(a \vee b) = d\text{-}\lim_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(a \vee b) = d\text{-}\lim_{\gamma \in \Gamma_0} \big(\gamma(a) + \gamma(b)\big) = d\text{-}\lim_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(a) + d\text{-}\lim_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(b) = \gamma_0(a) + \gamma_0(b)$.

Probemos ahora que d-$\lim_{\gamma \in \Gamma_0} \big(\gamma_0(c) - \gamma(c)\big) = 0$ uniformemente en $c \in L$. Puesto que $0 \leq \gamma_0(c) - \gamma(c) = \big(\gamma_0(1) - \gamma(1)\big) - \big(\gamma_0(c^\perp) - \gamma(c^\perp)\big) \leq \gamma_0(1) - \gamma(1)$, se deduce que $\rho\big(\gamma_0(c) - \gamma(c)\big) \leq \rho\big(\gamma_0(1) - \gamma(1)\big)$. Esto implica que el d-límite (1) es uniforme en $c \in L$. Para probar que γ_0 es una cota superior de Γ_0 en $(\Gamma, \leq)$ debemos probar que γ_0 es completamente aditiva. Sea $(a_i)_{i \in I}$ una familia ortogonal de L tal que $a = \bigvee_{i \in I} a_i$ existe en L. Sean $\alpha \in I\!R_+ \setminus \{0\}$ y $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Entonces existe $\gamma \in \Gamma_0$ tal que $\gamma_0(c) - \gamma(c) \in V_\beta$ para todo $c \in L$. Puesto que γ es una G-medida completamente aditiva sobre L, existe $J_0 \in \mathcal{F}(I)$ tal que $\gamma(a) - \sum_{i \in J} \gamma(a_i) \in V_\beta$ siempre que $J \in \mathcal{F}(I)$ y $J \supset J_0$. Sea $J \in \mathcal{F}(I)$ conteniendo a J_0. Como $\bigvee_{i \in J} a_i \leq a$ se deduce del axioma f) de la definición de conjunto ordenado ortomodular que $a = \Big(\bigvee_{i \in J} a_i\Big) \vee \Big(a - \Big(\bigvee_{i \in J} a_i\Big)\Big)$. Puesto que γ_0 es una G-medida sobre L se deduce que

$$\begin{aligned}\gamma_0(a) - \sum_{i \in J} \gamma_0(a_i) &= \gamma_0 \Big(a - \bigvee_{i \in J} a_i\Big) - \gamma\Big(a - \bigvee_{i \in J} a_i\Big) + \gamma(a) - \sum_{i \in J} \gamma(a_i) \\ &\in V_\beta + V_\beta \subset V_\alpha\end{aligned}$$

Por consiguiente, la familia $\big(\gamma_0(a_i)\big)_{i \in I}$ es sumable en G y $\sum_{i \in I} \gamma_0(a_i) = \gamma_0(a)$.

Se sigue del lema de Zorn que $(\Gamma, \leq)$ contiene un elemento maximal ξ. Entonces ξ es una G-medida positiva completamente aditiva sobre L tal que $\xi \leq \mu$. Pongamos $\eta = \mu - \xi$. Entonces η es trivialmente una G-medida positiva sobre L. Probemos finalmente que η es débilmente puramente finitamente aditiva. Sea γ una G-medida positiva completamente aditiva tal que $\gamma \leq \eta$. Entonces $\xi+\gamma \leq \mu$ y $\xi+\gamma$ es una G-medida positiva completamente aditiva sobre L. Por lo tanto, $\xi + \gamma \in \Gamma$ y la maximalidad de ξ implica que $\gamma = 0$.

Corolario 5.5. [1, Prop. 2, p. 609] *Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ tal que $\dim(H) \geq 3$, $L = P(B(H))$ y μ una $\mathbb{R}$-medida positiva sobre L. Entonces existen dos únicas $\mathbb{R}$-medidas positivas ξ y η sobre L con las siguientes propiedades:*

i) $\mu = \xi + \eta$.

ii) ξ *es completamente aditiva.*

iii) $\eta(e) = 0$ *para todo elemento* $e \in L$ *de rango finito.*

Demostración. La existencia se sigue del teorema 5.4 y de [13, Lemma 4.4].

Para probar la unicidad de la descomposición, supongamos que existen cuatro $\mathbb{R}$-medidas positivas ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 sobre L tales que $\xi_1 + \eta_1 = \mu = \xi_2 + \eta_2$, siendo ξ_1 y ξ_2 completamente aditivas y $\eta_1(e) = \eta_2(e) = 0$ para todo elemento $e \in L$ de rango finito.

Sean $a \in L$ y $M = a(H)$. Escojamos una base ortonormal $(\varphi_i)_{i\in I}$ de M. Entonces $(e_{\varphi_i})_{i\in I}$ es una familia ortogonal de elementos de L de rango 1 tal que $a = \bigvee_{i\in I} e_{\varphi_i}$. De la aditividad completa de ξ_1 y ξ_2 se deduce que $\xi_1(a) = \sum_{i\in I} \xi_1(e_{\varphi_i}) = \sum_{i\in I} \xi_2(e_{\varphi_i}) = \xi_2(a)$. Entonces $\xi_1 = \xi_2$, de donde $\eta_1 = \eta_2$.

Observación 5.6. Si se reemplaza la condición "completamente aditiva" por "numerablemente aditiva" en la definición de G-medida débilmente puramente finitamente aditiva, se obtiene la noción de G-medida puramente finitamente aditiva, y se puede así generalizar igualmente [13, Theorem 4.2].

Agradecimientos. Esta nota es el contenido ampliado de conferencias dictadas por el primer autor en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, en el Departamento de Matemáticas Fundamentales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia y en el Departamento de Matemática Aplicada (Escuela Universitaria de Informática) de la Universidad Politécnica de Madrid. Los autores testimonian sus agradecimientos a los Sres. Directores de estas instituciones universitarias por su hospitalidad y múltiples facilidades ofrecidas a lo largo de esta investigación. Especiales agradecimientos son debidos a los Profesores Dres. Alfonsa García López, Francisco Hernández Rodríguez, Pedro Jiménez Guerra y José Leandro de María González.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. F. AARNES: "Quasi-states on C*-Algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.* 149 (1970), 601-625.

[2] E. BELTRAMETTI y G. CASSINELLI: *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.

[3] S. K. BERBERIAN: *Baer $*$-rings*, Springer-Verlag, Berlín, 1972.

[4] G. BIRKHOFF: *Lattice theory 3^{rd} ed.*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1967.

[5] N. BOURBAKI: *Elements of Mathematics, General Topology, Chapters 1-4*, Springer-Verlag, Berlín, 1989.

[6] N. BOURBAKI: *Elements of Mathematics, General Topology, Chapters 5-10*, Springer-Verlag, Berlín, 1989.

[7] N. BOURBAKI: *Elements of Mathematics, Theory of Sets*, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, París, 1968.

[8] J. DIXMIER: *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, París, 1969.

[9] D. L. FOULIS: Baer $*$-semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 11 (1960), 648-654.

[10] D. H. FREMLIN: *Topological Riesz Spaces and Measure Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[11] A. M. GLEASON: "Measures on the closed subspace of a Hilbert space", *J. Math. Mech.* 6 (1957), 885-893.

[12] I. KAPLANSKY: *Rings of operators*, Benjamin, New York, 1968.

[13] P. DE LUCIA y P. MORALES: "Non-commutative Decomposition Theorems in Riesz Spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.* (aparecerá).

[14] P. DE LUCIA y P. MORALES: "A non-commutative version of a Theorem of Marczewski for submeasures", *Studia Math.* 101 (1992), 123-138.

[15] G. W. MACKEY: *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1963.

[16] S. MAEDA: "Probability Measures on Projections in von Neumann Algebras", *Reviews in Mathematical Physics* 1 (1990), 235-290.

[17] H. H. SCHAEFER: *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[18] R. SIKORSKI: *Boolean Algebras*, Springer-Verlag, Berlín, 1969.

[19] S. STRĂTILĂ y L. ZSIDÓ: *Lectures on von Neumann algebras*, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England, 1979.

[20] C. SWARTZ: *An Introduction to Functional Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[21] M. TAKESAKI: *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, Berlín, 1979.

[22] K. YOSIDA: *Functional Analysis, Sixth Edition*, Springer-Verlag, Berlín, 1980.

Département de mathématiques et d'informatique
Faculté des sciences
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec
CANADA J1K 2R1

y

Departamento de matemática aplicada
Escuela Universitaria de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
Madrid-28031
ESPAÑA