UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

DISERTACIONES DEL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

10

MARIA TERESA LOZANO

FLUJOS EN 3 VARIEDADES

10

Flujos en 3-variedades

by

Maria Teresa Lozano

Lecture given 19 April 1991

El propósito de esta nota es dar un panorama de los resultados más importantes conocidos sobre flujos en variedades de dimensión tres. Necesitamos empezar recordando conceptos y resultados básicos que pueden encontrarse, por ejemplo, en [3] y [14].

1. Preliminares: *Flujos, secciones y equivalencias.*

Un *sistema dinámico* se define como una acción de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M (de clase C^∞, por ejemplo) . Es decir, una aplicación diferenciable de clase C^r ($r \geq 1$) $\varphi: M \times G \longrightarrow M$, tal que

a) $\varphi(m,e) = m$ para todo punto m de M, donde e es el neutro de G; y

b) $\varphi(\varphi(m,g_1),g_2) = \varphi(m, g_1 g_2)$ para todo punto m de M y todo par de elementos de G.

Esta acción define un homomorfismo de grupos de Lie

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Dif}(M) \\ g &\longrightarrow \varphi_g: M \longrightarrow M \\ &\qquad\quad m \longrightarrow \varphi(m,g) \end{aligned}$$

donde Dif(M) representa el grupo de difeomorfismos de clase C^r de M, con la estructura de variedad diferenciable de clase C^r inducida por M.

Un sistema dinámico dado por una acción del grupo de Lie $(\mathbb{R},+)$ en M, se denomina *flujo*. Se trata, por tanto, de una aplicación $\varphi: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ diferenciable de clase C^r que cumple:

a) $\varphi(m,0) = m$ para todo punto m de M ; y

b) $\varphi(\varphi(m,t),s) = \varphi(m, t+s)$ para todo punto m de M y todo par de números reales t y s.

Un flujo φ en M tiene asociado un campo X diferenciable de clase C^{r-1} , que es el que asigna a cada punto m de M, el vector tangente en el punto t=o, a la *órbita* o trayectoria γ_m de φ por m, es decir a la curva $\gamma_m : \mathbb{R} \longrightarrow M$, donde $\gamma_m(t) = \varphi(m, t)$. Además, el campo X es completo porque sus curvas integrales tienen dominio todo $\mathbb{R}$. Recíprocamente, cada campo X completo en una variedad M, tiene asociado un flujo $\varphi: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ definido por $\varphi(m, t) = \gamma_m(t) = X_t(m)$ donde γ_m es la curva integral del campo X que pasa por m, y X_t es el difeomorfismo correspondiente a $t \in R$. Si M es una variedad compacta, cada campo es completo, luego existe una correspondencia biyectiva entre {flujos en M de clase C_r} y $\mathcal{X}_{r-1}(M)$ = {campos vectoriales diferenciables de clase C_{r-1} sobre M}.

Una *cascada* es un sistema dinámico dado por la acción del grupo aditivo de los enteros $\mathbb{Z}$ en una variedad M. A cada cascada $\varphi: M \times \mathbb{Z} \longrightarrow M$ se le puede asociar el difeomorfismo $\varphi_1 : M \longrightarrow M$, donde $\varphi_1(m) = \varphi(m, 1)$, y a cada difeomorfismo $f: M \longrightarrow M$ la cascada $\varphi: M \times \mathbb{Z} \longrightarrow M$ donde $\varphi(m, n) = f^n$. Así, el estudio de {cascadas en M}, es equivalente al estudio de Dif(M).

Dado un flujo φ en M, cada subgrupo de $\mathbb{R}$ (por ejemplo $\mathbb{Z}$) define una cascada mediante la restricción de φ al subgrupo. Si $t_0 \in R$, $\mathbb{Z}t_0$ actúa en M dando una familia discreta de difeomorfismos. El recíproco no es cierto en general: si $f \in$ Dif M, $\varphi_n = f^n$, $n \in \mathbb{Z}$ es una acción de $\mathbb{Z}$ en M, que no tiene porqué extenderse a un flujo.

Llamaremos órbita de un difeomorfismo f en $m \in M$ al subconjunto $\{f^n(p) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, órbita de la correspondiente cascada.

En lo que sigue nos restringimos al estudio de sistemas dinámicos que son acciones de $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{Z}$ (flujos o cascadas). Tendremos en cuenta siempre la correspondencia entre cascadas y difeomorfismos.

Una superficie compacta Σ encajada en M es una *sección global* para el flujo φ si

(a)Cada órbita corta a Σ para valores de t positivos y negativos de módulo arbitrariamente grande:

$\forall\, m \in M,\ t_0 \in \mathbb{R},\ \exists\, t, t' > t_0 \ \Rightarrow\ \gamma_m(t) \cap \Sigma \neq \emptyset \neq \gamma_m(-t') \cap \Sigma$

(b)las órbitas cortan a Σ transversalmente : $\forall\, m \in \Sigma$, $X_m \notin T_m\Sigma$, donde X es el campo asociada a φ y $T_m\Sigma$ es el espacio vectorial tangente a Σ en m.

Entonces φ induce una acción de $\mathbb{Z}$ en Σ generada por $f: \Sigma \longrightarrow \Sigma$, siendo $f(p) = \varphi(p, t_1)$, donde t_1, que depende de p, es el menor número real positivo que cumple $\varphi(p, t_1) \in \Sigma$. La aplicación f es la *aplicación de retorno* o *aplicación de Poincaré.*

Puede verse que no siempre existen secciones globales, por tanto es útil definir un concepto algo más débil: *superficie de sección* o *superficie de Birkhoff.* Es una superficie compacta S inmersa en M, tal que el interior $S\setminus\partial S$, está encajado y cumple (a) y

(b') $S\setminus\partial S$ es transversal al flujo (las órbitas lo cortan transversalmente) y el borde ∂S es un conjunto de órbitas cerradas.

Un estudio cualitativo de flujos o difeomorfismos en una variedad M, es un estudio topológico global de sus órbitas. Si no imponemos ninguna condición a un flujo, el espacio de órbitas puede ser totalmente arbitrario. Entonces es natural restringir el estudio a ciertos subconjuntos del conjunto de flujos o difeomorfismo. Concretamente, Smale [17] formula el siguiente problema fundamental:

Definir un conjunto B *abierto y denso en* $\mathcal{X}_r(M)$ *o* Dif(M) y *una relación de equivalencia* $\sim$, *de manera que cada elemento de* B *sea estable respecto a* $\sim$.

La condición de que un elemento de B sea estable respecto a $\sim$ significa que para cualquier $z\in B$ existe un entorno U de z en $\mathcal{X}(M)$ o Dif(M) formado por elementos $\sim$ equivalentes a z.

Las relaciones $\sim$ más usuales son *equivalencia topológica y conjugación.* Dos campos $X, Y\in \mathcal{X}(M)$ son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h: M\longrightarrow M$ que lleva trayectorias de X en trayectorias de Y, conservando su orientación. Es decir, para cada $m\in M$ y $\delta>o$ existe $\varepsilon>o$ tal que para todo $t\in(o,\delta)$ $h\circ\gamma_m(t)=\gamma'_{h(m)}(t')$ para algún $t'\in(0,\varepsilon)$, donde γ_m y $\gamma'_{h(m)}$ son curvas integrales de X por m, y de Y por h(m) respectivamente.

Dos campos $X, Y\in \mathcal{X}(M)$ son conjugados si son topológicamente equivalentes y además se conserva la parametrización de las trayectorias, es decir $h\circ\gamma_m(t)=\gamma'_{h(m)}(t)$.

Dos difeomorfismos $f, g\in$ Dif(M) son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h: M\longrightarrow M$ tal que $hf(m)=gh(m)$ $\forall\, m\in M$.

La estabilidad respecto a la equivalencia topológica se denomina *estabilidad estructural.*

En lo que sigue supondremos que M es una variedad cerrada (compacta y sin borde).

Dos importantes clases de flujos y difeomorfismos estructuralmente estable son los de Morse-Smale y los de Anosov. Para caracterizarlos necesitamos algunos conceptos básicos.

Sea $f \in \mathrm{Dif}(M)$. Un punto $m \in M$ se llama *no-errante* si para cualquier entorno U de m y cualquier entero positivo n_0, existe un entero $n \ni |n| > n_0$ y $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. La definición de punto no–errante para un flujo es análoga.

El conjunto de puntos no-errantes de un difeomorfismo o flujo es cerrado e invariante, es decir, formado por órbitas, y lo designaremos por Ω.

Un *punto fijo* m_0 de f se llama *hiperbólico* si df_{m_0}, aplicación lineal inducida por f en el espacio tangente a M en m_0, no tiene autovalores de módulo uno. Un *punto fijo* de un flujo φ, (punto crítico del campo X correspondiente) es *hiperbólico* si es un punto fijo hiperbólico del difeomorfismo $X_{t=1}$.

Un punto m de M es periódico para f, si la órbita $\{f^n(m)\}$ es un número finito de puntos, y se llama periodo de m al mínimo entero positivo n tal que $f^n(m) = m$. Un *punto* m *periódico* de f es *hiperbólico*, si es un punto fijo hiperbólico de f^n donde n es el periodo de m.

Si la aplicación $\gamma_m: \mathbb{R} \longrightarrow M$, $\gamma_m(t)=\varphi(m, t)$ no es inyectiva, se dice que γ_m es una *órbita periódica o cerrada* del flujo. Si m_0 es un punto de una órbita cerrada γ, consideramos una sección local Σ_0 transversal a γ en m_0. Entonces $\varphi(m_0, c) = m_0$, donde c es el periodo de γ, (mínimo valor de t para el que $\gamma(s+t) = \gamma(s)$), y, por continuidad, la órbita de un punto m de Σ_0 próximo a m_0, encuentra Σ_0 en un tiempo t cercano a c. Esto permite definir una *aplicación de Poincaré* $P: V \longrightarrow \Sigma_0$ en un entorno V de m_0 en Σ_0. Esta aplicación sirve para estudiar las órbitas del flujo en un entorno de γ. La *órbita cerrada* γ *es hiperbólica* si m_0 es un punto fijo hiperbólico de la aplicación P.

Llamaremos elemento *crítico* de un sistema dinámico a un punto fijo o periódico de un difeomorfismo, o a un punto fijo u órbita cerrada de un flujo.

La importancia de los elementos críticos hiperbólicos, radica en el siguiente resultado de Hartman y Grobman ([6], [8]).

Teorema. *Una condición necesaria y suficiente para que un sistema dinámico sea estructuralmente estable en el entorno de un elemento crítico* (estabilidad estructural local), *es que el elemento sea hiperbólico.*

Si x es un elemento crítico hiperbólico, el conjunto de puntos cuyas órbitas convergen a x cuando el parámetro tiende a infinito, forman una variedad de clase C^r (siendo el sistema dinámico de clase C^r) inmersa en M que se llama *variedad estable* de x, y que denotamos por $W^s(x)$. La *variedad inestable* de x, $W^u(x)$ se define dualmente como el conjunto de puntos cuyas órbitas tienden a x cuando el parámetro tiende a menos infinito. Si $W^s(x)$ es de dimensión n_s y $W^u(x)$ de dimensión n_u se tiene que $n_s+n_u=\dim M$, si x es un punto, y $n_s+n_u=1+\dim M$, si x es una órbita periódica de un flujo.

2.Sistemas dinámicos de Morse-Smale

2.1 Definiciones y resultados generales.

La siguiente definición es válida para cascadas y para flujos.

Definición 1.2.1. Un sistema dinámico en una variedad diferenciable M^n se dice que es *de Morse-Smale* si

(1) el conjunto W de puntos no-errantes es la unión de los elementos críticos, y éstos son todos hiperbólicos.

(2) Si x, y son elementos críticos cualesquiera, $W^s(x)$ y $W^u(y)$ están en posición general (si se cortan lo hacen transversalmente).

Sobre sistemas de Morse-Smale se conocen los siguientes resultados:

Los sistemas de Morse-Smale forman un subconjunto abierto de Dif(M) ó $\mathcal{X}(M)$ para cualquier variedad M^n cerrada [13].

Los campos correspondientes a flujos de Morse-Smale forman un subconjunto denso en Grad(M) $\subset \mathcal{X}(M)$, donde $X \in$ Grad(M) si X es el campo gradiente de una función de M en R. [18].

Es claro que si φ es un flujo de Morse-Smale, $\varphi_t : M \longrightarrow M$, con $\varphi_t(m) = \varphi(m, t)$, es un difeomorfismo de Morse-Smale para todo $t \neq 0$.

El campo gradiente de una función de Morse produce un flujo de Morse-Smale, por tanto toda variedad M^n cerrada tiene sistemas dinámicos de Morse-Smale.

Los sistemas de Morse-Smale son estructuralmente estables ([15], [13]), de donde se deduce que toda variedad cerrada soporta sistemas estructuralmente estables.

Un flujo es *NMS* (non-singular Morse-Smale) si es un flujo de Morse-Smale sin puntos críticos. La existencia de flujos NMS está ligada a cierta descomposición en la variedad M^n. Para $n > 3$, el problema fue resuelto por Asimov [2], dando una condición necesaria y suficiente, sobre la característica de Euler de la variedad M, para la existencia de flujos NMS.

2.2 Flujos NMS en 3-variedades.

El caso $n = 3$, fue resuelto por Morgan [12] demostrando que M^3 admite un flujo NMS si y sólo si M no tiene factores $S^1 \times S^2$, es suma conexa de variedades de grafo con factores no triviales, y su borde consta de toros. Esto significa que M^3 tiene flujos NMS si y sólo si en la descomposición de Jaco-Shalem [9] por toros incomprensibles, no tiene parte hiperbólica.

Para demostrarlo Morgan da el siguiente concepto de asas redondas:
Definición.1.- Sea Y^n una variedad. Entonces se dice que X^n *se obtiene de* Y^n *por adjunción de una* k-*asa redonda* si

(1) Existen fibrados de S^1 por discos E_s^k y E_u^{n-k-1} y

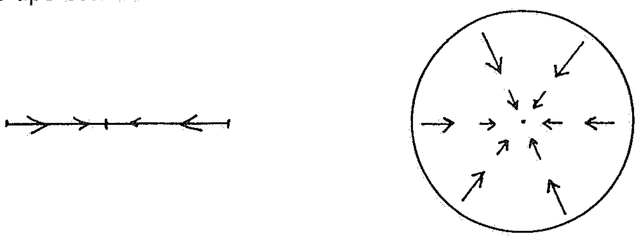
(2) un encaje $\phi : (\partial E_s^k \times E_u^{n-k-1}) \longrightarrow \partial Y^{n-1}$ tal que

$$X^n \cong Y^n \underset{\phi}{\cup} (E_s^k \oplus E_u^{n-k-1})$$

Definición.2.- *Una descomposición en asas redondas* para (X , $\partial_- X$) es una filtración $\partial_- X \times I = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_T = X$ donde cada X_i se obtiene de X_{i-1} por adjunción de un asa redonda.

Despues a cada asa redonda le asocia un flujo de la siguiente forma:

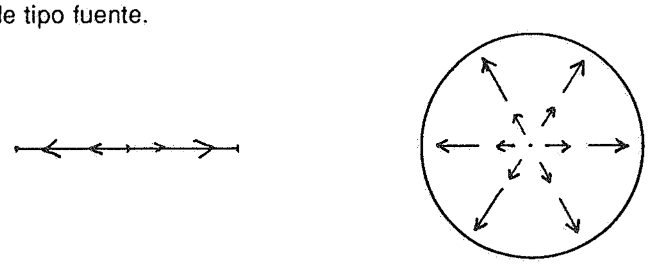
Sea ρ_s un campo vectorial definido en el fibrado E_s^k y formado por vetores tangentes a la fibra con el origen del k-disco como único punto singular de tipo sumidero.



$(E_s^1)_{x_0}$ $(E_s^2)_{x_0}$

Fig.1

Sea ρ_u un campo vectorial definido en el fibrado E_u^j y formado por vetores tangentes a la fibra con el origen del j-disco como único punto singular de tipo fuente.



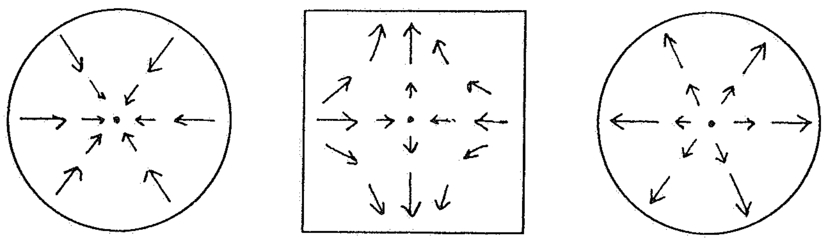
$(E_u^1)_{x_0}$ $(E_u^2)_{x_0}$

Fig.2

Sea $\partial/\partial\theta$ la elevación del campo constante en S^1 a $(E_s^k \oplus E_u^{n-k-1})$

Entonces el campo $\partial/\partial\theta + \rho_s + \rho_u$ está definido en el asa $(E_s^k \oplus E_u^{n-k-1})$ donde no tiene ningun cero y donde la sección cero es la unica órbita cerrada del flujo.

En el caso $n = 3$, el ánima de una cero asa es un atractor (Fig), el de una 2-asa es un repulsor (Fig), y el de una 1-asa es como en la Fig.



seccion de 0-asa seccion de 1-asa seccion de 2-asa

Fig.3

Entonces Morgan demuestra que una 3-variedad tiene una descomposición en asa redondas si y solo si tiene un flujo NMS, y que esto sucede si y solo si M es suma conexa de variedades de grafo.

3. Sistemas dinámicos de Anosov.

3.1. Definiciones

Una importante clase de difeomorfismos y flujos estructuralmente estables son los de Anosov. Antes de definirlos, recordamos el concepto de conjunto hiperbólico.

Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto invariante por $f \in \mathrm{Dif}(M)$, $f(\Lambda) = \Lambda$. Se dice que Λ es *hiperbólico* si el fibrado tangente a M restringido a Λ, $T_\Lambda M$, se descompone en una suma directa

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

continua, invariante por df y tal que $df|_{E^s}$, $(df)^{-1}|_{E^u}$ son contracciones. Es decir: existe $\lambda > 1$ tal que para $v \in E^u$, $v' \in E^s$, se tiene $\|d_f(v)\| \geq \lambda \|v\|$ y $\|d_f(v')\| \leq \lambda^{-1} \|v'\|$ para alguna métrica riemanniana de M.

El conjunto Λ es *hiperbólico* para un flujo φ si $T_\Lambda M = E^\varphi \oplus E^s \oplus E^u$, donde cada sumando es un subfibrado continuo, invariante por dX_t para cada $t \in \mathbb{R}$, E^φ es tangente al flujo y existen $\lambda > 1$ y $c > 0$ tales que si $v \in E^u$, $v' \in E^s$ y $t \geq 0$, entonces $\|d_{\varphi_t}(v)\| \geq c\lambda^t \|v\|$ y $\|d_{\varphi_t}(v')\| \leq c\lambda^t \|v'\|$.

Un *sistema de Anosov* es aquel para el que la variedad ambiente M es un conjunto hiperbólico. Anosov demostró [1] que los sistemas de Anosov son estructuralmente estables.

Smale [17] definió el concepto de sistema que satisface el Axioma A, que engloba a los de Morse-Smale y los de Anosov.

Un sistema dinámico *satisface el Axioma A* si
(i)su conjunto no-errante Ω es hiperbólico.
(ii)sus elementos críticos forman un conjunto denso en Ω.

Dado un sistema de Anosov en una variedad M, se define la *variedad estable generalizada* $W^s(m)$ para cada punto m de M, como una subvariedad inmersa con las propiedades:

a) Para cada $x \in W^s(m)$ el espacio tangente $T_x(W^s(m))$ coincide con $E^s_x \subset T_x(M)$.

b) $f(W^s(m)) = W^s(f(m))$ si se trata de un difeomorfismo, ó, $\varphi_t(W^s(m)) = W^s(\varphi_t(m))$ si el sistema es un flujo.

c) Dos puntos x,y están en el mismo $W^s(m)$ si y solo sí la distancia entre $f^n(x)$ y $f^n(y)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, en el caso de difeomorfismo, o, la distancia entre $\varphi_t(x)$ y $\varphi_t(y)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, para un flujo.

La *variedad inestable generalizada* $W^u(m)$ para un punto m de M es la variedad estable generalizada para el sistema de Anosov inverso.

Un sistema de Anosov satisface la *condición de transversalidad* si $W^s(m_1)$ y $W^u(m_2)$ están en posición general para cualquier $m_1, m_2 \in M$.

Si φ es un flujo de Anosov en M, es claro que $\varphi_t: M \longrightarrow M$ dado por $\varphi_t(p) = \varphi(t,p)$ es un difeomorfismo de Anosov.

Los flujos de Anosov comprenden importantes clases de flujos, que surgen de forma natural en el estudio de superficies:

3.2. Flujos geodésicos de superficies de curvatura constante negativa.

Sea F_g una superficie orientable de género $g>1$. En F_g consideramos una métrica de curvatura constante negativa. Designamos por $ST(F_g)$ el espacio total del fibrado esférico tangente sobre F_g, formado por vectores unitarios tangentes a la superficie F_g. Entonces $ST(F_g)$ es una 3-variedad, que está fibrada por circunferencias con base F_g. En esta variedad se define el flujo geodésico $\varphi: \mathbb{R} \times ST(F_g) \longrightarrow ST(F_g)$ asociando a (t,v), donde $v \in T_pF_g$, el vector tangente a la geodésica que parte de p en dirección v, en el punto t.

$$\varphi(t, v) = \overline{\dot{\gamma}_v(t)}$$

Este flujo es globalmente hiperbólico y el conjunto de órbitas cerradas es denso en $ST(F_g)$. Veámoslo con detalle:

En $ST\mathbb{H}^2$ (esférico tangente de $\mathbb{H}^2$=vectores de norma 1 del fibrado tangente de $\mathbb{H}^2$) está definido el flujo geodésico φ por

$$\varphi: ST\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow ST\mathbb{H}^2$$

$$((x, v), t) \rightarrow (x', v')$$

donde x' es el punto de la geodésica determinada por (x, v) para el parámetro t ($x'=\gamma_x^v(t)$) y v' es el vector tangente a γ_x^v en x'.

La variedad $ST\mathbb{H}^2$ es difeomorfa a $\mathbb{H}^2 \times S^1$, donde $(x, v) \in \mathbb{H}^2 \times \{\theta\}$ si la geodésica γ_x^v tiende a $\theta \in \partial\mathbb{H}^2$ cuando t tiende a ∞. (Fig4)

Entonces, si $(x, v) \in \mathbb{H}^2 \times \{\theta\}$, el punto $\varphi((x, v), t)$ está también en $\mathbb{H}^2 \times \{\theta\}$.

El flujo geodésico define una foliación de $ST\mathbb{H}^2$ con hojas difeomorfas a $\mathbb{R}$, tal que cada $\mathbb{H}^2 \times \{\theta\}$ está foliada por todas las geodésicas de $\mathbb{H}^2$ que apunta a θ.

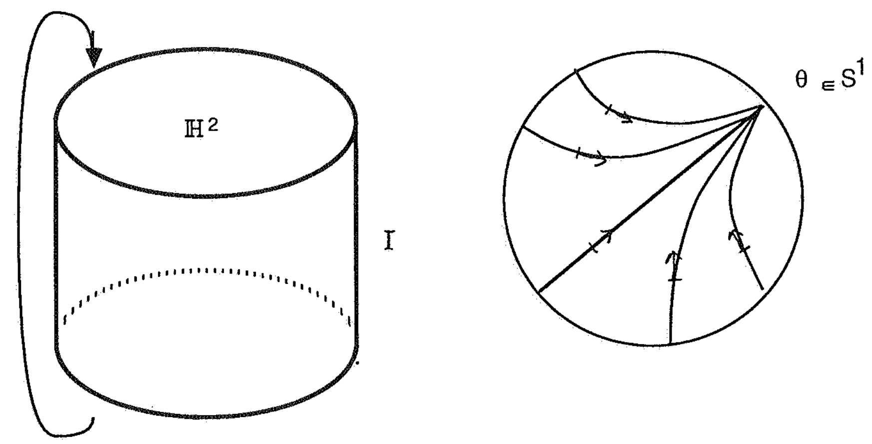


Fig.4

Si g es una isometría de $\mathbb{H}^2$, entonces g actúa en $ST\mathbb{H}^2$ por $g(x, v) = (g(x), dg_x(v))$ y como pasa geodésicas a geodésicas, preserva el flujo geodésico. La línea del flujo $\varphi((x,v), t)$, que es $\gamma_x^v(t)$ en $\mathbb{H}^2 \times \{\theta\}$, pasa mediante g a $\varphi((g(x), dg_x(v)), t)$ que es $\gamma_{g(x)}^{dg(v)}(t)$ en $\mathbb{H}^2 \times \{\theta'\}$. (Fig. 5). Nótese que g actua en $\partial\mathbb{H}^2$; entonces $\theta' = g(\theta)$.

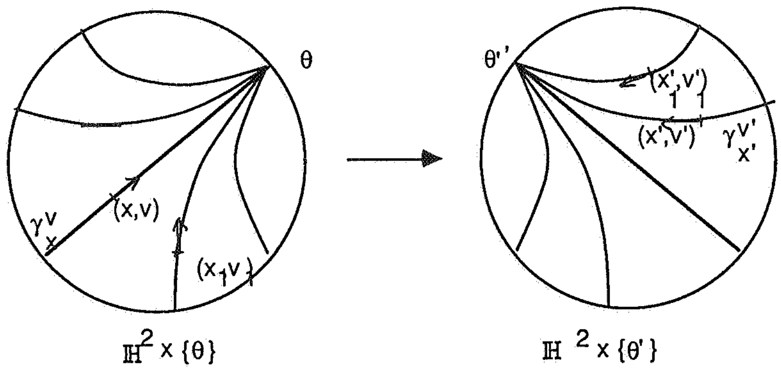


Fig.5

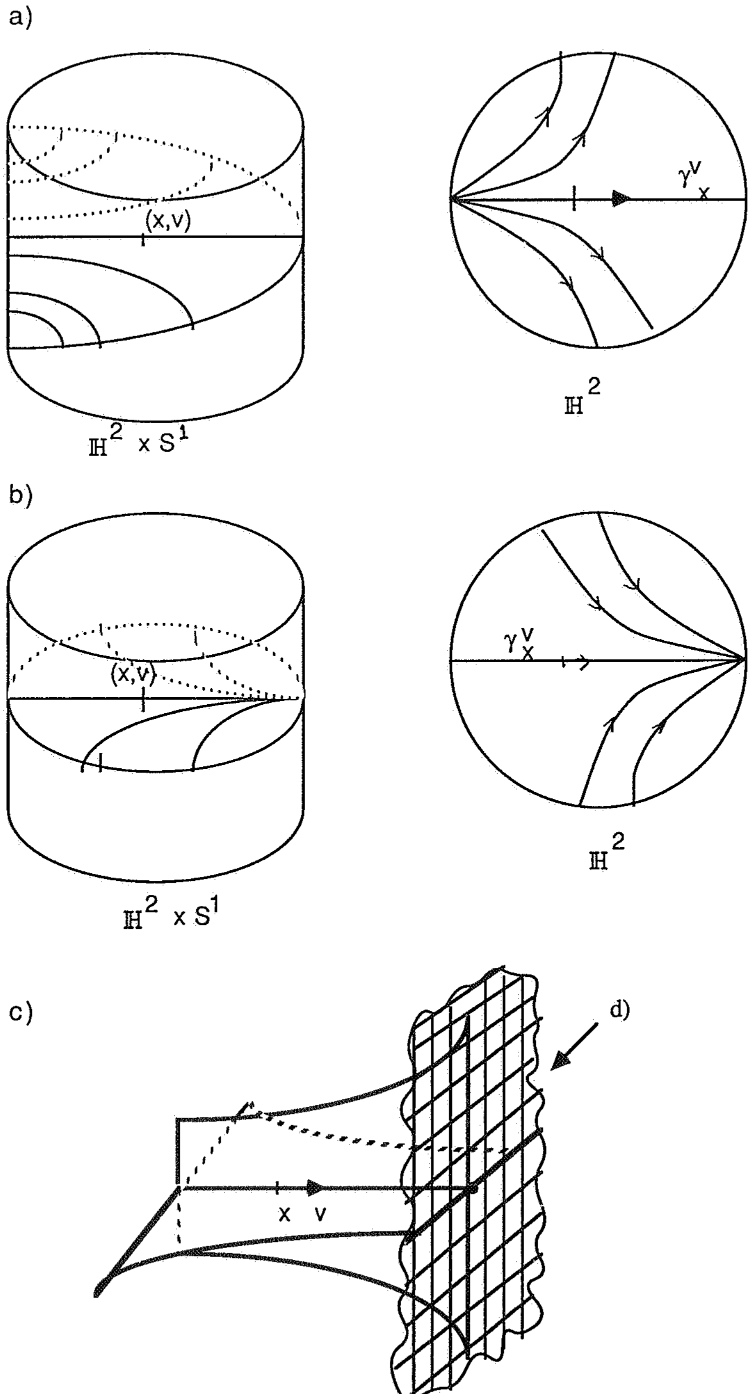

a)
(x,v)
γ_x^v
$\mathbb{H}^2 \times S^1$
$\mathbb{H}^2$
b)
(x,v)
γ_x^v
$\mathbb{H}^2 \times S^1$
$\mathbb{H}^2$
c)
d)
x v

Fig 6.

El flujo geodésico en $ST\mathbb{H}^2$ satisface las siguiente propiedades:

1) Es globalmente hiperbólico:

La variedad inestable generalizada $W^u_{(x,v)}$ que pasa por (x, v) está formada, por definición, por los vectores tangentes a las geodésicas que parten del mismo punto del infinito que $\gamma^v{}_{,x}$. En la figura 6a) se ha dibujado su posición en $ST\mathbb{H}^2$ y en $\mathbb{H}^2$

La variedad estable generalizada $W^s_{(x,v)}$ que pasa por (x, v) está formada, por definición, por los vectores tangentes a las geodésicas que tienden al mismo punto del infinito que γ^v_x y es, por tanto, $\mathbb{H}^2\times\{\theta\}$ si $(x,v)\in\mathbb{H}^2\times\{\theta\}$. Fig6b)

La figura 6c) representa la posición relativa de $W^u_{(x,v)}$ y $W^s_{(x,v)}$ cerca de (x, v). Las dos hojas se cortan transversalmente a lo largo de los vectores tangentes a γ^v_x.

2) Ninguna órbita es periódica.

3) Ninguna órbita es densa.

Sea Γ el grupo de isometrías discreto de $\mathbb{H}^2$, tal que el cociente $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ es la superficie F_g. Entonces $ST(F_g) = \Gamma\backslash ST(\mathbb{H}^2)$,[11. pg.91], y el flujo geodésico en $ST(F_g)$ es el cociente del flujo geodésico de $ST(\mathbb{H}^2)$ por la acción de Γ.

Como Γ actúa libremente en $\mathbb{H}^2$, también lo hace en $ST(\mathbb{H}^2)$ y por tanto la estructura local del flujo se conserva. Por tanto el flujo geodésico de F_g cumple 1).

Se prueba también que cumple

2') $\overline{Per} = ST(F_g)$. Donde Per representa el conjunto de órbitas cerradas.

Estos flujos fueron estudiados por Anosov [1] y se designó después por este nombre a todos los flujos de características similares.

3.3. Flujos suspensión de difeomorfismos de Anosov.

Dado un difeomorfismo $f\colon M \longrightarrow M$ se puede definir el flujo suspensión de f en la variedad $N = M\times I/(p, 1)\sim(f(p), 0)$ por la condición $\varphi((p, s), t) = (f^{[t]}(p), s+t-[t+s])$ donde $(p, s)\in N$ y $[(\cdot)]$ denota la parte entera de (-). El flujo suspensión de un difeomorfismo de Anosov, es un flujo de Anosov.

En particular, si M es una superficie compacta (necesariamente el toro F_1), y $f \in Dif(F_1)$ es de Anosov, el flujo suspensión es un flujo de Anosov en una 3-variedad que es un fibrado sobre la circunferencia S^1 con fibra el toro F_1.

Recordemos que todo difeomorfismo φ de F_1 que conserve la orientación ($\varphi \in Dif_+(F_1)$) ,es isótopo a un difeomorfismo asociado a una matriz $A_\varphi \in SL(2, \mathbb{Z})$. La matriz A_φ actúa en $\mathbb{R}^2$ fijando $\mathbb{Z}^2$, luego induce un difeomorfismo en la variedad cociente $F_1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Si $A_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el discriminantes de la ecuación $x^2 - (a+d)x+1$ determina la naturaleza de sus valores propios. Se distinguen tres casos

i) $|a+d|<2$ No existen valores propios reales.

ii) $|a+d|=2$ 1 es valor propio doble.

iii) $|a+d|>2$ 2 valores propios reales distintos.

En el caso i) $|a+d|=0$ ó 1. A_φ es periódica con $A_\varphi{}^{12}=I$, y su periodo es 2, 3, 4 ó 6 (consecuencia del teorema de Cayley-Hamilton).

En el caso ii) con un cambio de coordenadas adecuado

$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (si $l_1 = l_2 = 1$)

$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (si $l_1 = l_2 = -1$)

En el caso iii) l_1 y l_2 son irracionales distintos , $l_1 = \frac{1}{l_2}$. Se dice entonces que la matriz A_φ es Anosov.

En este caso hay dos pendientes de rectas pasando por el origen de $\mathbb{R}^2$ (por tanto dos pendientes en el toro) invariantes, en la dirección de una de ellas actúa en factor de dilatación, y en la otra un factor de compresión. Entonces el flujo suspensión en $M_\varphi = F_1 \times I/(x,1) \equiv (A_\varphi x, 0)$ es claramente hiperbólico.

3.4. Flujos algebraicos.

Sea M un espacio homogéneo compacto y conexo, es decir, $M = \Gamma \backslash G/K$, donde G es un grupo de Lie, K un subgrupo compacto, y Γ un subgrupo discreto de G, actuando a izquierda y dando cociente compacto. Entonces para cada elemento α del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, existe un subgrupo uniparamétrico $\exp\alpha t$ de G que actúa en M dando lugar a un flujo. Concretamente la acción $\varphi: M\times\mathbb{R}\longrightarrow M$ está dada por $\varphi(\Gamma_g K, t)=\Gamma_g \exp(\alpha t)\, K$. Este flujo se denomina *flujo algebraico.*

Los flujos 3.2 y 3.3 son flujos de Anosov algebraicos. Tomter [19] demostró que si φ es un flujo de Anosov algebraico en una 3-variedad M, entonces alguna cubierta finita de M tiene como flujo inducido por φ un flujo geodésico, o un flujo suspensión de un difeomorfismo de Anosov. Esto prueba que cada flujo de Anosov algebraico en M^3 es cociente de un geodésico o suspensión.

3.5. Flujos de Anosov no algebraicos.

Handel y Thurston [7] construyeron un flujo de Anosov en una variedad M de grafo, identificando sendos toros del borde de dos variedades de Seifert, S_1 y S_2, mediante un difeomorfismo de Anosov. Las variedades S_1 y S_2 poseían flujos de Anosov que se extendía a un flujo en M que es también de Anosov. En el mismo trabajo se demuestra que este flujo no es conjugado a ningún flujo de Anosov algebraico, probando que ninguna cubierta finita de M es un fibrado por circunferencias sobre una superficie F_g $(g>1)$, o un fibrado por toros sobre la circunferencia. Este fue el primer ejemplo conocido de flujo de Anosov no algebraico.

Otros ejemplos fueron construidos por Goodman [5] por un proceso que produce cirugía de Dehn en órbitas periódicas. Este proceso produce foliaciones W^s y W^u que no son C^∞. [4].

3.6. Sistemas dinámicos de Anosov transitivos.

Un sistema dinámico en una variedad M es topológicamente transitivo si existe una órbita densa en M. Los flujos de Anosov algebraicos en 3-variedades compactas, que incluyen a los geodésicos y de suspensión, son transitivos.

3.7. Variedades que poseen flujos de Anosov.

Margulis [10] probó que si una 3-variedad M posee un flujo de Anosov, su grupo fundamental $\pi_1(M)$ tiene crecimiento exponencial. Esto significa que dado un conjunto finito de generadores, el número $\Gamma(n)$ de elementos distintos del grupo que se pueden expresar en esos generadores con palabras de longitud $\leq n$, cumple $\Gamma(n) \geq Ae^{an}$, donde A y a son números reales positivos fijos.

Por tanto, *no toda 3-variedad admite un flujo de Anosov*: Las 3-variedades con grupo fundamental finito (S^3, lentes, etc...) no poseen tales flujos.

Un resultado análogo para variedades de dimensión $n \geq 4$, y flujos de Anosov con E^s o E^u unidimensionales, fue probado por Plante y Thurston [16].

Referencias:

[1] Anosov, D.V. "Geodesic Flows on Closed Riemann Manifolds with Negative Curvature". Proceeding of the Steklov Institute of Math. #90(1967).

[2] Asimov, D. "Round handles and non-singular Morse-Smale flows". Ann. Math. **102**(1975), 41-54.

[3] Chillingsworth, D.R.J. **Differential topology with a view to applications**. Pitman Publ. (1976).

[4] Ghys, E. "Flots d´Anosov dont les feuilletages stables sont differentiables". Ann. Sci. Ec. Norms Super., IV, Ser **20**(1987), 251-270.

[5] Goodman, Sue. "Dehn surgery on Anosov flows". In **Geometric Dynamics**, SLN 1007, Springer, New York, (1983).

[6] Grobman. "Topological classification of the neighborhood of a singular point in n-dimensional spac". Math. Sb. N.S. **56**(1962).

[7] Handel, M. and Thurston, W. "Anosov flows on New three Manifolds". Invent. Math. (1980), 95-103.

[8] Hartman, P. "A lemma in the structural stability of differential equations". Proc. AMS **11**(1961), 610-620.

[9] Jaco, W.H. and Shalen. **Seifert fibered spaces in 3-manifolds**. Mem. Amer. Math. Soc. No **2**(1979).

[10] Margulis, G.A. "Y-Flows on three-dimensional manifolds". Appendix to Anosov-Sinai: "Some smooth ergodic systems". Uspekhi Math. Nauk **22**(1967), 107-172; Russian Math. Surveys **22**(1967), 103-168.

[11] Montesinos, J.M. **Classical Tessellations and Three-Manifolds**. Springer-Verlag (1987).

[12] Morgan, J.W. "Non-singular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds". Topology vol **18**(1978), 41-53.

[13] Palis, J. "On Morse-Smale dynamical systems". Topology **8**(1969), 385-405.

[14] Palis, J. and de Melo, W. **Geometric theory of Dinamical Systems.** Springer-Verlag, New York (1982).

[15] Palis, J. and Smale, S. "Structural Stability theorems". Global Analysis-Proc. Symp. in Pure Math. XIV AMS(1970), 223-231.

[16] Plante, J.F. and Thurston, W.P. "Anosov flows and the fundamental group". Topology V. **11**, (1972), 147-150.

[17] Smale, S. "Differentiable dynamical systems". Bulletin AMS, vol. **73**, (1967), 747-817.

[18] Smale, S. "On gradient dynamical systems". Ann. of Math **74**(1961), 199-206.

[19] Tomter, P. "Anosov Flows on Infra-Homogeneous Spaces". Proc. of Symp. in Pure Math. XIV AMS(1970), 299-327.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

These notes collect some of the talks given in the Seminario del Departamento de Matemáticas Fundamentales de la U.N.E.D. in Madrid. Up to now the following titles have appeared:

1 **Luigi Grasselli,** Crystallizations and other manifold representations.
2 **Ricardo Piergallini**, Manifolds as branched covers of spheres.
3 **Gareth Jones**, Enumerating regular maps and hypermaps.
4 **J.C.Ferrando, M.López-Pellicer**, Barrelled spaces of class N and of class χ_0
5 **Pedro Morales**, Nuevos resultados en Teoria de la medida no conmutativa.
6 **Tomasz Natkaniec**, Algebraic structures generated by some families of real functions.
7 **Gonzalo Riera**, Algebras of Riemann matrices and the problem of units.
8 **Lynne D. James**, Representations of Maps.
9 **Grzegorz Gromadzki**, On supersoluble groups acting on Klein surfaces.
10 **Maria Teresa Lozano**, Flujos en 3-variedades.