Collectanea Mathematica (electronic version): http://www.imub.ub.es/collect

Collect. Math. **55**, 3 (2004), 289–314

Caractères numériques et fonctions de Macaulay

Mireille Martin-Deschamps

Laboratoire de Mahtématiques, UMR 8100 du CNRS
45 avenue des Etats-Unis, F-78035 Versailles Cedex
E-mail: mmd@math.uvsq.fr

Received January 23, 2004. Revised March 15, 2004

Résumé

La postulation des sous-schémas Arithmétiquement Cohen-Macaulay (ACM) de codimension 2 de l'espace projectif $\mathbb{P}^N_k$ est bien connue, et a donné lieu à différentes approches : caractère numérique de Gruson/Peskine, h-vecteur, caractère de postulation de Martin-Deschamps/Perrin... Le premier but de cet article est d'établir l'équivalence de ces notions.

Le deuxième but, et le plus important, est d'étudier la postulation des sous-schémas ACM de codimension 3 de $\mathbb{P}^N$. Pour cela on utilise la description due à Macaulay des fonctions de Hilbert des algèbres quotients d'un anneau de polynômes. On donne, par itération sur le nombre de variables, une nouvelle interprétation de la croissance de ces fonctions.

Abstract

The postulation of Arithmetically Cohen-Macaulay (ACM) subschemes of the projective space $\mathbb{P}^N_k$ is well-known in the case of codimension 2. There are many different ways of recording this numerical information : numerical character of Gruson/Peskine, h-vector, postulation character of Martin-Deschamps/Perrin... The first aim of this paper is to show the equivalence between these notions.

The second, and most important aim, is to study the postulation of codimension 3 ACM subschemes of $\mathbb{P}^N$. We use a result of Macaulay which describes all the Hilbert functions of the quotients of a polynomial ring. By iterating the number of variables, we obtain a new form of the growth of these functions.

Keywords: Postulation, Cohen-Macaulay, codimension three.
MSC2000: 14M05, 14Q05, 13P99.

0. Introduction

Soit k un corps et $\mathbb{P}_k^N$ l'espace projectif de dimension n sur k. Pour classifier les sous-schémas de $\mathbb{P}_k^N$ on leur associe des invariants numériques. Parmi ces invariants un des plus classiques est la postulation, qui donne pour chaque degré d le nombre d'hypersurfaces indépendantes de degré d contenant le sous-schéma considéré.

Le calcul de la postulation est un problème dont la complexité croît avec la codimension du sous-schéma.

En codimension 1, la postulation d'une hypersurface X est entièrement déterminée par son degré d : puisque le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_X$ qui la définit est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d)$, on a pour tout n, $h^0\mathcal{I}_X(n) = h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-d) = \binom{n-d+N}{N}$.

En codimension 2, et pour des sous-schémas localement Cohen-Macaulay, diverses notions ont été introduites pour décrire cette postulation, le type numérique d'Ellingsrud [1], le caractère de postulation de [8], le caractère numérique de [3], le h-vecteur [9], ces deux dernières notions n'étant définies que pour des sous-schémas Arithmétiquement Cohen-Macaulay (ACM). Dans le cas des sous-schémas ACM, ces notions sont bien évidemment équivalentes.

En codimension au moins 3, aucun résultat n'est connu. Calculer la postulation de X revient à calculer la fonction de Hilbert de l'algèbre graduée $k[X_0, \ldots, X_N]/I_X$, où I_X est l'idéal homogène saturé de X. On dispose d'un résultat très général dû à Macaulay [6] qui décrit toutes les fonctions de Hilbert des algèbres graduées quotients d'un anneau de polynômes, mais ce résultat, qui caractérise la "croissance" des fonctions considérées, n'est guère parlant. L'un des buts de cet article est de "décrypter" ce résultat et d'en donner une interprétation qui soit plus utilisable dans la pratique. En particulier on pourra ainsi décrire toutes les postulations des sous-schémas ACM de codimension 3.

Au premier paragraphe, on définit le caractère de postulation d'un sous-schéma fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$ et sa variation par biliaison élémentaire Gorenstein.

Le deuxième paragraphe est consacré au résultat principal de cet article (2.21) qui donne une nouvelle caractérisation des fonctions de Macaulay.

Le troisième paragraphe applique ce résultat aux sous-schémas ACM de codimension 3. En particulier on en déduit au quatrième paragraphe le calcul des degrés et genres des courbes ACM de $\mathbb{P}^4$ de degré inférieur ou égal à 10.

Notations

On désigne par k un corps algébriquement clos, par $\mathbb{P}_k^N$ ou plus simplement $\mathbb{P}^N$ l'espace projectif de dimension $N \geq 2$ et par S l'anneau de polynômes $k[X_0, \ldots, X_N]$. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$-module on note $h^i\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $H^i\mathcal{F}$.

Soient X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^N$ et $\mathcal{I}_X$ son faisceau d'idéaux, on désigne par $s_0(X)$ le plus petit degré d'une hypersurface contenant X, c'est-à-dire $s_0(X) = \inf\{\, n \in \mathbb{Z} \mid h^0\mathcal{I}_X(n) \neq 0 \,\}$.

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une application. On définit :

(1) sa différence première ∂f par $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$,

(2) dans la cas où f est nulle pour $n \ll 0$, sa primitive $f^\sharp$ par $f^\sharp(n) = \sum_{k \leq n} f(k)$,

(3) sa borne supérieure si elle existe par $\sup f = \sup\{\, n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq 0 \,\}$,
(4) sa décalée $f[d]$ par $f[d](n) = f(n+d)$.

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, à support fini, et telle que l'on ait $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = 0$ est appelée un **caractère** [8], et que la différence première d'une fonction à support fini est un caractère.

On fait les conventions suivantes sur les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = 0 \text{ pour } n \in \mathbb{Z},\, p \geq 0 \text{ et } n < p \quad , \quad \binom{n-1}{-1} = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec cette convention, la formule de Pascal $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ est valable pour tous $n > p \geq 0$.

On représentera parfois une fonction à support fini f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par la suite de ses valeurs $(f(0), f(1), \cdots, f(\sup f))$, et la fonction $\binom{n-a-1}{-1}$ par $1_{[a]}$.

1. Caractère de postulation

Définition 1.1. Soient X un sous-schéma de pure dimension M de $\mathbb{P}^N$ et $\mathcal{I}_X$ son faisceau d'idéaux. On définit son caractère de postulation γ_X par la formule :

$$\gamma_X(n) = \partial^{M+2}(h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)).$$

Remarques 1.2. On montrera en 1.5 que c'est bien un caractère. Plus précisément, $M+2$ est le plus petit entier m tel que la fonction $\partial^m(h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))$ soit un caractère.

On notera que la fonction $h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ est l'opposée de la fonction de Hilbert de X, dimension de l'image de la flèche de restriction :

$$H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \to H^0\mathcal{O}_X(n)$$

et qu'elle vaut $-h^0\mathcal{O}_X(n)$ si $h^1\mathcal{I}_X(n)$ est nul, en particulier si X est arithmétiquement Cohen-Macaulay, c'est-à-dire si l'anneau gradué S/I_X est de Cohen-Macaulay.

Remarque 1.3. Si X est dégénéré, c'est-à-dire contenu dans un sous-schéma linéaire $\mathbb{P}^{N'}$de $\mathbb{P}^N$ avec $N' < N$, on voit facilement que son caractère de postulation est le même, calculé dans $\mathbb{P}^N$ ou dans $\mathbb{P}^{N'}$.

Exemple 1.4: Lorsque X est une hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^N$ on a :

$$\begin{aligned} \gamma_X(n) &= \partial^{N+1}(h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n-d) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) \\ &= \partial^{N+1}\left[\binom{n-d+N}{N} - \binom{n+N}{N}\right] \\ &= \binom{n-d-1}{-1} - \binom{n-1}{-1} \end{aligned}$$

donc la fonction γ_X ne prend que deux valeurs non nulles, $\gamma_X(0) = -1$ et $\gamma_X(d) = 1$.

Proposition 1.5

Soit X un sous-schéma de pure dimension M de $\mathbb{P}^N$ et $\gamma = \gamma_X$ son caractère de postulation. Il a les propriétés suivantes :

i) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n) = 0$ *et donc* γ *est un caractère,*
ii) $\gamma(n) = 0$ *pour* $n < 0$,
iii) $\gamma(n) = -\binom{n+N-M-2}{N-M-2}$ *pour* $0 \le n < s_0(X) = \inf\{\, n \in \mathbb{Z} \mid h^0\mathcal{I}_X(n) \neq 0\,\}$,
iv) $\gamma(s_0) > -\binom{s_0+N-M-2}{N-M-2}$.

Démonstration. La fonction $h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ est nulle pour $n < 0$ et est égale à un polynôme de degré M pour $n \gg 0$. Sa différence $(M+1)$-ième est donc à support fini, et γ est un caractère.

Pour $0 \le n < s_0(X)$, on a :

$$\gamma(n) = -\partial^{M+2} h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) = -\partial^{M+2}\binom{n+N}{N} = -\binom{n+N-M-2}{N-M-2}$$

et

$$\gamma(s_0) = h^0\mathcal{I}_X(s_0) - \partial^{M+2}h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s_0) = h^0\mathcal{I}_X(s_0) - \binom{s_0+N-M-2}{N-M-2}. \ \square$$

Proposition 1.6

Le caractère γ_X détermine la postulation et le polynôme de Hilbert de X.

Démonstration. La fonction $h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ est la primitive $(M+2)$-ième de γ_X, et on montre facilement qu'on a [8] :

$$h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-k+M+1}{M+1}\gamma_X(k).$$

Soit P_X le polynôme de Hilbert de X. Pour $n \gg 0$ on a :

$$h^0\mathcal{I}_X(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) = -h^0\mathcal{O}_X(n) = -P_X(n)$$

et

$$\binom{n-k+M+1}{M+1} = \frac{(n-k+M+1)(n-k+M)\cdots(n-k+1)}{(M+1)!}.$$

On en déduit l'égalité des polynômes :

$$P_X(n) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(n-k+M+1)(n-k+M)\cdots(n-k+1)}{(M+1)!}\gamma_X(k). \ \square$$

Corollaire 1.7

Soit X un sous-schéma de $\mathbb{P}^N$ de degré d. On a :

$$d = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\gamma_X(k).$$

Soit C une courbe localement Cohen Macaulay de degré d et genre g de $\mathbb{P}^N$. On a :

$$g - 1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(k-1)(k-2)}{2}\gamma_C(k).$$

Soit S une surface lisse de degré d et genre arithmétique p_a de $\mathbb{P}^N$ et δ le degré de son diviseur canonique. On a :

$$\delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^2-4k)\gamma_S(k) \qquad 1+p_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(k-3)(k-2)(k-1)}{6}\gamma_S(k).$$

Démonstration. En identifiant les coefficients de n^M dans les deux membres de l'égalité :

$$P_X(n) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(n-k+M+1)(n-k+M)\cdots(n-k+1)}{(M+1)!}\gamma_X(k)$$

et en tenant compte de $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_X(k)=0$ on obtient :

$$\frac{d}{M!} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(M+1-k)+\cdots+(1-k)}{(M+1)!}\gamma_X(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(M+1)k}{(M+1)!}\gamma_X(k).$$

On a :

$$\begin{aligned} P_C(n) = nd+1-g &= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2}\gamma_C(k) \\ &= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(n^2-(2k-3)n+(k-1)(k-2)}{2})\gamma_C(k). \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned} P_S(n) = \frac{1}{2}n^2d - \frac{1}{2}n\delta + 1 + p_a &= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1)}{6}\gamma_S(k) \\ = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} &\frac{(n^3-(3k-6)n^2+(3k^2-12k+11)n-(k-3)(k-1)(k-2)}{6})\gamma_S(k). \end{aligned}$$

En tenant compte de $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_C(k) = 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_S(k) = 0$, on en déduit les égalités annoncées. □

Proposition 1.8

Soient X un sous-schéma de pure dimension M de $\mathbb{P}^N$ et γ_X son caractère de postulation. Soit s_1 le plus petit degré d tel que I_X ait deux générateurs minimaux de degré $\leq d$. Alors on a :

$$s_1 = \inf\left\{ n \geq s_0 \mid \gamma_X(n) > \binom{n-s_0+N-M-2}{N-M-2} - \binom{n+N-M-2}{N-M-2} \right\}.$$

Démonstration. Soit $s_0 = s_0(X)$. Pour $n < s_1$ on a :

$$h^0\mathcal{I}_X(n) = \binom{n-s_0+N}{N} \quad \text{et} \quad h^0\mathcal{I}_X(s_1) > \binom{s_1-s_0+N}{N}.$$

On en déduit, pour $s_0 \leq n < s_1$,

$$\gamma_X(n) = \binom{n-s_0+N-M-2}{N-M-2} - \binom{n+N-M-2}{N-M-2}.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\gamma_X(s_1) &= h^0\mathcal{I}_X(s_1) - \binom{s_1 - s_0 + N}{N} + \binom{s_1 - s_0 + N - M - 2}{N - M - 2} - \binom{s_1 + N - M - 2}{N - M - 2}\\ &> \binom{s_1 - s_0 + N - M - 2}{N - M - 2} - \binom{s_1 + N - M - 2}{N - M - 2}. \ \square\end{aligned}$$

Remarque 1.9. Dans le cas de la codimension 2, on obtient :

$$s_1 = \inf\{\, n \geq s_0 \mid \gamma_X(n) > 0 \,\}$$

et dans le cas de la codimension 3 :

$$s_1 = \inf\{\, n \geq s_0 \mid \gamma_X(n) > -s_0 \,\}.$$

Lien avec les résolutions

Soit X un sous-schéma de pure dimension M de $\mathbb{P}^N$ et I_X son idéal saturé dans S. Puisque I_X est de profondeur au moins 1 sur S, sa dimension projective est au plus $N-1$. Il existe donc une résolution graduée (qu'on peut choisir minimale) de I_X par des S-modules libres gradués :

$$0 \to L_{N-1} \to L_{N-2} \to \cdots \to L_0 \to I_X \to 0$$

Pour tout $i \in [0, N-1]$, on écrit $L_i = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} S(-n)^{l_i(n)}$ et on définit la fonction r_X par

$$r_X(n) = \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i l_i(n) - \binom{n-1}{-1}.$$

On remarque que pour des raisons de rang, r_X est un caractère.

Proposition 1.10

On a :

$$r_X = \partial^{N-M-1}\gamma_X \qquad \gamma_X(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-k+N-M-2}{N-M-2} r_X(k).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{L}_i$ le faisceau dissocié associé au S-module libre gradué L_i. On a :

$$h^0\mathcal{L}_i(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-k+N}{N} l_i(k).$$

De la résolution de I_X, on déduit :

$$\begin{aligned}
h^0\mathcal{I}_X(n) &= \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i h^0\mathcal{L}_i(n)\\
&= \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i \sum_{k\in\mathbb{Z}} l_i(k)\binom{n-k+N}{N}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[r_X(k)+\binom{k-1}{-1}\right]\binom{n-k+N}{N}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k)\binom{n-k+N}{N}+\binom{n+N}{N}.
\end{aligned}$$

En différentiant $M+2$ fois l'égalité :

$$h^0\mathcal{I}_X(n)-h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} r_X(k)\binom{n-k+N}{N}$$

on obtient :

$$\gamma_X(n)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\binom{n-k+N-M-2}{N-M-2}r_X(k).$$

En différentiant encore $N-M-1$ fois, on obtient : $\partial^{N-M-1}\gamma_X = r_X$. $\square$

Variation par biliaison élémentaire Gorenstein

Rappelons la notion de biliaison élémentaire Gorenstein, introduite par Hartshorne.

DÉFINITION 1.11. [5] Soient X et X' deux sous-schémas fermés de pure dimension M sans composante immergée de $\mathbb{P}^N$ tracés sur un sous-schéma fermé ACM, Y, de dimension $M+1$ satisfaisant G_1 (Gorenstein en codimension 1), et soit $h\in\mathbb{Z}$. On dit que X' est obtenu par une biliaison élémentaire Gorenstein de hauteur h sur Y à partir de X (ascendante si $h>0$, descendante si $h<0$) si on a une équivalence linéaire de diviseurs généralisés $X'\sim X+hH$, c'est-à-dire un isomorphisme de faisceaux d'idéaux relatifs $\mathcal{I}_{X/Y}\simeq\mathcal{I}_{X'/Y}(h)$.

Du point de vue cohomologique, si on a $h>0$, une biliaison de hauteur h sur Y est équivalente à h biliaisons de hauteur 1 sur Y. On pourra donc se borner à faire le calcul dans ce dernier cas.

Proposition 1.12

Si X' est obtenu par une biliaison élémentaire Gorenstein de hauteur 1 *sur Y à partir de X, on a :*

$$\gamma_{X'}(n)=\gamma_X(n-1)+\gamma_Y(n).$$

Démonstration. On utilise la relation $\mathcal{I}_{X/Y} \simeq \mathcal{I}_{X'/Y}(h)$ et les deux suites exactes :

$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{I}_{X/Y} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{I}_{X'} \to \mathcal{I}_{X'/Y} \to 0.$$

On en déduit, en utilisant le fait que Y est ACM :

$$h^0\mathcal{I}_{X'}(n) = h^0\mathcal{I}_X(n-h) + h^0\mathcal{I}_Y(n) - h^0\mathcal{I}_Y(n-h)$$

et en différentiant $M+2$ fois :

$$\gamma_{X'}(n) = \gamma_X(n-h) + \gamma_Y^\sharp(n) - \gamma_Y^\sharp(n-h).$$

Pour $h = 1$:

$$\gamma_{X'}(n) = \gamma_X(n-1) + \gamma_Y^\sharp(n) - \gamma_Y^\sharp(n-1) = \gamma_X(n-1) + \gamma_Y(n). \ \square$$

Remarque 1.13. Ce résultat est classique pour les sous-schémas de codimension 2 de $\mathbb{P}^N$. Dans ce cas, Y est une hypersurface de degré s et la notion de biliaison élémentaire Gorenstein coïncide avec celle de biliaison élémentaire intersection complète. Si X' est obtenu par une biliaison élémentaire de hauteur 1 sur Y à partir de X, on déduit de 1.4 (voir aussi [8]) qu'on a :

$$\gamma_{X'}(n) - \gamma_X(n-1) = \begin{cases} -1 & \text{pour } n = 0 \\ 1 & \text{pour } n = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Sous-schémas ACM et conditions de Macaulay

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les sous-schémas de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$ qui sont arithmétiquement Cohen-Macaulay (en abrégé ACM), c'est-à-dire dont l'anneau gradué S/I_X est Cohen-Macaulay (de dimension $1 + \dim X$).

DÉFINITION 2.1. Soit X un sous-schéma fermé ACM de $\mathbb{P}^N$ de dimension M et I_X son idéal saturé. Si $L_1, \ldots, L_{M+1}$ sont des formes linéaires générales, elles forment une suite régulière pour S/I_X. On en déduit qu'on a des suites exactes :

$$0 \to S/I_X(-1) \to S/I_X \to S/(I_X + (L_1)) \to O$$
$$0 \to S/I_X + (L_1, \ldots, L_i)(-1) \to S/I_X \to S/I_X + (L_1, \ldots, L_{i+1}) \to 0$$

de S-modules gradués, qui permettent de calculer la fonction de Hilbert h_X de l'anneau artinien $S/I_X + (L_1, \ldots, L_{M+1})$. Cette fonction de Hilbert h_X est le **h-vecteur** de X.

Remarque 2.2. On voit facilement qu'on a :

$$h_X(n) = \partial^{M+1}(h^0\mathcal{O}_\mathbb{P}(n) - h^0\mathcal{I}_X(n))$$

donc $\gamma_X = -\partial h_X$ et la notion de h-vecteur pour un sous-schéma ACM est équivalente à celle de caractère de postulation. De plus, si d est le degré de X, on a l'égalité $d = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k\gamma_X(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_X(k)$.

Remarque 2.3. Dans le cas des sous-schémas ACM de codimension 2, il existe une autre notion équivalente, c'est le caractère numérique de Gruson-Peskine [3].

L'anneau gradué S/I_X d'un sous-schéma est une k-algèbre de type fini, engendrée par sa composante de degré 1. C'est ce que certains auteurs appellent une **G-algèbre standard**. Les fonctions de Hilbert de ces algèbres ont été caractérisées par Macaulay. C'est pourquoi toutes les variantes de la postulation des sous-schémas ACM (caractère de Gruson-Peskine, caractère de postulation, h-vecteur) peuvent s'obtenir à partir des fonctions de Macaulay que nous définissons ci-dessous. On se reportera pour les détails à [6] ou [**?**], qui reprend les résultats sous une forme plus moderne (voir aussi [2]).

Fonctions de Macaulay

Proposition 2.4

Soient α et i des entiers strictement positifs. Alors α peut s'écrire de manière unique sous la forme:

$$\alpha = \binom{m_i}{i} + \binom{m_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{m_j}{j}$$

avec $m_i > m_{i-1} > \cdots > m_j \geq j \geq 1$.

Démonstration. L'existence et l'unicité découlent par récurrence des inégalités suivantes, qui caractérisent m_i :

$$\binom{m_i}{i} \leq \alpha < \binom{m_i+1}{i} = \binom{m_i}{i} + \binom{m_i-1}{i-1} + \cdots + \binom{m_i-i+1}{1} + 1. \ \square$$

Définition 2.5. L'expression de α en fonction des coefficients binomiaux établie en 2.4 est appelée le **développement i-binomial** de α.

On définit alors :

$$\alpha^{<i>} = \binom{m_i+1}{i+1} + \binom{m_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{m_j+1}{j+1}$$

(qui est le développement $(i+1)$-binomial de $\alpha^{<i>}$) et $0^{<i>} = 0$.

Exemple 2.6: $25 = \binom{6}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1}$, $25^{<3>} = \binom{7}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} = 42$.

Remarque 2.7. Si $0 < \alpha \leq i$, les coefficients binomiaux qui apparaissent dans le développement i-binomial de α sont égaux à 1. On en déduit facilement qu'on a alors $\alpha^{<i>} = \alpha$.

Définition 2.8. Une fonction h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ satisfait aux conditions de croissance de Macaulay si elle vérifie $h(n) = 0$ pour $n < 0$, $h(0) = 1$ et $h(i+1) \leq h(i)^{<i>}$ pour tout $i \geq 1$. Si $a = h(1)$, on dira aussi que c'est une fonction de Macaulay de type a.

Le résultat de Macaulay est le suivant :

Théorème 2.9

Une fonction satisfait aux conditions de croissance de Macaulay si et seulement si c'est la fonction de Hilbert d'une G-algèbre standard.

Remarque 2.10. Toute fonction h binomiale, c'est-à-dire de la forme $h(n) = \binom{p+n}{n}$, où p est un entier positif, est une fonction de Macaulay de type $p+1$. Plus généralement, si une fonction h est binomiale sur un intervalle $[n_0, n_1]$ (resp. $[0, n_1]$), elle satisfait aux conditions de croissance sur l'intervalle $[n_0+1, n_1]$ (resp. $[0, n_1]$).

Nous allons mettre en évidence quelques propriétés simples des fonctions de Macaulay.

Proposition 2.11

a) *Soient α, β et i des entiers strictement positifs avec $\alpha < \beta$. Alors on a $\alpha^{<i>} < \beta^{<i>}$.*
b) *Soit h une fonction de Macaulay de type a. Alors $h(n+1) \leq \binom{a+n}{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.*
c) *S'il existe $n \geq 1$ tel que $h(n) = 0$, alors $h(m) = 0$ pour tout $m \geq n$.*
d) *S'il existe $n \geq 1$ tel que $h(n) = 1$, alors $h(m) \leq 1$ pour tout $m \geq n$.*
e) *S'il existe $n > 1$ tel que $h(n) < n+1$, alors la fonction h est décroissante pour $m > n$.*

Démonstration. a) Ecrivons les développements i-binomiaux :

$$\alpha = \binom{m_i}{i} + \binom{m_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{m_j}{j}, \quad \beta = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_{j'}}{j'}.$$

Quitte à retrancher un même nombre à α et β, on peut supposer qu'on a $m_i \neq n_i$.

Si $m_i < n_i$, alors $\alpha < \binom{m_i+1}{i} \leq \binom{n_i}{i} \leq \beta$. De même si $m_i > n_i$, alors $\alpha > \beta$. Donc si $\alpha < \beta$, on a $m_i < n_i$, $m_i + 1 < n_i + 1$ et $\alpha^{<i>} < \beta^{<i>}$.

b) résulte de a).

d) résulte de $1^{<n>} = 1$.

e) Si $h(n) < \binom{n+1}{n}$, alors $h(n)^{<n>} = h(n)$ (cf. 2.7). □

Remarque 2.12. Soit h une fonction de Macaulay de type $a \neq 0$, vu 2.11 b, il est naturel de lui associer l'entier (éventuellement infini) $s_0(h) = \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid h(n) < \binom{a+n-1}{n} \,\}$. Par définition il est > 1.

S'il est infini, h est binomiale : $h(n) = \binom{a+n-1}{n}$ pour $n \geq 0$, $h(n) = 0$ pour $n < 0$. Vu les conventions qu'on a faites sur les coefficients binomiaux, on peut encore l'écrire $h(n) = \binom{a+n-1}{a-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

D'après 2.9, toute fonction de Macaulay à support fini est la fonction de Hilbert d'une G-algèbre standard de longueur finie. On montre en fait ([6] ou [**?**]) que c'est le quotient d'un anneau de polynômes par un idéal monomial. En rajoutant des variables on peut relever un tel idéal en un idéal saturé de $k[X_0, \ldots, X_N]$ de la même codimension. On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 2.13

Tout fonction de Macaulay de type a à support fini est le h-vecteur d'un sous-schéma ACM X de $\mathbb{P}^N$ de codimension a.

Remarque 2.14. Si X n'est pas dégénéré, le type de h_X est égal à la codimension a de X et $s_0(h_X) = s_0(X)$. Soit $s := s_0(X)$. On peut alors donner une borne inférieure pour le degré de X :

$$d = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_X(k) \geq \sum_{0\leq k<s} h_X(k) = \sum_{0\leq k<s} \binom{a+k-1}{k} = \binom{a+s-1}{s-1}.$$

Le lemme suivant établit un résultat technique qui sera utile dans la preuve du théorème principal 2.21.

Lemme 2.15

Soient α, β et i des entiers strictement positifs et

$$\alpha = \binom{m_i}{i} + \binom{m_{i-1}}{i-1} + \ldots + \binom{m_j}{j}$$

le développement i-binomial de α. Supposons qu'on ait $\beta < \binom{m_j}{j-1}$. Alors on a :

$$(\alpha+\beta)^{<i>} = \alpha^{<i>} + \beta^{<j-1>}.$$

Démonstration. Ecrivons le développement $(j-1)$-binomial de β :

$$\beta = \binom{m'_{j-1}}{j-1} + \binom{m'_{j-2}}{j-2} + \ldots + \binom{m'_k}{k}.$$

On a $\beta < \binom{m_j}{j-1}$ donc $m'_{j-1} < m_j$ et l'écriture :

$$\alpha+\beta = \binom{m_i}{i} + \ldots + \binom{m_j}{j} + \binom{m'_{j-1}}{j-1} + \ldots + \binom{m'_k}{k}$$

est le développement i-binomial de $\alpha+\beta$.

Alors on a

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^{<i>} &= \binom{m_{i+1}}{i+1} + \cdots + \binom{m_{j+1}}{j+1} + \binom{m'_j}{j} + \cdots + \binom{m'_{k+1}}{k+1} \\ &= \alpha^{<i>} + \beta^{<j-1>}\,. \square\end{aligned}$$

Il est facile de décrire les fonctions de Macaulay de type 1 ou 2.

Proposition 2.16

Une fonction $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ est une fonction de Macaulay de type 1 si et seulement si elle vérifie $h(n) = 0$ pour $n < 0$, $h(0) = h(1) = 1$ et si elle est décroissante et prend seulement les valeurs 1 et 0.

Une fonction h est une fonction de Macaulay de type 2 si et seulement si il existe un entier $s_0 > 1$ (éventuellement infini) tel que $h(n) = 0$ pour $n < 0$, $h(n) = n+1$ pour $n < s_0$ et tel que h soit décroissante pour $n \geq s_0 - 1$. On a alors $s_0 = s_0(h)$.

Démonstration. La première assertion est une conséquence immédiate de 2.11.

Pour le type 2, on pose $s_0 = 1 + \sup\{n \mid h(n) = n+1\}$. Pour $n \geq s_0$, le résultat est encore une conséquence de 2.11.

Les réciproques sont immédiates. □

On retrouve ainsi immédiatement la positivité du caractère d'un sous-schéma ACM de pure codimension 2 (cf. [3], [8]). Posons tout d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 2.17. Un caractère γ est positif s'il vérifie $\gamma(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma(0) = -1$, $\gamma(n) \geq 0$ pour tout $n \geq s_0(\gamma) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \gamma(n) \neq -1\}$.

Remarque 2.18. Soit h une fonction de Macaulay de type 2. D'après ce qui précède sa différence première ∂h vérifie $\partial h(n) = 0$ pour $n < 0$, $\partial h(n) = 1$ pour $0 \leq n < s_0$ et $\partial h(n) \leq 0$ pour $n \geq s_0$.

On en déduit qu'une fonction h à support fini est une fonction de Macaulay de type 2 si et seulement si l'opposée de sa différence première $-\partial h$ est un caractère positif γ vérifiant $s_0(\gamma) \geq 2$. Dans ce cas, on a $s_0(\gamma) = s_0(h)$.

Si h est de type 1, $\gamma = -\partial h$ est le caractère (positif) d'une hypersurface de degré d. On a alors $s_0(\gamma) = 1$ et $s_0(h) = d$.

Si h est de type 0, $\gamma = -\partial h$ est le caractère (positif) d'un hyperplan. On a alors $s_0(\gamma) = 1$ et $s_0(h)$ n'est pas défini.

Théorème 2.19 [3]

Soit X un sous-schéma ACM de pure codimension 2 de $\mathbb{P}^N$. Alors son caractère γ_X est positif. Inversement, soit γ un caractère positif. Alors il existe un sous-schéma X de pure codimension 2 et ACM de $\mathbb{P}^N$ tel qu'on ait $\gamma = \gamma_X$.

Dès qu'on a $h(1) \geq 3$, il est beaucoup plus difficile de décrire les fonctions de Macaulay. Avant d'aborder ce problème, nous allons donner une indication sur la croissance de ces fonctions.

Lemme 2.20

Soit h une fonction de Macaulay de type a non binomiale. On a $h(n) = o(n^{a-1})$.

Démonstration. Pour $a = 1$, $h(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Pour $a > 1$, posons $s := s_0(h)$. On a :

$$h(s) \leq \binom{a+s-1}{s} - 1 = \binom{a+s-2}{s} + \binom{a+s-3}{s-1} + \cdots + \binom{a}{2}.$$

On en déduit :

$$h(s+1) \leq h(s)^{<s>} \leq \binom{a+s-1}{s+1} + \cdots + \binom{a+1}{3}$$

et, par récurrence,

$$h(s+k) \leq \binom{a+s+k-2}{s+k} + \cdots + \binom{a+k}{k+2} \leq s\binom{a+s+k-2}{a-2}$$

qui est de l'ordre de k^{a-2} quand k tend vers l'infini. □

Le résultat suivant permettra de faire des récurrences sur le type de la fonction, et donc d'avoir une description de proche en proche des fonctions de Macaulay de type > 2 :

Théorème 2.21

Soit h une fonction non binomiale vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = a > 1$. Alors h est une fonction de Macaulay si et seulement si il existe $r + 1$ fonctions de Macaulay ($r \geq 1$) $h_0, \ldots, h_r$ avec :

i) $h_i(1) = a - 1$ *pour* $0 \leq i < r$, $h_r(1) \leq a - 1$,

ii) *pour* $1 \leq i \leq r$, $\sup h_i < s_0(h_{i-1}) - 1$ *ou* $s_0(h_{i-1})$ *est infini,*

iii) $h = h_0 + h_1[-1] + \cdots + h_r[-r]$.

De plus, $h_0, \ldots, h_r$ sont déterminées de manière unique par ces conditions et on a $s_0(h) = r + 1$.

La démonstration va se faire en plusieurs étapes. On commence par un lemme :

Lemme 2.22

Soient $h_0, \ldots, h_r$ ($r \geq 1$) des fonctions de Macaulay vérifiant les conditions de l'énoncé de 2.21. Posons $t = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid s_0(h_i) = +\infty\}$ si cet ensemble est non vide, $t = -1$ sinon. Alors h_i est binomiale pour $0 \leq i \leq t$. De plus, la fonction $h = h_0 + h_1[-1] + \cdots + h_r[-r]$ est une fonction de Macaulay de type a qui vérifie les propriétés suivantes :

– $s_0(h) = r + 1$,

– $s_0(h_{t+1}) + t + 1 = \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid h(n) < \sum_{i=0}^{t+1} \binom{a+n-2-i}{n-i} \,\}$,

– $h(n) = \sum_{i=0}^{t} \binom{a+n-2-i}{n-i} \} + h'(n - t - 1)$ *où h' est une fonction de Macaulay de type $\leq a$,*

– *on a $h(n) = o(a^{n-2})$ si et seulement si $t = -1$.*

Démonstration. On a $h(0) = h_0(0) = 1$, $h(1) = h_0(1) + h_1(0) = a$.

Pour $1 \leq i \leq r$, si $s_0(h_i)$ est infini, ce qui revient à dire que h_i est binomiale, $\sup h_i$ est infini, donc d'après la condition ii) de 2.21, $s_0(h_{i-1})$ est également infini. L'ensemble des indices i tels que $s_0(h_i)$ soit infini est donc, s'il est non vide, un intervalle $[0, t]$.

Traitons tout d'abord le cas où $t = r$. On a alors $h(n) = \sum_{i=0}^{t} \binom{a+n-2-i}{a-2}$.

Pour $n \leq r$, on peut encore l'écrire :

$$h(n) = \binom{a+n-2}{n} + \binom{a+n-3}{n-1} + \cdots + \binom{a-2}{0} = \binom{a+n-1}{n},$$

et $h(n)^{<n>} = \binom{a+n}{n+1}$ et $h(n+1) = h(n)^{<n>}$ pour $n < r$.

Pour $n \geq r + 1$, on peut l'écrire :

$$h(n) = \binom{a+n-2}{n} + \binom{a+n-3}{n-1} + \cdots + \binom{a+n-1-r}{n-r+1} + \binom{a'+n-1-r}{n-r}$$

où $a' \leq a - 1$ est le type de h_r. C'est le développement n-binomial de $h(n)$ et $h(n+1) = h(n)^{<n>}$. On en déduit aussi $h(r + 1) \leq h(r)^{<r>} - 1$.

Alors la condition de croissance $h(n + 1) \leq h(n)^{<n>}$ est vérifiée pour tout $n > 0$.

Supposons maintenant $t < r$. Pour tout i tel que $t+2 \leq i < r$ on a $\sup h_i \geq s_0(h_i) - 1$, donc la condition $\sup h_i < s_0(h_{i-1}) - 1$ entraîne que la suite des $s_0(h_i)$ pour $t+1 \leq i < r$ est strictement décroissante. On a :

$$r+1 \leq \sup h_r + r + 1 \leq s_0(h_{r-1}) + r - 1 \leq \cdots \leq s_0(h_{t+1}) + t + 1.$$

On va d'abord traiter le cas $n \leq r$, puis $n > s_0(h_{t+1}) + t + 1$, puis les cas intermédiaires.

Pour $0 \leq n \leq r$, on a $n < s_0(h_i) + i$ pour tout $i < r$ donc d'après la définition de $s_0(h_i)$ et en utilisant le fait que h_i est une fonction de Macaulay de type $a-1$, on a $h_i(n-i) = \binom{a+n-i-2}{a-2}$ pour $i < r$. On a aussi :

$$\begin{aligned} h(n) &= h_0(n) + h_1(n-1) + \cdots + h_n(0) \\ &= \binom{a+n-2}{n} + \binom{a+n-3}{n-1} + \cdots + 1 \\ &= \binom{a+n-1}{n} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} h(r+1) &= h_0(r+1) + h_1(r) + \cdots + h_r(1) \\ &= \binom{a+r-1}{r+1} + \cdots + \binom{a}{2} + h_r(1) \\ &\leq \binom{a+r-1}{r+1} + \cdots + \binom{a}{2} + \binom{a-1}{1} \\ &< \binom{a+r}{r+1} \end{aligned}$$

donc on a $r+1 = \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid h(n) < \binom{a+n-1}{n} \,\}$, et la condition de croissance $h(n+1) \leq h(n)^{<n>}$ est vérifiée pour $0 \leq n \leq r$.

Pour $n < s_0(h_{t+1}) + t + 1$ on a :

$$h(n) \geq h_0(n) + \cdots + h_{t+1}(n-t-1) = \sum_{i=0}^{t+1} \binom{a+n-2-i}{a-2}.$$

Pour $n \geq s_0(h_{t+1}) + t + 1$ on a $h_i(n) = 0$ pour tout $i > t+1$, donc

$$\begin{aligned} h(n) &= h_0(n) + \cdots + h_{t+1}(n-t-1) \\ &= \sum_{i=0}^{t} \binom{a+n-2-i}{n-i} + h_{t+1}(n-t-1) \\ &< \sum_{i=0}^{t} \binom{a+n-2-i}{n-i} + \binom{a+n-2-t}{n-t} = \sum_{i=0}^{t+1} \binom{a+n-2-i}{n-i} = \sum_{i=0}^{t+1} \binom{a+n-2-i}{a-2} \end{aligned}$$

puisque $h_{t+1}(n-t-1) < \binom{a+n-2-t}{n-t}$.

On en déduit (en utilisant 2.15) qu'on a d'une part :

$$
\begin{aligned}
h(n)^{<n>} &= \left(\sum_{i=0}^{t}\binom{a+n-2-i}{n-i}\right)^{<n>} + h_{t+1}(n-t-1))^{<n-t-1>} \\
&= \sum_{i=0}^{t}\binom{a+n-1-i}{n+1-i} + h_{t+1}(n-t-1))^{<n-t-1>} \\
&\geq \sum_{i=0}^{t}\binom{a+n-1-i}{n+1-i} + h_{t+1}(n-t)) = h(n+1)
\end{aligned}
$$

donc la condition de croissance est vérifiée pour $n \geq s_0(h_{t+1}) + t + 1$, d'autre part :

$$
s_0(h_{t+1}) + t + 1 = \inf\left\{ n \in \mathbb{N} \mid h(n) < \sum_{i=0}^{t+1}\binom{a+n-2-i}{a-2} \right\}.
$$

Pour $1 \leq i \leq r-1$ et $s_0(h_i) + i \leq n < s_0(h_{i-1}) + i - 1$, on a :

$$
h(n) = \binom{a+n-2}{n} + \cdots + \binom{a+n-i-1}{n-i+1} + h_i(n-i)
$$

et de plus $h_i(n-i) < \binom{a+n-i-1}{n-i}$. D'après 2.15 on en déduit :

$$
h(n)^{<n>} = \binom{a+n-1}{n+1} + \cdots + \binom{a+n-i}{n-i+2} + h_i(n-i)^{<n-i>}
$$

De plus, pour tout $j \leq i-1$, on a $n < s_0(h_j) + j$, et on en déduit :

$$
\begin{aligned}
h(n+1) &= h_0(n+1) + \cdots + h_{i-1}(n+2-i) + h_i(n+1-i) \\
&\leq \binom{a+n-1}{n+1} + \cdots + \binom{a+n-i}{n-i+2} + h_i(n-i)^{<n-i>} = h(n)^{<n>}.
\end{aligned}
$$

Pour $r+1 \leq n < s_0(h_{r-1}) + r - 1$ on a :

$$
h(n) = \binom{a+n-2}{n} + \cdots + \binom{a+n-r-1}{n-r+1} + h_r(n-r)
$$

et de plus $h_r(n-r) < \binom{a+n-r-1}{n-r}$ puisque h_r est de type $a' \leq a-1$. On conclut comme dans le cas précédent.

Posons $h' = h_{t+1} + \cdots + h_r[t+1-r]$ si $t \leq r-1$ et $h' = 0$ si $t = r$, c'est-à-dire qu'on a :

$$
h(n) = \sum_{i=0}^{t}\binom{a+n-2-i}{a-2} + h'(n-t-1).
$$

Alors le résultat qu'on vient de montrer s'applique à h' et montre que si elle est non nulle, c'est une fonction de Macaulay, de type a si $t+1 < r$, de type $\leq a-1$ si $t+1 = r$.

La dernière assertion (ordre de grandeur de h) est une conséquence de 2.20. $\square$

Démonstration. de 2.21.
Unicité

Supposons qu'on ait deux écritures :

$$h = h_0 + h_1[-1] + \cdots + h_r[-r] = g_0 + g_1[-1] + \cdots + g_{r'}[-r']$$

avec des fonctions vérifiant les conditions de l'énoncé.

On peut alors écrire, en regroupant les composantes binomiales :

$$h(n) = \sum_{i=0}^{t} \binom{a+n-i-2}{a-2} + h'(n-t-1) = \sum_{i=0}^{t'} \binom{a+n-i-2}{a-2} + g'(n-t'-1)$$

où h' et g' sont des fonctions de Macaulay de type $\leq a$.

On a vu en 2.22 qu'on a $h(n) = o(a^{n-2})$ si et seulement si $t = -1$. On en déduit que $t = t'$, $h' = g'$, et en retranchant la somme des composantes binomiales, on se ramène au cas où $t = t' = -1$.

D'après 2.22 on a $s_0(h) = r + 1$ donc r est déterminé par h, et $r = r'$.

De même, on a vu dans la preuve de 2.22 que $s_0(h_0) = s_0(h_{t+1})$ est déterminé par h donc $s_0(h_0) = s_0(g_0)$ et pour $n > s_0(h_0)$, $h(n) = h_0(n) = g_0(n)$. Les fonctions h_0 et g_0 sont donc égales.

Soit alors $i_0 \leq r-2$ tel qu'on ait $h_i = g_i$ pour tout $i \leq i_0$. Posons :

$$h'[-i_0 - 1] = h - h_0 - h_1[-1] - \cdots - h_{i_0}[-i_0].$$

On a

$$h' = h_{i_0+1} + h_{i_0+2}[-1] + \cdots + h_r[i_0 + 1 - r] = g_{i_0+1} + g_{i_0+2}[-1] + \cdots + g_r[i_0 + 1 - r]$$

et pour les mÍmes raisons que ci-dessus on a :

$$s_0(h_{i_0+1}) = s_0(g_{i_0+1}) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} \mid h'(n) < \binom{a+n-2}{n} \right\}$$

et pour $n \geq s_0(h_{i_0+1})$, $h'(n) = h_{i_0+1}(n) = g_{i_0+1}(n)$, donc $h_{i_0+1} = g_{i_0+1}$.

On a donc $h_i = g_i$ pour tout $i \leq r-1$ et donc $h_r = g_r$ et l'écriture est unique.

Existence quand h est à support fini

Montrons dans ce cas l'existence, pour a fixé, par récurrence sur $h^\sharp(\infty) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h(n) \geq 1 + a$.

– 1er cas : $h^\sharp(\infty) = 1 + a$.
  Alors on a $h(n) = 0$ pour tout $n \geq 2$. On définit les deux fonctions de Macaulay h_0 et h_1 par :

$$h_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ a-1 & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases} \quad , \quad h_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour tout } n \geq 1\,. \end{cases}$$

  On a $s_0(h_0) = 2$, $\sup h_1 = 0$ et $h = h_0 + h_1[-1]$ donc les propriétés cherchées sont vérifiées.

– 2ème cas : $h^\sharp(\infty) > 1 + a$.
Soit $N = \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid h(n) < \binom{a+n-2}{n} \,\}$. Définissons les fonctions h_0 et h' par :

$$h_0(n) = \begin{cases} \binom{a+n-2}{n} & \text{pour } n < N \\ h(n) & \text{pour } n \geq N \end{cases} \quad , \quad h' = (h - h_0)[1].$$

Par construction on a $s_0(h_0) = N$. Pour montrer que h_0 est une fonction de Macaulay (de type $a - 1$) il suffit de vérifier la condition de croissance pour $n = N - 1$, c'est-à-dire $h_0(N) \leq h_0(N-1)^{<N-1>}$. Or on a

$$h_0(N-1) = \binom{a+N-3}{N-1} \quad \text{donc} \quad h_0(N-1)^{<N-1>} = \binom{a+N-2}{N} > h_0(N).$$

Nous allons montrer maintenant que h' est une fonction de Macaulay. C'est par construction une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$$h'(0) = h(1) - h_0(1) = 1 \quad , \quad h'(1) = h(2) - h_0(2).$$

– Si $N = 2$, $h(2) = h_0(2)$ et $h'(1) = 0$.
– Si $N > 2$,

$$h_0(2) = \binom{a}{2} \quad \text{et} \quad \binom{a}{2} \leq h(2) \leq \binom{a+1}{2} \quad \text{donc} \quad 0 \leq h'(1) \leq a.$$

Puisque $\sup h' \leq N - 2$ il suffit de vérifier les conditions de croissance pour $n < N - 2$.

Pour $n < s_0(h)$:

$$h'(n) = \binom{a+n}{n+1} - \binom{a+n-1}{n+1} = \binom{a+n-1}{n}$$

est binomiale et les conditions de croissance sont vérifiées.

Pour $s_0(h) - 1 \leq n < N - 2$, on a :

$$h(n+1) < \binom{a+n}{n+1} \quad \text{donc} \quad h'(n) < \binom{a+n-1}{n}.$$

Le lemme 2.15 appliqué à $h(n+1) = \binom{a+n-1}{n+1} + h'(n)$ (avec $i = j = n + 1$) donne :

$$h(n+1)^{<n+1>} = \binom{a+n}{n+2} + h'(n)^{<n>}.$$

Alors puisque h est une fonction de Macaulay on a :

$$h(n+2) = \binom{a+n}{n+2} + h'(n+1) \leq h(n+1)^{<n+1>} = \binom{a+n}{n+2} + h'(n)^{<n>}$$

d'où le résultat.

– Si $h'(1) < a$, on pose $h' = h_1$ et on a $h = h_0 + h_1[-1]$.
– Si $h'(1) = a$, $h'^\sharp(\infty) = h^\sharp(\infty) - h_0^\sharp(\infty) < h^\sharp(\infty)$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à h' ; il existe des fonctions à support fini $h_1, \ldots, h_r$ avec $r \geq 2$ et :
  – $h_i(1) = a - 1$ pour $0 \leq i < r$, $h_r(1) \leq a - 1$,
  – $\sup h_i < s_0(h_{i-1}) - 1$,
  – $h' = h_1 + h_2[-1] + \cdots + h_r[1 - r]$.

On a alors $h = h_0 + h_1[-1] + \cdots + h_r[-r]$ et il reste à vérifier que $\sup h_1 < s_0(h_0) - 1$. Or on a $\sup h_1 \leq \sup h' \leq N-2$ et $s_0(h_0) = N$ d'où le résultat.

Existence dans le cas général

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $h(n) < \binom{a+n-2}{n}$, on définit N, h_0 et h' comme précédemment et on montre de la même manière que h_0 et h' sont des fonctions de Macaulay. De plus, h' étant à support fini, on peut lui appliquer le résultat précédent.

Sinon, l'ensemble :

$$S = \left\{ s \in \mathbb{N} \mid \forall n, h(n) \geq \binom{a+n-2}{a-2} + \binom{a+n-3}{a-2} + \cdots + \binom{a+n-s-2}{a-2} \right\}$$

est (un intervalle) non vide et borné supérieurement.

En effet, sinon il est égal à $\mathbb{N}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall s \in \mathbb{N}$, on a :

$$h(n) \geq \binom{a+n-2}{a-2} + \binom{a+n-3}{a-2} + \cdots + \binom{a+n-s-2}{a-2}.$$

En particulier, pour $s = n$, on obtient :

$$h(n) \geq \binom{a+n-2}{a-2} + \binom{a+n-3}{a-2} + \cdots + \binom{a-2}{a-2} = \binom{a+n-1}{n}$$

donc $h(n) = \binom{a+n-1}{n}$ et h est binomiale ce qui est exclu.

Soit alors t la borne supérieure de cet intervalle. On pose :

$$h(n) = \sum_{i=0}^{t} \binom{a+n-i-2}{a-2} + h'(n-t-1)$$

et on montre comme dans la preuve du cas à support fini que h', si elle est non nulle, est de Macaulay de type $\leq a$.

Si $h'(1) < a$, l'égalité ci-dessus est la décomposition cherchée et vérifie les conditions i), ii) et iii) avec $r = t+1$, $h_i(n-i) = \binom{a+n-i-2}{n-i}$ pour $0 \leq i \leq t$ et $h_r = h'$.

Si $h'(1) = a$, par définition de t, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $h'(n) < \binom{a+n-2}{n}$ et on peut appliquer le cas précédent à h' ; il existe $r+1$ fonctions de Macaulay $(r \geq 1)$ $h_0, \ldots, h_r$ avec :

i) $h_i(1) = a-1$ pour $0 \leq i < r$, $h_r(1) \leq a-1$,
ii) pour $1 \leq i \leq r$, h_i est à support fini et $\sup h_i < s_0(h_{i-1}) - 1$,
iii) $h = h_0 + h_1[-1] + \cdots + h_r[-r]$.

On a alors

$$h(n) = \sum_{i=0}^{t} \binom{a+n-i-2}{a-2} + h_0(n-t-1) + \cdots + h_r(n-t-r)$$

et on vérifie que les conditions de l'énoncé sont encore vérifiées pour cette décomposition.

Remarque 2.23. Dans la décomposition obtenue $h = h_0 + h_1[-1] + \cdots + h_r[-r]$ on distinguera :

– si $h(n)$ est d'ordre $a-2$ en n quand n tend vers $+\infty$, des fonctions de Macaulay $h_0, \ldots h_t$ binomiales de type $a-1$;

– des fonctions de Macaulay $h_{t+1}, \dots h_r$ non binomiales, à support fini et de type $a-1$, sauf éventuellement h_{t+1} qui peut être à support infini et h_r qui peut être de type $< a-1$.

Si h est à support fini, les fonctions h_i sont toutes à support fini. □

3. Sous-schémas ACM de codimension 3

Nous allons nous limiter aux sous-schémas ACM de $\mathbb{P}^N$. Cependant nous pouvons, en appliquant aux sous-schémas de codimension 3, énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.1

Soit X un sous-schéma de pure codimension 3 de $\mathbb{P}^N$ et $\gamma = \gamma_X$ son caractère de postulation. Il a les propriétés suivantes :

i) $\gamma(n) = 0$ *pour* $n < 0$,
ii) $\gamma(n) = -(n+1)$ *pour* $0 \leq n < s_0(X) = \inf\{\, n \in \mathbb{Z} \mid h^0\mathcal{I}_X(n) \neq 0\,\}$,
iii) $\gamma(s_0) \geq -s_0$,
iv) $s_1 = \inf\{\, n \geq s_0 \mid \gamma_C(n) > -s_0\,\}$.

Proposition 3.2

Soit X un sous-schéma ACM de $\mathbb{P}^N$ de codimension 3, tracé sur un sous-schéma ACM, Y, de codimension 2. Alors la fonction $\gamma_X - \gamma_Y^\sharp$ est positive.

Démonstration. On peut supposer, quitte à faire un changement de coordonnées, que la droite définie par $(X_0, \dots, X_{N-2})$ ne rencontre pas Y. Soit $S' = k[X_0, X_1, \dots, X_{N-2}]$. L'anneau S/I_X est de profondeur $N-2$, donc de dimension projective 1, sur S', et l'idéal $I_{X/Y}$ est un S'-module libre gradué. De plus, l'anneau gradué S/I_Y est un S' module libre gradué. On a donc des isomorphismes :

$$S/I_Y \simeq \oplus_{n\in\mathbb{Z}} S'(-n)^{L_0(n)} \qquad I_{X/Y} \simeq \oplus_{n\in\mathbb{Z}} S'(-n)^{L(n)}$$

où L et L_0 sont deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On en déduit :

$$h^0\mathcal{O}_X(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \binom{n-m+N-2}{N-2}(L_0(m) - L(m))$$

$$\gamma_X(n) = -\partial^{N-1}h^0\mathcal{O}_X(n) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} \binom{n-m-1}{-1}(L_0(m) - L(m))$$

$$\gamma_X = L - L_0$$

et :

$$h^0\mathcal{O}_Y(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \binom{n-m+N-2}{N-2} L_0(m)$$

$$\gamma_Y^\sharp(n) = -\partial^{N-1}h^0\mathcal{O}_Y(n) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} \binom{n-m-1}{-1} L_0(m) = -L_0(n)$$

donc $\gamma_X - \gamma_Y^\sharp = L$ est positive. □

Remarque 3.3. Ce résultat est déjà vrai si X est de codimension 2 et Y de codimension 1. Dans ce cas si d est le degré de Y, la fonction $\gamma_Y^\sharp$ vaut -1 sur l'intervalle $[0, d-1]$ et 0 ailleurs. La fonction γ_X vaut -1 sur l'intervalle $[0, s_0(X)-1]$ et est positive pour $n \geq s_0(X)$, d'où le résultat puisque $s_0(X) \leq d$.

Corollaire 3.4

Soit X un sous-schéma ACM intègre de $\mathbb{P}^N$ de codimension 3, γ_X son caractère, $s_0 = s_0(X)$ et $s_1 = \inf\{\, n \geq s_0 \mid \gamma_X(n) > -s_0 \,\}$. Alors on a, pour $n \geq s_1$, $\gamma_X(n) \geq \inf\{0, n - s_0 - s_1 + 1\}$.

Démonstration. Soit Y l'intersection complète de deux hypersurfaces de degrés s_0 et s_1. On calcule le caractère γ_Y grâce à la résolution :

$$0 \to S[-s_0 - s_1] \to S[-s_0] \oplus S[-s_1] \to I_Y \to 0$$

et on obtient :

$$\gamma_Y(n) = \begin{cases} -1 \text{ pour } 0 \leq n < s_0 \\ 1 \text{ pour } s_1 \leq n < s_0 + s_1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\gamma_Y^\sharp(n) = \begin{cases} -n-1 \text{ pour } 0 \leq n < s_0 \\ -s_0 \text{ pour } s_0 \leq n < s_1 \\ n - s_0 - s_1 + 1 \text{ pour } s_1 \leq n < s_0 + s_1 - 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc $\gamma_X - \gamma_Y^\sharp$ est toujours nulle pour $n < s_1$.

Si X est intègre, il existe une hypersurface intègre W de degré s_0 contenant X, et une hypersurface W' contenant X de degré s_1 ne contenant pas W. Alors X est contenue dans l'intersection complète Y de W et W' et $\gamma_X - \gamma_Y^\sharp$ est positive.

On en déduit, pour $n \geq s_1$, $\gamma_X(n) \geq -\gamma_Y^\sharp(n) = \inf\{0, n - s_0 - s_1 + 1\}$. □

Nous pouvons, grâce à 2.21, décrire tous les caractères de postulation des sous-schémas ACM de $\mathbb{P}^N$ de codimension 3.

Proposition 3.5

Soit X un sous-schéma ACM de $\mathbb{P}^N$ de codimension 3 et γ_X son caractère de postulation. Il existe un entier $r \geq 0$, des caractères positifs $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ (cf. 2.17) vérifiant :

- $r = s_0(X) - 1$,
- $\sup \gamma_i < s_0(\gamma_{i-1})$,
- $\gamma_X = \gamma_0 + \gamma_1[-1] + \cdots + \gamma_r[-r]$.

Inversement, pour tout entier $r \geq 0$, pour tous caractères positifs $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ vérifiant $\sup \gamma_i < s_0(\gamma_{i-1})$, il existe un sous-schéma ACM de $\mathbb{P}^N$ de codimension 3, X, tel que $\gamma_X = \gamma_0 + \gamma_1[-1] + \cdots + \gamma_r[-r]$.

Démonstration. Si X est contenu dans un hyperplan, son caractère est celui d'un sous-schéma ACM de $\mathbb{P}^{N-1}$ de codimension 2. Il est positif. On pose $\gamma_X = \gamma_0$.

Si X n'est pas dégénéré, son h-vecteur h_X est de type 3 et à support fini. On lui applique le Théorème 2.21 : il existe $r+1$ fonctions de Macaulay à support fini ($r \geq 1$) $h_0, \ldots, h_r$ avec :

- $h_i(1) = 2$ pour $0 \leq i < r$, $h_r(1) \leq 2$,
- $\sup h_i < s_0(h_{i-1}) - 1$,
- $h_X = h_0 + h_1[-1] + \cdots + h_r[-r]$.

D'après 2.18 pour tout i, $\gamma_i = -\partial h_i$ est un caractère positif, $\sup \gamma_i = \sup h_i + 1$ et $s_0(\gamma_i) = s_0(h_i)$ pour $i < r$.

La propriété inverse est la conséquence de 2.13 et 2.22. □

Proposition 3.6

Avec les notations de 3.5, on a les propriétés suivantes :

- *pour* $s_0(X) \leq n < s_0(\gamma_{r-1}) + s_0(X) - 2$, *on a* $\gamma_X(n) \geq -s_0(X)$,
- *pour* $s_0(\gamma_i) + i \leq n < s_0(\gamma_{i-1}) + i - 1$, *on a* $\gamma_X(n) \geq -i$,
- *pour* $s_0(\gamma_0) \leq n$, *on a* $\gamma_X(n) \geq 0$.

Démonstration. Si X est dégénéré, on a $r = 0$, $\gamma_X = \gamma_0$ est donc un caractère positif.

Supposons X non dégénéré et gardons les notations de la démonstration de 3.5. Posons $s_0 = s_0(X)(= r+1)$. On a vu dans la preuve de 2.22 que, pour $s_0 \leq n < s_0(h_{r-1}) + r - 1$, on a :

$$h_X(n) = \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n-r+2}{1} + h_r(n-r).$$

On en déduit qu'on a :

$$\begin{aligned}\gamma_X(s_0) = \gamma_X(r+1) &= \binom{r+2}{2} - \binom{r+2}{1} - \cdots - \binom{3}{1} - h_r(1)\\ &= \binom{r+2}{2} - \binom{r+3}{2} + 3 - h_r(1)\\ &= 1 - r - h_r(1) = \gamma_r(1) - r.\end{aligned}$$

De même, pour $s_0 < n < s_0(h_{r-1}) + r - 1$ on a (cf. 2.22):

$$\gamma_X(n) = -\binom{n}{0} - \cdots - \binom{n-r+1}{0} + \gamma_r(n-r) = \gamma_r(n-r) - r$$

et cette formule est donc valable pour $n = s_0$.

De même, pour $s_0(\gamma_i) + i \leq n < s_0(\gamma_{i-1}) + i - 1$, on a :

$$h_X(n) = \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+2-i}{1} + h_i(n-i)$$

donc pour $s_0(\gamma_i) + i < n < s_0(\gamma_{i-1}) + i - 1$, on a :

$$\begin{aligned}\gamma_X(n) &= -\binom{n}{0} - \cdots - \binom{n-i+1}{0} + \gamma_i(n-i)\\ &= \gamma_i(n-i) - i \geq -i.\end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que c'est encore vrai pour $n = s_0(\gamma_i) + i$.

Pour $n > s_0(\gamma_0)$, on a $\gamma_X(n) = \gamma_0(n) \geq 0$ et on vérifie que c'est encore vrai pour $n = s_0(\gamma_0)$. □

Corollaire 3.7

Avec les notations de 3.5, on a

$$s_1(X) = \inf\{\, n \geq s_0(X) \mid \gamma_X(n) > -s_0(X) \,\} = s_0(\gamma_r) + s_0(X) - 1.$$

Démonstration. Soit $s_0 := s_0(X)$. Si l'intervalle $[r+1, s_0(h_{r-1}) + r - 1[$ n'est pas vide, on a, en fait, $s_1(X) = \inf\{\, s_0 \leq n \leq s_0(h_{r-1}) + r - 1 \mid \gamma_X(n) > -s_0 \,\}$. Sur cet intervalle on a $\gamma_X(n) = \gamma_r(n-r) - s_0 + 1$, donc $s_1(X) = s_0(\gamma_r) + s_0 - 1$.

Si l'intervalle $[r+1, s_0(h_{r-1}) + r - 1[$ est vide, pour tout $n \geq s_0 = r+1$ on a $\gamma_X(n) > -s_0$. De plus dans ce cas $s_0(h_{r-1}) = 2$, $\sup(h_r) = 0$, et $s_0(\gamma_r) = 1$. La formule est donc encore valable. □

Remarque 3.8. Dans la pratique, on construit les γ_i de proche en proche, comme on l'a fait dans la démonstration de 2.21. Soit $N = \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid \sum_{m>n} \gamma(m) < n \,\}$.

On définit γ_0 par :

$$\gamma_0(n) = \begin{cases} -1 & \text{pour } n < N \\ \gamma(n) & \text{pour } n > N \end{cases} \qquad \gamma_0(N) = N - \sum_{m>N} \gamma(n)$$

on pose $\gamma' = \gamma[1] - \gamma_0[1]$ et on recommence.

EXEMPLE 3.9: Soit C une courbe de $\mathbb{P}^4$ avec une résolution linéaire, c'est-à-dire de la forme :

$$0 \to S(-s-2)^a \to S(-s-1)^b \to S(-s)^c \to 0$$

avec $a = \binom{s+1}{2}$, $b = \binom{s+1}{2} + \binom{s+2}{2} - 1$ et $c = \binom{s+2}{2}$.

On vérifie que son caractère $\gamma_C(n)$ vaut $-n-1$ pour $0 \leq n < s$, $\binom{s+1}{2}$ pour $n = s$ et 0 sinon. Alors $N = \inf\{\, n \in \mathbb{N} \mid \sum_{m>n} \gamma_C(m) < n \,\} = s$. On définit γ_0 par :

$$\gamma_0(n) = \begin{cases} -1 & \text{pour } 0 \leq n < s \\ 0 (= \gamma_C(n)) & \text{pour } n > s \end{cases} \qquad \gamma_0(s) = s - \sum_{m>s} \gamma_C(n) = s.$$

Posons $\gamma' = \gamma_C[1] - \gamma_0[1]$. Alors γ' est un caractère qui vaut $-n-1$ pour $0 \leq n < s-1$, $\binom{s}{2}$ pour $n = s-1$ et 0 sinon.

De proche en proche, on définit pour tout $i \in [0, s-1]$ le caractère γ_i par $\gamma_i(n) = -1$ pour $n < s-i$ et $\gamma_i(s-i) = s-i$, et on a :

$$\gamma_C = \gamma_0 + \gamma_1[-1] + \cdots + \gamma_{s-1}[1-s].$$

Remarque 3.10. Soient $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ des caractères positifs vérifiant les conditions de l'énoncé de 3.5. Supposons qu'on puisse construire une suite de sous-schémas ACM de codimension 3, X_i, $(0 \leq i \leq r)$ de la manière suivante :

- X_r est un sous-schéma hyperplan de codimension 3 de caractère γ_r,
- pour $0 \leq i < r$, X_i est obtenu à partir de X_{i+1} par une biliaison élémentaire Gorenstein de hauteur 1 sur un sous-schéma ACM Y_i de codimension 2 de caractère γ_i (cf. 1.11).

Alors d'après 1.12, le caractère de X_0 est $\gamma_{X_0} = \gamma_0 + \gamma_1[-1] + \cdots + \gamma_r[-r]$.

Si on sait construire une telle suite, on redémontre dans ce cas le résultat d'existence 2.13. Le problème est à chaque pas de trouver un sous-schéma ACM de codimension 2 de caractère γ_i contenant X_{i+1}.

Sous-schémas ACM de codimension 3 tracés sur une hypersurface quadrique

Nous allons décrire tous les caractères de postulation des sous-schémas ACM de codimension 3, X, vérifiant $s_0(X) = 2$.

Proposition 3.11

Soit X un sous-schéma ACM de codimension 3 non dégénéré de $\mathbb{P}^N$ tracé sur une quadrique et $\gamma_X = \gamma$ son caractère. Les propriétés équivalentes suivantes sont réalisées :

- *i) il existe deux caractères positifs (cf. 2.17) γ_0 et γ_1 vérifiant $\sup\gamma_1 < s_0(\gamma_0)$, tels qu'on ait $\gamma_X = \gamma_0 + \gamma_1[-1]$,*
- *ii) il existe deux entiers $1 \leq t < s$ tels qu'on ait :*

$$\gamma(n)\begin{cases} = -2 \text{ pour } 1 \leq n \leq t, \\ \geq -1 \text{ pour } t < n < s, \\ \geq 0 \text{ pour } n \geq s \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{n>s}\gamma(n) \leq s \leq \sum_{n\geq s}\gamma(n)\,.$$

Inversement tout caractère γ vérifiant i) ou ii) est le caractère d'un sous-schéma ACM de codimension 3 non dégénéré X de $\mathbb{P}^N$ tracé sur une quadrique. De plus on a $s_1(X) = s_0(\gamma_1) + 1 = t + 1$.

Démonstration. i) est une conséquence de 3.5.

Posons $s = s_0(\gamma_0)$ et $t = s_0(\gamma_1)$. On a $t \leq \sup\gamma_1 < s$.

Pour $1 \leq n \leq t$, $\gamma(n) = -2$.

Pour $t + 1 \leq n < s$, $\gamma(n) = -1 + \gamma_1(n-1) \geq -1$.

Pour $n = s$, $\gamma(s) = \gamma_0(s) + \gamma_1(s-1) \geq 0$.

Pour $s < n$, $\gamma(n) = \gamma_0(n) \geq 0$.

De plus, on a

$$\sum_{n>s}\gamma(n) = \sum_{n>s}\gamma_0(n) \leq \sum_{n\geq s}\gamma_0(n) = s$$

et

$$\sum_{n\geq s}\gamma(n) = \sum_{n\geq s}\gamma_0(n) + \gamma_1(s-1) \geq \sum_{n\geq s}\gamma_0(n) = s.$$

Inversement, soit γ un caractère vérifiant ces propriétés. En s'inspirant de 3.8, on définit γ_0 et γ_1 de la manière suivante :

$$\gamma_0(n) = \begin{cases} -1 \text{ pour } n < s, \\ \gamma(n) \text{ pour } n > s \\ s - \sum_{n>s}\gamma(n) \text{ pour } n = s \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \gamma[1] - \gamma_0[1].$$

On vérifie que γ_0 et γ_1 sont des caractères positifs, et qu'on a $\sup\gamma_1 < s_0(\gamma_0)$. $\square$

En utilisant 3.4, on peut décrire les caractères des sous-schémas intègres ACM de codimension 3 de $\mathbb{P}^N$ tracés sur une quadrique :

Corollaire 3.12

Soit X un sous-schéma intègre ACM de codimension 3 de $\mathbb{P}^N$ tracé sur une quadrique et $\gamma_X = \gamma$ son caractère. Il existe un entier $t \geq 1$ tel qu'on ait :

$$\gamma(n) \begin{cases} = -2 \text{ pour } 1 \leq n \leq t, \\ \geq -1 \text{ pour } n = t+1, \\ \geq 0 \text{ pour } n \geq t+2. \end{cases}$$

Démonstration. On sait que pour $n \geq s_1(X)$, $\gamma_X(n) \geq \inf\{0, n - s_0(X) - s_1(X) + n + 1\}$ d'où le résultat puisque $s_0(X) = 2$ et $s_1(X) = t+1$. □

EXEMPLE 3.13: Dans le cas où γ_1 est le caractère d'une droite ($\gamma_1 = (-1, 1)$), on peut donner une autre description d'une courbe de $\mathbb{P}^4$ de caractère $\gamma_0 + \gamma_1[-1]$ de la manière suivante : soient C' une courbe ACM contenue dans un hyperplan H de $\mathbb{P}^4$ de caractère γ_0 et D une droite non contenue dans H et coupant C' en un point. La réunion C de C' et D est une courbe ACM tracée sur une quadrique. De la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{I}_{C'} \to \mathcal{O}_D(-1) \to 0$$

on déduit :

$$h^0\mathcal{I}_C(n) = h^0\mathcal{I}_{C'}(n) - h^0\mathcal{O}_D(n-1)$$
$$\gamma_C(n) = \gamma_{C'}(n) - \partial^3 h^0\mathcal{O}_D(n-1) = \gamma_{C'}(n) + \gamma_D(n-1).$$

EXEMPLE 3.14: Soient P_1 et P_2 deux plans de $\mathbb{P}^4$ se coupant en un point Z, C_1 et C_2 deux courbes planes contenues respectivement dans P_1 et P_2 et se coupant en un point. La réunion C de C_1 et C_2 est une courbe ACM tracée sur une quadrique.

Des suites exactes :

$$0 \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{I}_{C_1} \to \mathcal{I}_{Z/C_2} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{I}_{Z/C_2} \to \mathcal{O}_{C_2} \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

on déduit pour $n \geq 0$:

$$h^0\mathcal{I}_C(n) = h^0\mathcal{I}_{C_1}(n) + h^0\mathcal{I}_{C_2}(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) + 1$$
$$\gamma_C = \gamma_{C_1} + \gamma_{C_2} + (1, -2, 1).$$

De plus on rappelle (cf. 1.4) que si d_1 est le degré de C_1, γ_{C_1} ne prend que deux valeurs non nulles, $\gamma_{C_1}(0) = -1$, $\gamma_{C_1}(d_1) = 1$, et il en est de même de γ_{C_2}.

On remarque que si D est une droite, $\gamma_0 = \gamma_C - \gamma_D[-1]$ est un caractère positif, donc que C a le même caractère que la réunion d'une courbe hyperplane de caractère γ_0 et d'une droite la coupant en un point et "sortant" de l'hyperplan de la courbe. En fait, on peut montrer que γ_0 est le caractère de la réunion d'une courbe plane C'_1 de degré $d_1 - 1$ et d'une courbe plane C_2 de degré d_2 passant par les $d_1 - 1$ points de $D \cap C_1$, où D est l'intersection des plans de C'_1 et C_2.

4. Courbes ACM de $\mathbb{P}^4$

Proposition 4.1

Soit C une courbe ACM de $\mathbb{P}^4$et γ_C son caractère de postulation. Soient γ_0, γ_1, $\dots$, γ_r les caractères positifs tels qu'on ait $\gamma_C = \gamma_0 + \gamma_1[-1] + \cdots + \gamma_r[-r]$ (cf. (3.5)).

Posons $d_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\gamma_i(k)$ et $\delta_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(k^2-4k)\gamma_i(k)$.

On a :

$$d = \sum_{i=0}^{r} d_i \qquad 2g-2 = \sum_{i=0}^{r}(\delta_i + (2i+1)d_i).$$

Démonstration. On rappelle qu'on a :

$$d = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\gamma_C(k) \qquad g-1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(k-1)(k-2)}{2}\gamma_C(k).$$

Alors

$$\begin{aligned} d &= \sum_{k,i} k\gamma_i(k-i) = \sum_{k,i}(k+i)\gamma_i(k) \\ &= \sum_{k,i} k\gamma_i(k) + \sum_{k,i} i\gamma_i(k) = \sum_i d_i \end{aligned}$$

puisque γ_i est un caractère ($\sum_k \gamma_i(k) = 0$).

$$\begin{aligned} 2g-2 &= \sum_{k,i}(k-1)(k-2)\gamma_i(k-i) = \sum_{k,i}(k+i-1)(k+i-2)\gamma_i(k) \\ &= \sum_{k,i} k^2\gamma_i(k) + \sum_{k,i}(2i-3)k\gamma_i(k) + \sum_{k,i}(i-1)(i-2)\gamma_i(k) \\ &= \sum_i(\delta_i+4d_i) + \sum_i(2i-3)d_i = \sum_i(\delta_i+(2i+1)d_i). \ \Box \end{aligned}$$

Courbes ACM de degré ≤ 10

Pour terminer, nous allons utiliser 3.5 pour donner la liste des degrés et genres des courbes ACM de $\mathbb{P}^4$ de degrés ≤ 10, ce qui complète la liste donnée par [5]. Nous préciserons à chaque fois dans la preuve les caractères γ_i et γ_C.

Proposition 4.2

Soit C une courbe ACM non dégénérée de $\mathbb{P}^4$ de degré ≤ 10, d son degré et g son genre. Alors le couple (d,g) prend toutes les valeurs de l'ensemble suivant :
$(4,0)$, $(5,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(7,3)$, $(7,4)$, $(7,6)$, $(8,4)$, $(8,5)$, $(8,6)$, $(8,7)$, $(8,10)$, $(9,5)$, $(9,6)$, $(9,7)$, $(9,8)$, $(9,9)$, $(9,11)$, $(9,15)$, $(10,6)$, $(10,7)$,$(10,8)$, $(10,9)$, $(10,10)$, $(10,12)$, $(10,13)$, $(10,16)$ *et* $(10,21)$.

Démonstration. Grâce à la borne $d \geq \binom{s+2}{3}$ (cf. 2.14), on a $2 \leq s_0(C) \leq 3$.

- $s_0(C) = 3$. Il y a un seul caractère de degré ≤ 10, qui réalise la borne inférieure de 2.14. On a : $\gamma_0 = (-1,-1,-1,3)$, $\gamma_1 = (-1,-1,2)$ et $\gamma_C = (-1,-2,-3,6)$, $(d,g) = (10,6)$.
- $s_0(C) = 2$.

(1) $\gamma_1 = (-1, 0, 1)$. On a les possibilités suivantes :

  (a) $\gamma_0 = (-1, -1, -1, 3)$, $\gamma_C = (-1, -2, -1, 4)$ et $(d, g) = (8, 4)$;

  (b) $\gamma_0 = (-1, -1, -1, 2, 1)$, $\gamma_C = (-1, -2, -1, 3, 1)$ et $(d, g) = (9, 6)$;

  (c) $\gamma_0 = (-1, -1, -1, 2, 0, 1)$, $\gamma_C = (-1, -2, -1, 3, 0, 1)$ et $(d, g) = (10, 9)$;

  (d) $\gamma_0 = (-1, -1, -1, 1, 2)$, $\gamma_C = (-1, -2, -1, 2, 2)$ et $(d, g) = (10, 8)$.

(2) $\gamma_1 = (-1, -1, 2)$. On a les possibilités suivantes :

  (a) $\gamma_0 = (-1, -1, -1, 3)$, $\gamma_C = (-1, -2, -2, 5)$ et $(d, g) = (9, 5)$;

  (b) $\gamma_0 = (-1, -1, -1, 2, 1)$, $\gamma_C = (-1, -2, -2, 4, 1)$ et $(d, g) = (10, 7)$.

(3) $\gamma_1 = (-1, 1)$. On a alors nécessairement

$$\gamma_0 = (-1, -1, -1) + 1_{[a]} + 1_{[b]} + 1_{[c]} \quad \text{avec } 2 \leq a \leq b \leq c \quad \text{et} \quad a + b + c \leq 12,$$

donc

$$\gamma_C = (-1, -2) + 1_{[a]} + 1_{[b]} + 1_{[c]}$$

$$d = a + b + c - 2 \quad 2g = (a-1)(a-2) + (b-1)(b-2) + (c-1)(c-2).$$

Lorsque a, b, c varient on obtient toutes les autres valeurs annoncées. □

Remarque 4.3. Il existe une borne supérieure de Castelnuovo pour le genre d'une courbe intègre de $\mathbb{P}^4$, qui montre que certains des caractères précédents ne peuvent pas être réalisés par une courbe intègre, bien que la condition de 3.4 soit toujours vérifiée, ce qui prouve que ce n'est pas une condition suffisante.

References

1. G. Ellingsrud, Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbb{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **8** (1975), 423–431.
2. A.V. Geramita, P. Maroscia, et L.G. Roberts, The Hilbert function of a reduced k-algebra, *J. London Math. Soc. (2)* **28** (1983), 443–452.
3. L. Gruson et C. Peskine, *Genre des Courbes de l'Espace Projectif*, Lecture Notes in Math. 687, Springer Verlag, Berlin 1977, 31–59.
4. R. Hartshorne, Generalized divisors on Gorenstein schemes, *K-Theory* **8** (1994), 287–339.
5. R. Hartshorne, Some examples of Gorenstein liaison in codimension three, *Collect. Math.* **53** (2002), 21–48.
6. F.S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc. (2)* **26** (1927), 531–555.
7. M. Martin-Deschamps, Biliaisons élémentaires en codimension 2, preprint 2003.
8. M. Martin-Deschamps et D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches I*, Astérisque, Vol. 184–185, 1990.
9. J. Migliore, *Introduction to Liaison Theory and Deficiency Modules*, Progress in Mathematics 165, Birkhäuser, 1998.
10. J. Migliore et U. Nagel, Lifting monomial ideals, *Comm. Algebra* **28** (2000), 5679–5701.
11. S. Nollet, Even linkage classes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 1137–1162.
12. A.P. Rao, Liaison among curves in $\mathbb{P}^3$, *Invent. Math.* **50** (1979), 205–217.