Collectanea Mathematica (electronic version): http://www.mat.ub.es/CM

Collect. Math. **52**, 1 (2001), 1–20

Des résultats d'irrationalité pour deux fonctions particulières

Richard Choulet

27, Rue du 4 Août, 14210 Avenay, France

E-mail: richardchoulet@wanadoo.fr

Received April 14, 2000. Revised December 18, 2000

Abstract

This paper studies irrationality of values taken by the functions T_q defined by $T_q(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/q^{n(n+1)/2}$, and E_q such that $E_q(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/\prod_{k=1}^{n}(q^k-1)$, where $q\in\mathbb{Q}$ and $|q|>1$.

1. Introduction et plan

Soit $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$. On pose $0_q = 1$ et $n_q = \frac{q^n-1}{q-1}$ si $n \geq 1$; de plus on note $n_q! = 0_q..n_q$ qui est le q-analogue de $n!$, avec la convention tout au long de cet article que le produit sur un ensemble vide d'indice est égal à 1 (et que la somme sur un ensemble vide d'indices est nulle), ce qui est cohérent avec $0_q = 1$.

Nous nous intéressons à la fonction de Tschakaloff T_q : $T_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{q^{n(n+1)/2}}$ et à la fonction E_q:

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n}(q^k-1)}\ ;$$

le véritable q-analogue de l'exponentielle e_q vérifie $e_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n_q!} = E_q((q-1)z)$.

La fonction de Tschakaloff T_q et la fonction E_q sont des fonctions entières sur $\mathbb{C}$; pour ces fonctions, nous démontrerons des résultats portant sur des valeurs prises par celles-ci aux éléments non nuls d'un corps de nombres $\mathbb{K}$.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette question; l'un des premiers résultats est dû à L. Tschakaloff [9]:

Théorème T:

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. On suppose que $\gamma > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Alors $T_q(\alpha)$ est irrationnel.

Keywords: Irrationality, q-analog.
MSC2000: 11J72.

Rappelons la définition de γ :

Soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|q| > 1$; on pose $q = \dfrac{a}{b}$ avec $b \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$ et a et b premiers entre eux. Le réel $\gamma > 1$, est défini, lorsque $b \neq 1$, par $\ln|a| = \gamma \ln b$; le cas $b = 1$ signifie $q \in \mathbb{Z}$ et on prend alors $\gamma = +\infty$.

Le théorème cité ci-dessus, est étendu par P. Bundschuh au cas d'un corps quadratique imaginaire ([5]).

D. Duverney ([7], [8]) démontre ensuite que les nombres

$$T_{q^2}(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n^2} \text{ et } T_q(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-(n(n+1))/2}$$

ne sont pas irrationnels quadratiques pour $q \in \mathbb{Z}$.

J.P. Bézivin généralise des résultats précédents dans [3].

L'article est organisé de la façon qui suit: La Partie 1 présente l'introduction et le plan. Dans la Partie 2, nous donnons des rappels et les notations utilisées. La Partie 3 donne des résultats d'irrationalité relatifs à $T_q(\alpha)$, $E_q(\alpha)$ pour $\alpha \in K^*$.

2. Rappels et notations

2.1. Quelques rappels

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres de degré noté d. Pour toute place v de $\mathbb{K}$, on note $\mathbb{K}_v$ et $\mathbb{Q}_v$, les complétés de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{Q}$ pour la place v et $d_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v]$. Les valeurs absolues sont normalisées en imposant que la restriction de $|\ \ |_v$ à $\mathbb{Q}$ soit la valeur absolue usuelle si v est une place infinie et si v est une place finie au-dessus du nombre rationnel p, que $|\ p\ |_v = \frac{1}{p}$.

Pour α de $\mathbb{K}^*$, on a la formule du produit:

$$1 = \prod_w |\ \alpha\ |_w{}^{d/d_w}. \tag{2.1}$$

Pour une place v de $\mathbb{K}$ et $q \in \mathbb{Q}*$ tels que $|\ q\ |_v \neq 1$, on pose

$$\mu_v = \frac{\sum_{w,\ |q|_w > 1} d_w\ \ln|\ q\ |_w}{d_v\ \ln|\ q\ |_v}. \tag{2.2}$$

Rappelons enfin que pour f entière, on note

$$|\ f\ |\ (R) = \mathrm{Max}_{|z| \leq R}\ |\ f(z)\ |\ .$$

2.2. Notations et principe des démonstrations

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres, v une place de $\mathbb{K}$ et $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\mid q \mid_v > 1$. Nous notons F_q la fonction qui suivant le cas est T_q ou E_q en posant $F_q(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(q) z^n$; c'est une fonction entière sur $\mathbb{C}_v$. Notre but est de démontrer, sous des hypothèses adéquates, que pour $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on a $\mathbb{F}_q(\alpha) \notin \mathbb{K}$.

Pour cela on raisonne par l'absurde; on peut donc trouver λ et μ de $\mathbb{K}^*$ tels que:

$$\lambda F_q(\alpha) + \mu = 0.$$

On définit alors la fonction Φ, entière dans $\mathbb{C}_v$ par $\Phi(z) = \lambda F_q(\alpha z) + \mu$ avec $\Phi(1) = 0$. On définit également la suite (u_n) en posant $\Phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n a_n(q) z^n$ ainsi que la fonction entière ψ et la suite (v_n) par: $\psi(z) = \frac{\Phi(z)}{1-z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n a_n(q) z^n$. Nous allons établir que la suite (v_n) est une suite récurrente linéaire, en étudiant la suite des déterminants de Kronecker définie par

$$K_n = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & \dots & v_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_{n+1} & \dots & v_{2n} \end{vmatrix}.$$

En effet, on sait que ([1] page 169), si K_n est nul à partir d'un certain rang, alors v est une suite récurrente linéaire. Nous montrerons alors que le fait que v soit récurrente linéaire permet d'aboutir à une contradiction.

L'idée de travailler directement sur le déterminant K_n, qui apparaît dans [3], est reprise ici et améliorée partiellement:

- **améliorée** parce qu'on peut l'utiliser pour d'autres fonctions que T_q (ici E_q) et pour d'autres travaux (par exemple études de $\mathbb{K}$-indépendance linéaire),

- **partiellement** puisqu'elle se révèle moins fine dans le cas T_q.

3. Résultats d'irrationnalité

Cette partie propose d'examiner l'irrationalité des images par chacune des fonctions envisagées, d'un élément α non nul d'un corps de nombres avec des hypothèses ne portant que sur l'élément q de $\mathbb{Q}$.

3.1. Enoncés des résultats

Théorème 3.1

Soit $q \in \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{K}$ un corps de nombres et v une place de $\mathbb{K}$ telle que $\mid q \mid_v > 1$. Soit d'autre part $\alpha \in \mathbb{K}^*$. On suppose $\mu_v < \frac{28}{11}$; alors $T_q(\alpha) \notin \mathbb{K}$.

En particulier, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, on obtient les deux corollaires:

Corollaire 3.1

On suppose $q \in \mathbb{Q}$ *et* $\mid q \mid > 1$. *Soit* $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. *Lorsque* $\gamma > \frac{28}{17}$, *alors* $T_q(\alpha) \notin \mathbb{Q}$.

Corollaire 3.2

On suppose $q \in \mathbb{Q}$ *et* $\mid q \mid > 1$. *Soit* $\mathbb{K}$ *une extension quadratique de* $\mathbb{Q}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}^*$. *Si on a* $\gamma > \frac{14}{3}$ *alors* $T_q(\alpha) \notin \mathbb{K}$.

Ces résultats améliorent ceux de J.P. Bézivin dans [3]. En effet dans le Corollaire 3.1, la condition $\gamma > \frac{28}{17}$ est plus fine que $\gamma > \frac{28}{15}$. De même dans le Corollaire 3.2 $\gamma > \frac{14}{3}$ améliore $\gamma > 14$.

D'autre part le Corollaire 3.2 implique que sous les hypothèses indiquées, $T_q(\alpha)$ n'est pas algébrique de degré $d \leq 2$.

En particulier nous avons obtenu $T_{q^2}(q) \notin \mathbb{Q}$ c'est-à-dire

$$\sum \frac{1}{q^{n^2}} \notin \mathbb{Q},$$

et n'est pas algébrique de degré $d \leq 2$. Le premier résultat cité était connu pour $q \in \mathbb{Z}$.

Enfin une question ouverte naturelle est de savoir si ces résultats demeurent vrais sous la condition $\gamma > 1$.

Nous donnons maintenant les résultats relatifs à la fonction E_q ou ce qui revient au même à e_q. En raison du produit infini définissant E_q, qui est:

$$E_q(z) = \prod_{p=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{q^p}\right)$$

et qui provient de la relation fonctionnelle $E_q(qz) = (1+z)E_q(z)$, il y a une restriction naturelle sur les valeurs de α.

Théorème 3.2

Soit $q \in \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{K}$ *un corps de nombres,* v *une place de* $\mathbb{K}$ *telle que* $\mid q \mid_v > 1$. *On suppose que* $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \notin -q^{\mathbb{N}^*}$ *et que* $\mu_v < 2$; *alors* $E_q(\alpha) \notin \mathbb{K}$.

Dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et en prenant pour place v la place infinie de $\mathbb{Q}$, on obtient le résultat suivant:

Corollaire 3.3

Soit $q \in \mathbb{Q}$, $\mid q \mid > 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ *et* $\alpha \notin -q^{\mathbb{N}^*}$. *Lorsque* $\gamma > 2$, *alors* $E_q(\alpha) \notin \mathbb{Q}$.

Ce corollaire améliore un peu le résultat cité par P. Bundschuh dans [6] (page 182) qui obtenait alors $\gamma > \frac{7}{3}$.

Là encore une question naturelle ouverte est de savoir si les résultats demeurent vrais si $\gamma > 1$.

3.2. Lemmes techniques

Dans ces lemmes, on a considéré une place v de $\mathbb{Q}$.

Lemme 3.1

Soient $q \in \mathbb{Q}$ ($\mid q \mid_v \neq 1$), $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ et $\omega = \mathrm{Inf}\,(\mid q \mid_v, \frac{1}{|q|_v})$. Soient θ une fonction entière telle que pour tout $R >> 1$,

$$\ln \ \mid \theta \mid_v (R) \leq \frac{\delta}{2} \frac{\ln^2 \ R}{\ln \ \frac{1}{\omega}} + O(\ln \ R), \tag{3.1}$$

et g une fonction entière vérifiant pour tout $R >> 1$

$$\mid g \mid_v (R) \leq \gamma R^m \mid g \mid_v (R\omega) + \gamma R^n \mid \theta \mid_v (R), \tag{3.2}$$

alors

$$\ln \ \mid g \mid_v (R) \leq \frac{\mathrm{Max}(m, \ \delta)}{2 \ln \ \frac{1}{\omega}} \ln^2 R + O(\ln \ R). \tag{3.3}$$

Démonstration. Par récurrence immédiate dans (3.2) on a, pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mid g \mid_v (R) \leq \gamma^N R^{Nm} \omega^{(N(N-1)m)/2} \mid g \mid_v \left(R\omega^N\right) \\ + \gamma \sum_{k=0}^{N-1} \gamma^k R^{n+km} \omega^{kn+(k(k-1)m)/2} \mid \theta \mid_v \left(R\omega^k\right).\end{aligned}$$

On prend R assez grand et on choisit de prendre N tel que $R\omega^N \leq 1 < R\omega^{N-1}$, i.e. $\frac{\ln R}{\ln \frac{1}{\omega}} \leq N < \frac{\ln R}{\ln \frac{1}{\omega}} + 1$. Ceci montre que la fonction $R \rightarrow \mid g \mid_v (R\omega^N)$ est bornée; d'autre part la fonction $x \rightarrow R^{mx} \omega^{(mx(x-1))/2}$ est maximale en $x_0 = \frac{\ln R}{\ln \frac{1}{\omega}} + \frac{1}{2}$. Il en résulte que ce premier terme a son logarithme borné par $\frac{m \ln^2 R}{2 \ln \frac{1}{\omega}} + O(\ln R)$. Le deuxième terme de la somme qui utilise $\sum_{k=0}^{N-1}$ est majoré par N multiplié par le plus grand terme de cette somme, où $N = \frac{\ln R}{\ln \frac{1}{\omega}} + O(1)$. En utilisant la fonction définie sur $[0, \ N-1]$ par

$$x \longrightarrow (n + mx) \ln R + \left[xn + \frac{x(x-1)}{2} m\right] \ln \omega + \frac{\delta}{2 \ln \frac{1}{\omega}} (\ln R + x \ln \omega)^2 + x \ln \gamma,$$

qui correspond au logarithme népérien du terme général on obtient que le deuxième terme de la somme a son logarithme népérien inférieur à $\delta \frac{\ln^2 R}{2 \ln \frac{1}{\omega}} + O(\ln R)$. Le résultat (3.3) en découle alors. □

Lemme 3.2

Soient $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^*$, $l \in \mathbb{N}^*$, α_1, ..., α_l des complexes non nuls. On définit la fonction θ par le produit infini:

$$\theta(z) = \prod_{k \geq 0} \prod_{i=1}^{l} \left\{ \left(1 - \frac{z\omega^k}{\alpha_i}\right) \left(1 + \frac{a\omega^k z}{b}\right) \right\}. \tag{3.4}$$

Pour $l = 0$, on convient que:

$$\theta(z) = \prod_{k\geq 0}\Big(1 + \frac{a\omega^k z}{b}\Big).$$

La fonction θ est une fonction entière et on a pour $R >> 1$:

$$\ln \mid \theta \mid_v (R) \leq \frac{l+\epsilon_a}{2 \ \ln \ \frac{1}{\omega}} \ln^2 R + O(\ln \ R) \tag{3.5}$$

où l'on a posé $\epsilon_x = 0$ ou 1 selon que x est nul ou pas.

Démonstration. Comme $0 < \omega < 1$, on voit facilement que θ est une fonction entière; on a clairement la relation

$$\theta(\omega z) = \frac{\theta(z)}{(1 + \frac{a}{b}z)\prod_{i=1}^{l}(1 - \frac{z}{\alpha_i})}$$

d'où résulte l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que pour $R >> 1$ on ait:

$$\mid \theta \mid_v (R) \leq \gamma R^{l+\epsilon_a} \mid \theta \mid_v (\omega R).$$

Nous sommes ici dans un cas particulier du Lemme 3.1 pour lequel g est remplacée par θ, θ par 0 et $m = l + \epsilon_a$, d'où (3.5). □

Lemme 3.3

Soient a, b, c, des nombres complexes tels que $bc \neq 0$, $q \in \mathbb{Q}^*$ et Q une fonction rationnelle régulière en 0, dont nous notons les pôles α_1, ..., α_l. On pose $Q = \frac{P_1}{P_2}$. Si Q est une fonction polynôme, on prend $l = 0$ et on supprime les termes dans les produits infinis qui suivent. Soit $\tilde{\psi}$ une fonction méromorphe dans tout $\mathbb{C}$ sans pôle à l'origine, vérifiant l'équation fonctionnelle:

$$(az + b)\tilde{\psi}(z) = cz\tilde{\psi}(qz) + Q(z). \tag{3.6}$$

Nous avons les résultats

(i) pour $\mid q \mid_v < 1$ et $a \neq 0$, les pôles de $\tilde{\psi}$ sont dans l'ensemble $\big\{\frac{\alpha_i}{q^k},\ k \geq 0,\ i = 1, ..., l,\ \frac{-b}{aq^h},\ h \geq 0\big\}$; pour $a = 0$, ils sont dans $\big\{\frac{\alpha_i}{q^k},\ k \geq 0,\ i = 1, ..., l\big\}$. Supposons $\alpha_i \neq -\frac{b}{aq^k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit la fonction entière θ définie par le produit infini:

$$\theta(z) = \prod_{i,\ k}\Big(1 + \frac{aq^k z}{b}\Big)\Big(1 - \frac{q^k z}{\alpha_i}\Big), \tag{3.7}$$

alors la fonction $g = \tilde{\psi}\theta$ est entière et vérifie l'estimation:

$$\ln \ \mid g \mid_v (R) \leq \frac{l+1}{2 \ \ln \ \frac{1}{|q|_v}} \ln^2 R + O(\ln \ R); \tag{3.8}$$

(ii) pour $| \, q \, |_v > 1$, *les pôles de* $\tilde{\psi}$ *sont dans l'ensemble* $\{\alpha_i q^{k+1}, \ k \geq 0, \ i = 1, ..., l\}$. *Soit* θ *la fonction entière définie par le produit infini:*

$$\theta(z) = \prod_{i, \ k} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_i q^{k+1}}\Big). \tag{3.9}$$

Alors la fonction $g = \tilde{\psi}\theta$ *est une fonction entière qui vérifie l'estimation:*

$$\ln \ | \, g \, |_v \ (R) \leq \frac{l}{2 \ \ln \ | \, q \, |_v} \ln^2 R + O(\ln \ R). \tag{3.10}$$

Démonstration. Considérons tout d'abord $| \, q \, |_v < 1$. Par récurrence dans (3.6) on obtient aisément pour tout $N \geq 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z) \prod_{k=0}^{N} (aq^k z + b) &= \tilde{\psi}(q^{N+1} z) \prod_{k=0}^{N} (cq^k z) \\ &+ \sum_{k=0}^{N} Q(q^k z) \prod_{m=1}^{k} (cq^{m-1} z) \prod_{m=k+1}^{N} (aq^m z + b) \end{aligned} \tag{3.11}$$

soit encore

$$\begin{aligned} b^{N+1}\tilde{\psi}(z) \prod_{k=0}^{N} \Big(\frac{a}{b} q^k z + 1\Big) &= (cz)^{N+1} q^{(N(N+1))/2} \tilde{\psi}(q^{N+1} z) \\ &+ \sum_{k=0}^{N} Q(q^k z) b^{N-k} (cz)^k q^{(k(k-1))/2} \prod_{m=k+1}^{N} \Big(\frac{a}{b} q^m z + 1\Big). \end{aligned}$$

La convergence des produits infinis et le fait que $\tilde{\psi}$ soit bornée au voisinage de zéro donne:

$$\tilde{\psi}(z) \prod_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{a}{b} q^k z + 1\Big) = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} Q(q^k z) \Big(\frac{cz}{b}\Big)^k q^{(k(k-1))/2} \prod_{m=k+1}^{\infty} \Big(\frac{a}{b} q^m z + 1\Big).$$

Les pôles de $\tilde{\psi}$ sont donc des $\frac{\alpha_i}{q^k}$ avec $k \geq 0$ et $i \in \{1, \ 2, \ ..., \ l\}$ qui proviennent de $Q(q^k z)$ et des $-\frac{b}{aq^k}$ où $k \geq 0$ dans le cas où a n'est pas nul; lorsque a est nul, seule la première famille intervient. La fonction $g = \theta\tilde{\psi}$ est entière et vérifie:

$$(az + b) \frac{g(z)}{\theta(z)} = cz \frac{g(qz)}{\theta(z)} \Big(1 + \frac{az}{b}\Big) \prod_{i=1}^{l} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_i}\Big) + Q(z)$$

soit encore

$$g(z) = \frac{1}{b} (cz) \prod_{i=1}^{l} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_i}\Big) g(qz) + \frac{\theta(z) Q(z)}{az + b}.$$

On déduit qu'existe $\gamma > 0$ tel que pour tout R assez grand, on ait avec $n = \text{Max}\ (0,\ d^\circ P_1 - d^\circ P_2 - \epsilon_a)$:

$$\mid g \mid_v (R) \leq \gamma R^{l+1} \mid g \mid_v (R \mid q \mid_v) + \gamma R^n \mid \theta \mid_v (R).$$

Le Lemme 3.1 appliqué à g donne

$$\ln\ \mid g \mid_v (R) \leq \frac{\text{Max}(l+\epsilon_a,\ l+1)}{2\ln\ \frac{1}{\omega}} \ln^2 R + O(\ln\ R),$$

d'où le résultat annoncé (3.8).

Examinons maintenant le cas $\mid q \mid_v > 1$. Remplaçant z par $\frac{z}{q^{N+1}}$ dans la relation (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(z) \prod_{k=0}^{N} \Big(\frac{c}{q^{k+1}} z\Big) &= \tilde{\psi}\Big(\frac{z}{q^{N+1}}\Big) \prod_{k=0}^{N} \Big(\frac{a}{q^{k+1}} z + b\Big) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N} Q\Big(\frac{z}{q^{k+1}}\Big) \prod_{m=k+1}^{N} \Big(\frac{c}{q^{m+1}} z\Big) \prod_{m=1}^{k} \Big(\frac{a}{q^m} z + b\Big)\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}\frac{(cz)^{N+1}}{q^{((N+1)(N+2))/2}} \tilde{\psi}(z) &= \tilde{\psi}\Big(\frac{z}{q^{N+1}}\Big) \prod_{k=0}^{N} \Big(\frac{a}{q^{k+1}} z + b\Big) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N} Q\Big(\frac{z}{q^{k+1}}\Big) \frac{(cz)^{N-k}}{q^{((N+1)(N+2))/2-((k+1)(k+2))/2}} \prod_{m=1}^{k} \Big(\frac{a}{q^m} z + b\Big).\end{aligned}$$

Les pôles de $\tilde{\psi}$ sont donc des $\alpha_i q^{k+1}$ pour $k \geq 0$. On définit alors θ par (3.9). La fonction entière θ satisfait le Lemme 3.2 de sorte que:

$$\ln \mid \theta \mid_v (R) \leq \frac{l}{2\ln \mid q \mid_v} \ln^2 R + O(\ln R).$$

Considérons $g = \theta\tilde{\psi}$; la fonction g est entière et vérifie:

$$c\frac{z}{q}\frac{g(z)}{\theta(z)} = \Big(a\frac{z}{q} + b\Big)\frac{g\big(\frac{z}{q}\big)}{\theta\big(\frac{z}{q}\big)} - Q\Big(\frac{z}{q}\Big)$$

ou encore

$$c\frac{z}{q} g(z) = \Big(a\frac{z}{q} + b\Big) \prod_{i=1}^{l} \Big(1 - \frac{z}{q\alpha_i}\Big) g\Big(\frac{z}{q}\Big) - \theta(z) Q\Big(\frac{z}{q}\Big).$$

Donc existe $\gamma > 0$ tel que pour $R >> 0$, on ait avec $m = \text{Max}\ (0,\ d^\circ P_1 - d^\circ P_2 - 1)$:

$$\mid g \mid_v (R) \leq \gamma R^{l+\epsilon_a - 1} \mid g \mid_v \Big(\frac{R}{\mid q \mid_v}\Big) + \gamma R^m \mid \theta \mid_v (R).$$

Le Lemme 3.1 appliqué à g donne

$$\ln\ \mid g\mid_v (R) \leq \frac{\mathrm{Max}(l,\ l+\epsilon_a-1)}{2\ln\ \frac{1}{\omega}}\ln^2 R + O(\ln\ R)$$

c'est-à-dire la formule (3.10). $\square$

Lemme 3.4

Soit $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R\neq 0$. On suppose que $f=\frac{\phi_1}{\phi_2}$ avec:

(i) ϕ_1 est une fonction entière pour laquelle existe $\delta>0$: $\ln\mid\phi_1\mid_v (R)\leq \delta\ln^2 R + O(\ln R)$, pour tout $R>>1$;

(ii) ϕ_2 est défini par $\phi_2(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})$ avec la suite $(\mid a_n\mid_v)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et vérifiant $\ln\mid a_n\mid_v=\beta n+\beta_n$ où $\beta>0$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On considère la suite des déterminants de Kronecker (K_n) construite sur la suite (w_n) (confer §2.2).

Alors

pour $\beta\delta\leq\frac{3}{4}$, on a

$$\mid K_n\mid_v\leq \exp\Big[\frac{2\delta\beta^2-3\beta}{6}n^3+O(n^2)\Big] \tag{3.12}$$

pour $\frac{3}{4}<\beta\delta\leq\frac{3}{2}$, vient

$$\mid K_n\mid_v\leq \exp\Big[\frac{4\delta\beta^2-9\beta}{24}n^3+O(n^2)\Big] \tag{3.13}$$

pour $\frac{3}{2}<\beta\delta$, on a

$$\mid K_n\mid_v\leq \exp\Big[-\frac{3}{16\delta}n^3+O(n^2)\Big]. \tag{3.14}$$

Démonstration. Pour $m\geq 0$, soit la fonction f_m telle que:

$$f_m(z)=\prod_{k=1}^{m}\Big(1-\frac{z}{a_m}\Big)f(z)=\Big(1+\sum_{h=1}^{m} b_{h,m}z^h\Big)f(z).$$

f_m a pour pôles les a_h où $h\geq m+1$; $f_m(z)$ s'écrit aussi

$$f_m(z)=\frac{\phi_1(z)}{\prod_{k=m+1}^{+\infty}(1-\frac{z}{a_k})}=\Big(1+\sum_{h=1}^{m} b_{h,m}z^h\Big)\Big(\sum_{k\geq 0} w_k z^k\Big)=\sum_{h\geq 0} w_{m,h}z^h,$$

où $w_{m,n}=\sum_{h=0}^{\min(m,n)} b_{h,m}w_{n-h}$. Il est commode pour alléger les notations d'introduire l'opérateur $\tilde{L}_m$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vers lui-même défini par:

$$\tilde{L}_m\big((w_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)=\big(w_{m,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Par abus de langage, ce qu'on devrait noter $\tilde{L}_m((w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sera écrit $L_m(w_n)$.

Nous avons défini $L_m(w_n)$ comme étant le coefficient de z^n dans le développement de $f_m(z)$ dont les pôles sont les a_h avec $h \geq m+1$. Prenons $R <\mid a_{m+1} \mid_v$. Dans $\bar{D}(0,R)$, f_m n'a pas de pôle et est holomorphe, donc d'après l'inégalité de Cauchy: $\mid L_m(w_n) \mid_v \leq \frac{|f_m|_v(R)}{R^n}$. Examinons la majoration de $\mid L_m(w_n) \mid_v$; de

$$f_m(z) = \frac{\phi_1(z)}{\prod_{k=m+1}^{+\infty}(1-\dfrac{z}{a_k})}$$

vient

$$\mid f_m \mid_v (R) = \mathrm{Max}_{|z|_v=R} \frac{\mid \phi_1(z) \mid_v}{\prod_{k\geq m+1} \left|1-\frac{z}{a_n}\right|_v}$$

d'où

$$\mid f_m \mid_v (R) \leq \frac{\mid \phi_1 \mid_v (R)}{\mathrm{Min}_{|z|_v=R} \prod_{k\geq m+1} \left|1-\dfrac{z}{a_n}\right|_v}.$$

Or pour $\mid z \mid_v = R$,

$$\Big|\prod_{k=m+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z}{a_k}\Big)\Big|_v \geq \prod_{k=m+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{\mid z \mid_v}{\mid a_k \mid_v}\Big) \geq \prod_{k=m+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{R}{\exp(\beta k+\beta_k)}\Big).$$

La suite (β_n) étant bornée existe un réel c_1 strictement positif tel que pour tout n on ait $-c_1 \leq \beta_n \leq c_1$ donc

$$\Big|\prod_{k=m+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z}{a_k}\Big)\Big|_v \geq \prod_{k=m+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{R}{\exp(\beta k-c_1)}\Big) = \prod_{h\geq 1}\Big(1-\frac{R}{\exp(\beta(m+h)-c_1)}\Big)$$

ou encore

$$\Big|\prod_{k=m+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z}{a_k}\Big)\Big|_v \geq \prod_{h\geq 1}\Big(1-\frac{R}{\exp(\beta m-c_1)}\frac{1}{\exp(\beta h)}\Big).$$

Il est loisible d'imposer $\frac{R}{\exp(\beta m-c_1)} \leq \frac{\exp\beta}{2}$ c'est-à-dire de prendre $R \leq \frac{\exp(\beta(m+1)-c_1)}{2}$; la seule chose qu'on doive assurer est que $R <\mid a_{m+1} \mid_v$. Or

$$\begin{aligned}\frac{R}{\mid a_{m+1} \mid_v} &= \frac{R}{\exp(\beta(m+1)+\beta_{m+1})} \\ &\leq \frac{\exp(\beta(m+1)-c_1)}{2\exp(\beta(m+1)+\beta_{m+1})} = \frac{\exp(-c_1-\beta_{m+1})}{2} \leq \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

R étant ainsi choisi, le dénominateur de $\mid f_m \mid_v (R)$ est donc minoré par $\prod_{h\geq 1}(1-\frac{\exp\beta}{2\exp(\beta h)})$ qui est un réel strictement positif indépendant de m et de R. Il est ainsi prouvé qu'existe un réel $c_2 > 0$ tel que $\mid f_m \mid_v (R) \leq c_2 \mid \phi_1 \mid_v (R)$. Soit alors un réel c_3 vérifiant $c_3 \geq c_1 + \ln 2 - \beta$. Prenons $R = \exp(\beta m - c_3)$; on a bien

$$\frac{R}{\exp(\beta m-c_1)} \leq \frac{\exp(-c_3)}{\exp(-c_1)} \leq \exp(\beta-\ln 2) = \frac{1}{2}e^{\beta}.$$

D'autre part ϕ_1 vérifiant (i), existe un réel c_4 tel que:

$$\ln \mid \phi_1 \mid_v (R) \leq \delta(\ln R)^2 + c_4 \ln R.$$

Revenons alors à $\mid L_m(w_n) \mid_v$:

$$\begin{aligned}\mid L_m(w_n) \mid_v &\leq \frac{\mid f_m \mid_v (R)}{R^n} \leq c_2 \frac{\mid \phi_1 \mid_v (R)}{R^n} \\ &\leq \exp\left\{\delta(\beta m - c_3)^2 - n(\beta m - c_3) + c_4(\beta m - c_3) + \ln c_2\right\} \mid L_m(w_n) \mid_v \\ &\leq \exp\left\{\delta\beta^2 m^2 - \beta nm + c_3 n + \beta m(c_4 - 2\delta c_3) + \delta {c_3}^2 - c_3 c_4 + \ln c_2\right\}.\end{aligned}$$

Pour $m \leq n$, il existe $c_5 > 0$ telle que:

$$c_3 n + \beta m(c_4 - 2\delta c_3) + \delta {c_3}^2 - c_3 c_4 + \ln c_2 \leq c_5 n.$$

Ainsi, pour $m \leq n$:

$$\mid L_m(w_n) \mid_v \leq \exp(\delta\beta^2 m^2 - \beta mn + c_5 n). \tag{3.15}$$

On choisit pour chaque entier $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ un entier $m_k \leq k$. Or nous avons en faisant des combinaisons linéaires sur les colonnes du déterminant K_n:

$$K_n = \begin{vmatrix} w_0 & L_{m_1}(w_1) & \dots & L_{m_n}(w_n) \\ w_1 & L_{m_1}(w_2) & \dots & L_{m_n}(w_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & L_{m_1}(w_{n+1}) & \dots & L_{m_n}(w_{2n}) \end{vmatrix}.$$

Donc:

$$\mid K_n \mid_v \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \prod_{i=0}^{n} \mid L_{m_{\sigma(i)}}(w_{i+\sigma(i)}) \mid_v$$

où $\mathcal{S}_{n+1}$ désigne l'ensemble des permutations de $\{0,\ 1,\ 2, ...,\ n\}$.

Une première idée consiste à se donner le réel θ, $0 < \theta \leq 1$ et $\theta < \frac{3}{2\beta\delta}$; considérons la suite $([\theta k])_{k \in \mathbb{N}}$ et prenons $m_k = [\theta k]$. On a bien $m_k \leq k$. Comme $m_k = \theta k + \gamma_k$ où $-1 < \gamma_k \leq 0$, on obtient:

$$\begin{aligned}&\prod_{i=0}^{n} \mid L_{m_{\sigma(i)}}(w_{i+\sigma(i)}) \mid_v \\ &\leq \prod_{i=0}^{n} \exp\left\{\delta\beta^2\big(\theta\sigma(i) + \gamma_{\sigma(i)}\big)\big)^2 - \beta\big(i + \sigma(i)\big)\big(\theta\sigma(i) + \gamma_{\sigma(i)}\big) + c_5\big(i + \sigma(i)\big)\right\} \\ &\prod_{i=0}^{n} \mid L_{m_{\sigma(i)}}(w_{i+\sigma(i)}) \mid_v \leq \exp\left[(\delta\beta^2\theta^2 - \beta\theta)\sum_{i=0}^{n} i^2 - \beta\theta\sum_{i=0}^{n} i\sigma(i) + O(n^2)\right].\end{aligned}$$

Le minimum de $U_\sigma = \sum_{i=0}^{n} i\sigma(i)$ pour σ de $\mathcal{S}_{n+1}$ est obtenu avec la bijection σ' telle que $\sigma'(i) = n - i$. En effet il suffit de démontrer que le minimum est obtenu pour une permutation strictement décroissante. Soit $0 \leq i_0 < j_0 \leq n$, et σ' réalisant le minimum. Soit alors σ qui vérifie $\sigma(i) = \sigma'(i)$ pour tout i qui n'est ni i_0 ni j_0, $\sigma(i_0) = \sigma'(j_0)$ et $\sigma(j_0) = \sigma'(i_0)$. Écrivant que $U_\sigma \geq U_{\sigma'}$, on obtient $(i_0 - j_0)(\sigma'(j_0) - \sigma'(i_0)) \geq 0$ ce qui a pour conséquence que: $\sigma'(j_0) < \sigma'(i_0)$ et ainsi σ' est strictement décroissante et le résultat annoncé a lieu. Le minimum considéré est donc $\sum_{i=0}^{n} i(n-i) = \frac{n^3}{6} + O(n^2)$. Il en résulte que

$$| K_n |_v \leq \exp\Big\{ \frac{2\delta\beta^2\theta^2 - 3\beta\theta}{6} n^3 + O(n^2) \Big\}.$$

$2\delta\beta^2\theta^2 - 3\beta\theta$ étant minimal pour $\theta = \frac{3}{4\beta\delta}$, qui est bien strictement inférieur à $\frac{3}{2\beta\delta}$ et que l'on souhaite inférieur à 1, on obtient donc les deux situations qui suivent.

Lorsque $\beta\delta \geq \frac{3}{4}$ (pour $\theta = \frac{3}{4\beta\delta}$) vient

$$| K_n |_v \leq \exp\Big[-\frac{3}{16\delta} n^3 + O(n^2) \Big]$$

et lorsque $\beta\delta < \frac{3}{4}$ (pour $\theta = 1$) vient

$$| K_n |_v \leq \exp\Big[\frac{2\delta\beta^2 - 3\beta}{6} n^3 + O(n^2) \Big].$$

La deuxième idée consiste, en partant de (3.15):

$$| L_m(w_n) |_v \leq \exp\big\{ \delta\beta^2 m^2 - \beta m n + c_5 n \big\}.$$

à majorer

$$\sum_{i=0}^{n} \big(\delta\beta^2 m_{\sigma(i)}^2 - (i + \sigma(i)\big)\beta m_{\sigma(i)} + c_5(i + \sigma(i))$$

indépendamment de $\sigma \in S_{n+1}$ avec, pour tout i, $m_i \leq i$.

Cela revient à maximiser

$$\sum_{i=0}^{n} \big(\delta\beta^2 m_i^2 - (i + \sigma(i))\beta m_i \big) = \beta S_\sigma$$

puisque la somme restante est $c_5 n(n+1)$ donc un $O(n^2)$. Choisissons $m_i = i$ pour $0 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ et $m_i = \left[\frac{n}{2}\right]$ pour $\left[\frac{n}{2}\right] < i \leq n$. On obtient:

$$S_\sigma = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \big\{ \beta\delta i^2 - i^2 - i\sigma(i) \big\} + \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \Big\{ \beta\delta \Big[\frac{n}{2}\Big]^2 - (i + \sigma(i))\Big[\frac{n}{2}\Big] \Big\}$$

$$S_\sigma = (\beta\delta - 1)\frac{n^3}{24} + \beta\delta\frac{n^3}{8} - \frac{3n^3}{16} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i\sigma(i) - \Big[\frac{n}{2}\Big] \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \sigma(i) + O(n^2)$$

$$S_\sigma = \frac{8\delta\beta - 11}{48} n^3 + O(n^2) - R_\sigma$$

où $R_\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i\sigma(i) + \left[\frac{n}{2}\right] \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \sigma(i) \right\}$. Soit $\sigma_0 \in \mathcal{S}_{n+1}$ telle que $R_\sigma \geq R_{\sigma_0}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$. Considérons $i_0 < j_0 \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ et σ définie par $\sigma(k) = \sigma_0(k)$ pour k distinct de i_0 et j_0, et $\sigma(i_0) = \sigma_0(j_0)$ ainsi que $\sigma(j_0) = \sigma_0(i_0)$. La condition $R_\sigma \geq R_{\sigma_0}$ s'écrit $i_0\sigma_0(j_0) + j_0\sigma_0(i_0) \geq i_0\sigma_0(i_0) + j_0\sigma_0(j_0)$ de sorte que $\sigma_0(i_0) > \sigma_0(j_0)$.

Maintenant, supposons que $j_0 > \left[\frac{n}{2}\right] > i_0$. La même méthode donne:

$$i_0\sigma_0(j_0) + \left[\frac{n}{2}\right]\sigma_0(i_0) \geq i_0\sigma_0(i_0) + \left[\frac{n}{2}\right]\sigma_0(j_0)$$

soit encore $\sigma_0(i_0) > \sigma_0(j_0)$.

Il résulte donc que tous les éléments de l'image par σ_0 de $[\left[\frac{n}{2}\right] + 1, n]$ sont strictement inférieures aux images par σ_0 de celles de $[0, \left[\frac{n}{2}\right]]$. Or σ_0 est décroissante sur $[0, \left[\frac{n}{2}\right]]$ donc la restriction de σ_0 à $[0, \left[\frac{n}{2}\right]]$ est définie par $\sigma_0(i) = n - i$ et sa restriction à $[\left[\frac{n}{2}\right] + 1, n]$ est une bijection vers $[0, n - \left[\frac{n}{2}\right] - 1]$. Il en résulte d'ailleurs que $\sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \sigma_0(i) = \frac{n^2}{8} + O(n)$. De ce qui précède nous déduisons donc que:

$$\begin{aligned} R_\sigma &\geq \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} i(n-i) + \frac{n^3}{16} + O(n^2) \\ R_\sigma &\geq \frac{7}{48}n^3 + O(n^2). \end{aligned}$$

La somme S_σ vérifie donc ainsi:

$$\begin{aligned} S_\sigma &\leq \left\{\frac{8\beta\delta - 11}{48} - \frac{7}{48}\right\}n^3 + O(n^2) \\ S_\sigma &\leq \frac{4\beta\delta - 9}{24}n^3 + O(n^2). \end{aligned}$$

La comparaison des réels $\frac{\beta(4\beta\delta-9)}{24}$ et $-\frac{3}{16\delta}$ permet de conclure comme cela a été annoncé. $\square$

3.3. Démonstrations des théorèmes

Pour démontrer ces résultats, nous allons d'abord établir des lemmes qui vont faciliter l'exposition.

On s'intéresse ici à une valeur absolue $\mid q \mid_v$ qu'on note pour simplifier $\mid q \mid$ pour laquelle $\mid q \mid > 1$. On reprend toutes les notations introduites dans le 2.2.

Par ailleurs on rappelle que $\Phi(z) = \lambda F_q(\alpha z) + \mu = \sum_{n \geq 0} a_n(q) u_n z^n$ avec $F_q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(q) z^n$ et $u_0 = \lambda + \mu$, $u_n = \lambda \alpha^n$.

Lemme 3.5

Pour tout $R >> 1$,

$$\ln \mid \Phi \mid (R) \leq \frac{\ln^2 R}{2 \ln \mid q \mid} + O(\ln R). \tag{3.16}$$

Démonstration. Il est commode d'introduire ϕ telle que

$$\phi(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(q) z^n$$

où, suivant les cas cités:

$$c_n(q) = \frac{1}{\mid q \mid^{(n(n+1))/2}}\ , \quad c_n(q) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (\mid q \mid^k -1)}.$$

Cette fonction satisfait respectivement à:

$$\phi(\mid q \mid z) = 1 + z\phi(z) \tag{3.17}$$

$$\phi(\mid q \mid z) = (1+z)\phi(z). \tag{3.18}$$

L'application du Lemme 3.1 à ϕ en remarquant que (3.17) et (3.18) conduisent à une même inégalité:

$$\mid \phi \mid (R) \leq 2R \mid \phi \mid \left(\frac{R}{\mid q \mid}\right)$$

qui donne

$$\ln \mid \phi \mid (R) \leq \frac{1}{2} \frac{\ln^2 R}{\ln \mid q \mid} + O(\ln R).$$

La remarque

$$\mid \Phi \mid (R) \leq \sum_{n\geq 0} c_n \mid u_n \mid R^n \leq \mid \mu \mid + \mid \lambda \mid \phi\big(\mid \alpha \mid R\big)$$

fournit alors (3.16).

On rappelle tout d'abord que nous avions posé $\Phi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(q) u_n z^n$,

$$\psi(z) = \frac{\Phi(z)}{1-z} = \sum_{n\geq 0} a_n(q) v_n z^n,$$

$\tilde{\Phi}(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$, $\tilde{\psi}(z) = \sum_{n\geq 0} v_n z^n$ et pour ce qui concerne cette étude, en fait $\tilde{\Phi}(z) = \mu + \frac{\lambda}{1-\alpha z}$. ψ est entière puisque Φ l'est et $\Phi(1) = 0$. □

Lemme 3.6

La fonction $\tilde{\psi}$ a un rayon de convergence non nul et est méromorphe dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Pour $R >> 1$ il est clair que $\psi(R) \leq \frac{|\Phi|(R)}{R-1}$ donc, d'après le Lemme 3.5:

$$\ln \mid \psi \mid (R) \leq \frac{1}{2} \frac{\ln^2 R}{\ln \mid q \mid} + O(\ln R).$$

Pour établir que le rayon de convergence est non nul, on utilise l'inégalité de Cauchy à l'ordre n et la majoration du Lemme 1 avec $R = \mid q \mid^n$. Le rayon de convergence de

$\sum_{n\geq 0} v_n z^n$ étant non nul, son rayon de méromorphie M est donc non nul; prouvons que $M = +\infty$. A cet effet nous allons d'abord établir le lien fonctionnel entre $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\psi}$. Dans le cas de la fonction de Tschakaloff, $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 0$ $v_{n+1} = q^{n+1} v_n + u_{n+1}$ d'où:

$$\tilde{\psi}(z) = qz\tilde{\psi}(qz) + \tilde{\Phi}(z), \tag{3.19}$$

puis

$$\tilde{\psi}\Big(\frac{z}{q}\Big) = z\tilde{\psi}(z) + \tilde{\Phi}\Big(\frac{z}{q}\Big). \tag{3.20}$$

Dans le cas de la fonction q-exponentielle, $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 0$ $v_{n+1} = (q^{n+1} - 1)v_n + u_{n+1}$ d'où:

$$(1+z)\tilde{\psi}(z) = qz\tilde{\psi}(qz) + \tilde{\Phi}(z), \tag{3.21}$$

puis

$$\Big(1 + \frac{z}{q}\Big)\tilde{\psi}\Big(\frac{z}{q}\Big) = z\tilde{\psi}(z) + \tilde{\Phi}\Big(\frac{z}{q}\Big). \tag{3.22}$$

Dans chacun des cas ci-dessus $\tilde{\Phi}(z) = \mu + \frac{\lambda}{1-\alpha z}$. Si M était fini, on aurait une contradiction car le rayon de méromorphie de $\tilde{\Phi}$ est infini et celui de $\tilde{\psi}\big(\frac{z}{q}\big)$ est strictement plus grand que M puisque $\mid q \mid > 1$. □

Lemme 3.7

Les pôles de $\tilde{\psi}$ *sont des* $\frac{1}{\alpha}q^n$ *où* $n \geq 0$ *et* $\tilde{\psi}$ *est le quotient* $\frac{g}{\theta}$ *de deux fonctions entières telles que* $\theta(z) = \prod_{k\geq 0}(1 - \frac{\alpha}{q^k}z)$ *et* $\ln \mid g \mid (R) \leq \delta \ln^2 R + O(\ln R)$ *(où* $\delta > 0$*) pour* $R >> 1$.

Démonstration. Le Lemme 3.3 appliqué avec $a = 0$, $b = 1$, $c = q$, $l = 1$ et $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}$ pour T_q et $a = 1$, $b = 1$, $c = q$, $l = 1$ et $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}$ pour E_q fournit le même résultat: $\delta = \frac{1}{2\ln|q|}$. □

Démonstration des théorèmes

Nous allons détailler la démonstration dans le cas de la fonction T_q et signaler les points à modifier pour E_q; nous utilisons une méthode développée par J.P. Bézivin dans [3]. Pour cela, supposant que $K_n \neq 0$, on va former le logarithme népérien de $\prod_w \mid K_n \mid_w^{d_w/d}$ et en particulier examiner le coefficient de n^3 dans un développement asymptotique de cette quantité. Sous les conditions du théorème, ce coefficient étant strictement négatif, vient donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln \prod_w \mid K_n \mid_w^{d_w/d} = -\infty$$

ce qui contredit (2.1). La suite (v_n) est donc une suite récurrente linéaire et la démonstration s'achève de manière assez similaire à celle de J.P. Bézivin.

Faisons le bilan de ce qui est acquis.

Pour une place v telle que $\mid q \mid_v > 1$, nous avons obtenu, à l'aide du Lemme 3.4 pour la fonction T_q les résultats: $\delta = \frac{1}{2\ln|q|_v}$ et $\beta = \ln \mid q \mid_v$ qui fournissent

$$\mid K_n \mid_v \leq \exp\Big\{ -\frac{1}{3}\ln \mid q \mid_v n^3 + O(n^2)\Big\}.$$

Ce résultat est moins bon que celui obtenu à l'aide d'une méthode particulière par J.P. Bézivin (Lemme 2.3 de [3]) sous la forme que nous adoptons dans tout ce qui suit

$$\mid K_n \mid_v \leq \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\ln \mid q \mid_v n^3 + O(n^2)\Big\}.$$

Soit une place $w \neq v$ telle que $\mid q \mid_w > 1$, noté encore pour ce qui suit $\mid q \mid > 1$. On a l'expression de v_n à l'aide des u_k suivante:

$$v_n = a_n(q)^{-1} \sum_{k=0}^{n} u_k a_k(q) \tag{3.23}$$

avec la valeur $a_k(q) = \dfrac{1}{q^{(k(k+1))/2}}$. Il existe donc une constante M_w indépendante de n pour laquelle on a immédiatement:

$$\mid v_n \mid \leq M_w \mid q \mid^{(n(n+1))/2}. \tag{3.24}$$

On déduit en revenant aux notations initiales que:

$$\mid K_n \mid_w \leq \exp\Big(\frac{2}{3}n^3 \ln \mid q \mid_w + O(n^2)\Big). \tag{3.25}$$

Avec une place w telle que $\mid q \mid_w = 1$, on obtient

$$\mid K_n \mid_w = \exp\big\{O(n^2)\big\}. \tag{3.26}$$

Reste la situation d'une place w pour laquelle $\mid q \mid_w < 1$. Évidemment T_q n'est pas définie mais la définition des suites (u_n), (v_n) et (K_n) par les récurrences utilisées à plusieurs reprises reste valable et $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\Phi}$ sont définies.

Remarquons d'abord que $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ ayant un rayon de convergence non nul, il en est de même pour $\sum_{n\geq 0} v_n z^n$ puisque, à partir d'un certain rang n_0:

$$\mid v_n \mid_w \leq c' \mid v_{n-1} \mid_w + \mid u_n \mid_w$$

où $c' > 0$ est fixé. Ceci permet par récurrence de montrer qu'à partir d'un certain rang:

$$\mid v_n \mid_w \leq c_2 {c_3}^n.$$

$\sum_{n\geq 0} v_n z^n$ a donc un rayon de méromorphie M non nul; d'après (3.19) et (3.21) M ne saurait être dans $\mathbb{R}^{*+}$ donc $M = +\infty$. Ceci permet d'après le Lemme 3.3 de trouver ainsi pour T_q : $\delta = \frac{1}{\ln \frac{1}{|q|_w}}$. Le calcul du β du Lemme 3.4 ne pose pas de problème puisque $a_n = \frac{1}{q^n\alpha}$ pour lequel $\ln \mid a_n \mid_w = n \ln \frac{1}{|q|_w} + \ln \frac{1}{\alpha}$ donc $\beta = \ln \frac{1}{|q|_w}$.

Appliquons le Lemme 3.4 à la fonction étudiée. Avec $\delta = \frac{1}{\ln \frac{1}{|q|}}$ et $\beta = \ln \frac{1}{|q|}$ cela donne:

$$\mid K_n \mid \leq \exp\Big\{ -\frac{5}{24} n^3 \ln \frac{1}{\mid q \mid} + O(n^2)\Big\}.$$

Supposons $K_n \neq 0$. On a alors $1 = \prod_w \mid K_n \mid^{d_w/d}$. Prenons le logarithme népérien:

$$0 = \frac{1}{d}\Big[d_v \ln \mid K_n \mid_v + \sum_{w,\ |q|_w>1,\ w\neq v} d_w \ln \mid K_n \mid_w + \sum_{w,\ |q|_w<1} d_w \ln \mid K_n \mid_w + \sum_{w,\ |q|_w=1} d_w \ln \mid K_n \mid_w \Big]$$

donc compte tenu des majorations obtenues précédemment, on a:

$$0 \leq \frac{1}{d}\Big[a d_v \ln \mid q \mid_v + b \sum_{w,\ |q|_w>1,\ w\neq v} d_w \ln \mid q \mid_w + c \sum_{w,\ |q|_w<1} d_w \ln \mid q \mid_w \Big] n^3 + O(n^2). \tag{3.27}$$

Ici on a : $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$ et $c = \frac{5}{24}$. Comme

$$\prod_w \mid q \mid^{d_w/d} = 1$$

on obtient:

$$\sum_{w,\ |q|_w<1} d_w \ln \mid q \mid_w = - \sum_{w,\ |q|_w>1} d_w \ln \mid q \mid_w$$

donc le coefficient de $\frac{1}{d} n^3$ dans l'inégalité ci-dessus s'écrit:

$$\tau = a d_v \ln \mid q \mid_v + b \Big\{ \sum_{w,\ |q|_w>1} d_w \ln \mid q \mid_w - d_v \ln \mid q \mid_v \Big\} + c \Big\{ - \sum_{w,\ |q|_w>1} d_w \ln \mid q \mid_w \Big\}$$

$$\tau = (a-b) d_v \ln \mid q \mid_v + (b-c) \sum_{w,\ |q|_w>1} d_w \ln \mid q \mid_w.$$

Sous la condition $\tau < 0$, il est donc clair que le coefficient de n^3 est strictement négatif et que l'on obtient une contradiction pour n assez grand; ceci prouve que $K_n = 0$ à partir d'un certain rang. La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite récurrente linéaire: on peut donc écrire $v_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\epsilon_i^n$, où les ϵ_i sont des éléments distincts et non nuls de $\mathbb{C}$, rangés par module croissant, et les P_i des polynômes non nuls. De la relation $v_{n+1} = q^{n+1}v_n + u_{n+1}$, on déduit donc

$$\sum_{i=1}^{s} P_i(n+1)\epsilon_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{s} qP_i(n)(q\epsilon_i)^n + \lambda\alpha^{n+1}.$$

On peut supposer que ϵ_s est en module l'un des plus grands ϵ_i. Par suite, $q\epsilon_s$ est de module strictement supérieur à ceux des ϵ_i. Dans la situation où $\lambda = 0$, l'impossibilité d'une telle égalité est immédiate. Lorsque $\lambda \neq 0$, il est impossible que le terme $(q\epsilon_s)^n$ apparaisse avec un coefficient non nul dans le membre de droite de l'égalité précédente; en effet ϵ_s est en module l'un des plus grands ϵ_i donc $q\epsilon_s$ est de module strictement supérieur à ceux des ϵ_i. Ainsi $q\epsilon_s$ étant distinct des $q\epsilon_i$ pour $i \neq s$, on déduit que $q\epsilon_s = \alpha$ et que $qP_s(n) + \lambda\alpha = 0$. L'égalité s'écrit alors:

$$\sum_{i=1}^{s} P_i(n+1)\epsilon_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{s-1} qP_i(n)(q\epsilon_i)^n.$$

Ceci est impossible, puisqu'il y a dans les deux membres un nombre différent de termes de la forme $P(n)\epsilon^n$, et que la décomposition d'une suite récurrente linéaire comme somme de tels termes avec les ϵ distincts, est unique; cette contradiction achève donc la démonstration. □

Cette étude achève la démonstration du Théorèmes 3.1; reste donc les corollaires qui s'obtiennent aisément d'après les remarques qui vont suivre.

Revenons sur une condition suffisante pour avoir $\tau < 0$. Comme: $\tau = d_v \ln \mid q \mid_v \left[(a-b) + (b-c)\mu_v\right]$ avec $a - b < 0$ et $b - c > 0$, une condition suffisante est

$$\mu_v < \frac{b-a}{b-c}. \tag{3.28}$$

Nous obtenons ici: $\mu_v < \frac{28}{11}$.

En ce qui concerne les Corollaires 3.1 et 3.2, il suffit de remarquer que, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\mid q \mid > 1$, on a $d_v = 1$ et $\mid q \mid_v = \mid q \mid$. D'autre part, prenant $q = \frac{q_1}{q_2}$ avec $(q_1, q_2) = 1$, les places w distinctes de v pour lesquelles $\mid q \mid_w > 1$ sont définies par les valeurs absolues p-adiques où p premier divise q_2 de sorte que $d_w = 1$ et

$$\sum_{w \neq v,\ |q|_w > 1} d_w \ln \mid q \mid_w = \sum_{p \text{ premier, } p \text{ divise } q_2} \ln \frac{1}{\mid q_2 \mid_p} = \ln \mid q_2 \mid.$$

Ainsi, dans ce cas:

$$\mu_v = \frac{d_v \ln \mid q \mid_v + \sum_{w \neq v,\ |q|_w > 1} d_w \ln \mid q \mid_w}{d_v \ln \mid q \mid_v} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

La condition (3.28) est donc équivalente à $\frac{\gamma}{\gamma-1} < \frac{28}{11}$ soit $\gamma > \frac{28}{17}$.

En ce concerne le Corollaire 3.2, c'est le résultat: pour $q \in \mathbb{Q}$ et $\mid q \mid > 1$ on a $\mu_v \leq \frac{2\gamma}{\gamma-1}$ (voir [3] page 41), qui permet d'écrire que la condition $\frac{2\gamma}{\gamma-1} < \frac{28}{11}$ équivaut à $\gamma > \frac{14}{3}$.

En ce qui concerne E_q, pour une place v telle que $\mid q \mid_v > 1$ nous avons les résultats $\delta = \frac{1}{2\ln \mid q \mid_v}$ et $\beta = \ln \mid q \mid_v$ qui fournissent

$$\mid K_n \mid_v \leq \exp\Big\{ -\frac{1}{3}\ln \mid q \mid_v n^3 + O(n^2)\Big\}.$$

Pour une place $w \neq v$ la relation (3.23) avec $a_k(q) = \frac{1}{\prod_{p=1}^{k}(q^p-1)}$ ainsi que $u_0 = \lambda + \mu$, $u_n = \lambda\alpha^n$ donne

$$\mid v_n \mid \leq \mid q \mid^{(n(n+1))/2} \prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{\mid q \mid^k}\Big)\sum_{k=0}^{n}\frac{\mid u_k \mid}{\mid q \mid^{(k(k+1))/2}}\frac{1}{\prod_{p=1}^{k}\big(1-\frac{1}{\mid q \mid^p}\big)}.$$

Ceci assure la même conclusion (3.21) d'après la convergence des séries et produit infini qui apparaissent. Ainsi $\delta = \frac{1}{\ln \frac{1}{\mid q \mid_w}}$. L'inégalité (3.25) en résulte.

Avec une place w telle que $\mid q \mid_w = 1$, on obtient encore l'estimation (3.26).

Pour une place w telle que $\mid q \mid_w < 1$, on trouve $\delta = \frac{1}{\ln \frac{1}{\mid q \mid_w}}$ pour le Lemme 3.3. La relation (3.7) devenant

$$\theta(z) = \prod_{k\geq 0}\big(1-\alpha q^k z\big)\big(1+q^k z\big)$$

(où $\alpha \neq 0$), doit être écrite sous la forme

$$\prod_{n\geq 1}\Big(1-\frac{z}{a_n}\Big)$$

avec $(a_n)_{n\geq 1}$ croissante pour appliquer le Lemme 3.4. On doit distinguer $\mid \alpha \mid_w = 1$ ou non, et dans chaque cas, on obtient $\beta = \frac{1}{2}\ln \frac{1}{\mid q \mid_w}$. Résultent alors:

$$\mid K_n \mid_w \leq \exp\Big\{ -\frac{1}{6}n^3 \ln \frac{1}{\mid q \mid_w} + O(n^2)\Big\}$$

puis (3.27) avec $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ et $c = \frac{1}{6}$. Le raisonnement se termine comme pour T_q avec la restriction $\alpha \notin -q^{\mathbb{N}^*}$ qui apparaît.

Le corollaire résulte alors de l'application numérique de (3.28). □

Remerciements. L'auteur remercie vivement le Referee pour la lecture attentive de son article.

Bibliographie

1. Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Collection SUP: Le Mathématicien, No. **14**, Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
2. J.P. Bézivin, Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles, *Manuscripta Math.* **61**(1) (1988), 103–129.
3. J.P. Bézivin, Sur les propriétés arithmétiques d'une fonction entière, *Math. Nachr.* **190** (1998), 31–42.
4. P. Bundschuh, Quelques résultats arithmétiques sur les fonctions Thêta de Jacobi, *Publications mathématiques, Paris VI, Problèmes Diophantiens* **64**(1) (1983–1984), 1–15.
5. P. Bundschuh, Verschärfung eines arithmetisches Satzes von Tschakaloff, *Portugal. Math.* **33** (1974), 1–17.
6. P. Bundschuh, Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsaussagen, *Invent. Math.* **9** (1969/1970), 175–184.
7. D. Duverney, Propriétés arithmétiques d'une série liée aux fonctions Thêta, *Acta Arith.* **64**(2) (1993), 175–187.
8. D. Duverney, Sommes de deux carrés et irrationalité de valeurs de fonxtions Thêta, *C.R. Acad. Sci. Sér. I Math.* **320** (1995), 1041–1044.
9. L. Tschakaloff, Arithmetische Eigenschaften des unendlichen Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n(n+1)/2} x^n$, I, *Math. Ann.* **80** (1921), 62–74; II, *Math. Ann.* **84** (1921), 100–114.