*Collect. Math.* **46**, 1–2 (1995), 131–141



# Transitivité pour une certaine "normalité faible" dans un groupe[(*)]

C. Marchionna Tibiletti

*Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università di Milano*

*Via C. Saldini 50, 20133 Milano, Italy*

Dédié à la mémoire de Paul Dubreil

Abstract

Let $H, K$ be subsets of a group $G$ and $Z = Z(G) \subset H \subseteq K \subseteq G$: then is defined "$H$ weak normal in $K$" if and only if $\forall k \in K \backslash Z$, $\exists h \in H \backslash Z, [h, k] = 1$. The subset $H$ of $G$ is defined "$Q$-complex" if and only if $\forall h \in H$ also $\langle h \rangle \subset H$. The groups where the "weak normality" is transitive are characterized. The groups $G$ where the "weak normality" is transitive for the subsets $H \supset Z$, are those groups reducible (for permutability) where the distance (for permutability) is one. The groups where the "weak normality" is transitive for the $Q$-complex $K \supset Z$ are those groups where $\forall x, y \in G \backslash Z$ connexe (for permutability) $\exists n \in \mathbb{Z}, [x, y^n] = 1,\ y^n \notin Z(G)$. Other properties and a few examples will be also reported.

Ici on considère des propriétés d'un groupe qui sont liées à un certain type de "normalité faible" pour des sousensembles d'un groupe, qui a été introduite en [9] et qui se rapporte à la permutabilité des éléments d'un groupe.

Pour un sousensemble $H$ d'un groupe $G$ avec $H \supset Z(G) = Z$ on dit que $H$ est "normal faible" dans un sousensemble $K$ où $H \subset K \subseteq G$ lorsque $\forall k \in K$ commute avec un élément $h \in H \backslash Z$ (cfr. 1.7). Ici, à l'imitation d'un problème analogue traité pour la normalité abituelle des sousgroupes dans un groupe (cfr. [10] 13.4 p. 388 et [3]), on caractérise les groupes pour lesquels la "normalité faible" est transitive.

(*) Ce travail a l'aide du MURST (Ministero dell'Università e della Ricerca scientifica e tecnologica) e du CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche) italiens.

En particulier une telle caractérisation est donnée lorsque les sousensembles $H$ sont quelconques (cfr. 3.3) (avec $Z \subset H$) et lorsque ils sont des $Q$-complexes, c'est à dire des sousensembles $H$ tels que pour $h \in H$ on a $\langle h \rangle \subseteq H$ (cfr. 4.1).

Ces derniers sousensembles sont une simple généralisation des sousgroupes d'un groupe et ils se révélent particulièrement indiqués pour les problèmes du type considéré.

## 1. Introduction

**1.1** Dans un groupe $G$ on dira "complexe" ou "sous-ensemble" de $G$ un ensemble $(\neq \phi)$ donné par des éléments de $G$. En outre on appelera "$Q$-complexe" ou "$Q$-sous-ensemble" un complexe $H \subseteq G$ tel que si $h \in H$ même $\langle h \rangle \subseteq H$. Les sous-groupes de $G$ sont des "$Q$-complexes" (cfr. [2]).

**1.2** Pour un groupe $G$, on dit que deux éléments $x,\, y \in G\backslash Z$, où $Z = Z(G)$, sont *connexes* par rapport à la permutabilité lorsque $\exists\, a_1, a_2, \ldots, a_r \in G\backslash Z$ tels que $[x, a_1] = [a_i, a_{i+1}] = [a_r, y] = 1$. Si la chaîne $x, a_1, \ldots, a_r, y$ est la plus courte possible, avec les conditions précédentes, on dit que $r + 1 = d(x, y)$ est la *distance* entre $x$ et $y$. On ajoute $d(z, x) = 1$ pour $z \in Z$ et $d(x, x) = 0$.

Lorsque deux éléments $x,\, y \in G\backslash Z$ ne sont pas connexes on pose $d(x, y) = \infty$ (cfr. [4]).

**1.3** Dans l'ensemble $G\backslash Z$ la relation $x \sim y$ si et seulement si $x, y$ sont des éléments connexes par la permutabilité est une relation d'équivalence (disons $M_i$ les classes d'équivalence).

Appelons "$N$-complexe minimal" l'ensemble $N_i = Z \cup M_i$ et "$N$-complexe" $N$ l'union d'un certain nombre (fini ou infini) de $N$-complexes minimaux.

Un $N$-complexe $N$ contient, avec un élément $x \in N\backslash Z$ tous les éléments connexes avec $x$ par la permutabilité.

Les $N$-complexes sont des $Q$-complexes.

Soient $N_i (i \in J)$ les $N$-complexes minimaux d'un groupe: on a $N_i \cap N_j = Z$ lorsque $i \neq j$ et nous écrivons $G = \sum_{i \in J} N_i$. Lorsque tous les éléments de $G\backslash Z$ sont connexes par la permutabilité on dit que $G$ est "irréductible" (par la permutabilité) et il coïncide avec son unique $N$-complexe minimal (cfr. [4]).

**1.4** On appelle "distance" $d(g)$ d'un élément $g \in G$ le maximum, s'il existe, des distances $d(g, y), \forall y \in G\backslash Z$ connexe avec $g$. S'il n'y a pas ce maximum on pose $d(g) = \infty$.

Lorsque la distance des éléments $g \in G \backslash Z$ est finie et il existe un maximum pour ces distances, ce nombre on l'appelle "distance" $d(G)$ du groupe $G$. Autrement on pose $d(G) = \infty$.

Analoguement on parle de distance $d(N)$ d'un $N$-complexe $N$ (minimal ou non) de $G$ (cfr. [4]).

**1.5** Soit $G$ un groupe réductible par la permutabilité et soit $d(G) \leq 2$: les $N$-complexes minimaux sont des sousgroupes de $G$ en particulier ils sont abéliens lorsque $d(G) = 1$ (cfr. [5]).

**1.6** Soit $G$ un groupe avec centre $Z$; soit $H \subseteq G$ un complexe de $G$. Nous disons "normalisateur faible" de $H$ en $G$ l'ensemble

$$N_d(H) = \left\{ n/n \in G \ , \ \exists\, h \in H \backslash Z \ , \ [n, h] = 1 \right\}.$$

Cet ensemble $N_d(H)$ est un $Q$-complexe (en général il n'est pas un sousgroupe de $G$).

Ensuite nous utiliserons surtout des complexes $H$ avec $Z \subset H \subseteq G (Z \neq H)$; cette hypothèse est inessentielle par rapport aux questions suivantes.

**1.7** Dans un groupe $G$ soient $H, K$ deux complexes tels que $Z \subset H \subseteq K \subseteq G$. Nous disons que $H$ est "*normal faible*" en $K$ (et posons $H \triangleleft_d K$) lorsque chaque $k \in K \backslash Z$ commute avec un $h \in H \backslash Z$ où $h = h(k)$.

En particulier on peut considérer la "normalité faible" seulement par rapport aux $Q$-complexes $H, K$ avec $Z \subset H \subseteq K \subseteq G$.

On parle même de séries "faiblement normales" de complexes (ou $Q$-complexes) en $G$, données par $Z \subset H = H_0 \triangleleft_d H_1 \triangleleft_d H_2 \triangleleft_d \ldots \triangleleft_d H_r \triangleleft_d \ldots$ (cfr. 3.10 de [9]).

**1.8** Dans un groupe $G$ les complexes $H_0, H_1, \ldots, H_n$ soient tels que

$$Z \subset H = H_0 \triangleleft_d H_1 \triangleleft_d H_2 \triangleleft_d \ldots \triangleleft_d H_n = G\,.$$

Ces complexes $H_i$ ont les appellent "complexes normaux faibles", de $G$.

On parle même de "complexes normaux faibles" dans un complexe $S$ (où $Z \subset S \subseteq G$) $-$en particulier dans un $N$-complexe minimal$-$ en employant la définition précédente par rapport à $S$ (et à ses sousensembles) au lieu de $G$.

**1.9** Soit $H$ avec $Z \subset H \subseteq G$ un complexe du groupe $G$. Considérons la série suivante

$$Z \subset H = M_0 \triangleleft_d M_1 \triangleleft_d \ldots \triangleleft_d M_i \triangleleft_d M_{i+1} \triangleleft_d \ldots \tag{1}$$

où $M_{i+1} = N_d(M_i)$.

On suppose que la chaîne (1) soit sans répétitions. Lorsque (1) est finie, c'est à dire

$$(1') \qquad Z \subset H = M_0 \lhd_d M_1 \lhd_d \ldots \lhd_d M_r$$

le nombre $r$ est appelé "distance du complexe $H$ en $G$" et on pose $r = \delta(H)$.

Lorsque (1) est infinie on pose $\delta(H) = \infty$ (cfr. 5.1 de [9]). On voit que les ensembles $M_i, i \geq 2$ sont des $Q$-complexes. On vérifie aisément que $\delta(H) \leq d(G)$ où $d(G)$ est la distance de $G$ (cfr. 5.9 de [9]).

## 2. Normalité faible transitive

**2.1** Nous disons que la "normalité faible" dans un groupe $G$ est *transitive* ($T_d$) sur les complexes $H \supset Z$ lorsque de $H \lhd_d K \lhd_d L$ où $Z \subset H \subseteq K \subseteq L(H, K, L$ sont des complexes de $G$) il s'ensuit que $H \lhd_d L$.

On peut introduire cette "normalité faible transitive" même par rapport à un complexe $S$ où $Z \subset S \subseteq G$ (et ses sousensembles) en employant une définition analogue à la précédente.

On peut considérer la "normalité faible transitive" $\left(T_d^Q\right)$ seulement par rapport aux $Q$-complexes lorsque dans la définition précédente $H, K, L$ sont des $Q$-complexes.

La classe des groupes $G \in T_d$ est contenue dans la classe des groupes $G \in T_d^Q$.

**Théorème 2.2**

*La normalité faible dans un groupe $G$ est $T_d\left(T_d^Q\right.$ respectivament$\left.\right)$ si et seulement si, lorsque $H \lhd_d K$, où $Z \subset H \subseteq K \subseteq G$, on a $N_d(H) = N_d(K)$ $\forall H, K$ complexes ($Q$-complexes).*

*Preuve.* i) $G \in T_d\left(T_d^Q\right)$ et soit $H \lhd_d K$. On a $H \lhd_d K \lhd_d N_d(H) \subseteq N_d(K)$ c'est à dire $N_d(H) \subseteq N_d(K)$. En outre $H \lhd_d K \lhd_d N_d(K)$ et donc $H \lhd_d N_d(K)$, $N_d(K) \subseteq N_d(H)$ (cfr. 3.2 de [9]); enfin $N_d(K) = N_d(H)$.

ii) L'hypothèse soit $N_d(H) = N_d(K)$ lorsque $H \lhd_d K$ $\forall H, K$ complexes des types respectivament considérés.

Soit $H \lhd_d K \lhd_d L$: on a $N_d(H) = N_d(K) = N_d(L)$ et donc $H \lhd_d K \lhd_d L \lhd_d N_d(L) = N_d(H)$; enfin $H \lhd_d L$ (cfr. 3.2 de [9]). On a respectivament $G \in T_d$ e $G \in T_d^Q$. $\square$

**2.3** À cause du Théorème 2.2 si $H$ est "subnormal faible" en $G$ et $G \in T_d(T_d^Q$ respectivement) on a que $H \lhd_d G$ et $N_d(H) = G$ car $N_d(G) = G$.

Donc les complexes "subnormaux faibles" sont seulement, dans ce cas, les complexes "normaux faibles". Maintenant soit $S$ un complexe quelconque (en particulier un $N$-complexe) de $G$ et $Z \subset S$. Si $G \in T_d$ les complexes "surnormaux faibles" en $S$ (cfr. 1.8) sont seulement les complexes "normaux faibles" en $S$.

Au contraire, lorsque pour chaque $S$ (où $Z \subset S \subseteq G$) les complexes "subnormaux faibles" (en $S$) sont "normaux faibles" (en $S$) on a $G \in T_d$ ($T_d^Q$ respectivament si l'on considère seulement les $Q$-complexes de $G$ et aussi $S$ est $Q$-complexe).

## 3. La Transitivité $T_d$

**Lemme 3.1**

*Soient $G$ un groupe, $G \in T_d$, et $H$ un complexe quelconque avec $Z \subset H \subseteq N$ où $N$ est un $N$-complexe minimal de $G$. On a $H \lhd_d N$.*

*Preuve.* Considérons la chaîne

$$Z \subset H = M_0 \lhd_d M_1 \lhd_d M_2 \lhd_d \dots \lhd_d M_i \lhd_d \dots \subseteq N$$

où $M_i = N_d\big(M_{i-1}\big)$ (cfr. 5.1 e 5.3 de [9]).

Pour $h \in H \backslash Z$ la chaîne des i-normalisateurs $N^{(i)}(h)$ est telle que $N = \cup N^{(i)}(h)$ (cfr. [4]).

On a $N^{(i)}(h) \subseteq M_i$ et $\cup M_i \subseteq N$. Donc $\cup M_i \supseteq \cup N^{(i)}(h) = N$, $\cup M_i = N$ .

Lorsque $G \in T_d$ on a $H \lhd_d M_i$ et par conséquent $H \lhd_d \cup M_i = N$ (cfr. 3.3 de [9]).$^{(*)}$ $\square$

**3.2** La propriété précédente est valable même pour $T_d^Q$ lorsque $H$ est un $Q$-complexe. Il faut remarquer que les $M_i$ , $i \geq 1$ , et $N$ aussi sont tous des $Q$-complexes. La démonstration est semblable à celle de 3.1.

**Théorème 3.3**

*Soit $G$ un groupe pas abélien: $G \in T_d$ si et seulement si $G$ est réductible (par rapport à la permutabilité) et ses $N$-complexes minimaux sont des sousgroupes abéliens.*

---

$^{(*)}$ La propriété indiqué en [9] est $H \lhd_d K_1$ , $H \lhd_d K_2 \Longrightarrow H \lhd_d K_1 \cup K_2$; on obtien tout de suite que lorsque $H \lhd_d K_i$ , $i \in J$ on a $H \lhd_d \cup_{i \in j} K_i$.

*Preuve.* i) Soit $G \in T_d$.

Soit $N$ un $N$-complexe minimal (a priori même coïncidant avec $G$). On considére $h \in N \backslash Z$ et le complexe $H = \{Z, h\}$. On a $M_i = N^{(i)}(h)$ et, en particulier $H \lhd_d N$ (cfr. 3.1); donc $M_1 = N^{(1)}(h) = N$ (lorsque $i \geq 1$). Il s'ensuite que $\forall n \in N$ on a $[n, h] = 1\,,\ \forall h \in N \backslash Z$.

On conclut que $N$ est un $Q$-complexe abélien et donc (cfr. [5]) il est un sousgroupe abélien. En outre $G$ doit être réductible (par la permutabilité) car si $N = G$ le groupe $G$ est abélien.

ii) $G$ soit un groupe réductible (par la permutabilité) et ses $N$-complexes minimaux $N_i$ soient des sousgroupes abéliens; écrivons $G = \sum N_i$. Lorsque $H$ est un complexe de $G$ (avec $Z \subset H$) nous pouvons même écrire $H = \sum H_j^*$ où $H_j^* = N_j^* \cap H \neq Z$ (les $N$-complexes $N_j^*$ sont tous ceux pour lesquels $N_j^* \cap H \neq Z$). De l'hypothèse s'ensuit $N_d(H_j^*) = N_j^*$ et donc $N_d(H) = \sum N_d(H_j^*) = \sum N_j^*$.

Soit maintenant $H \lhd_d K$. Remarquons d'abord qu'on a

$$H_j = H \cap N_j \neq Z \iff K_j = K \cap N_j \neq Z\,.$$

En effet, car $H \subseteq K$ on a $H_j \subseteq K_j$ et si $H_j \neq Z$ même $K_j \neq Z$. Soit $K_j \neq Z$: les éléments de $K_j \backslash Z$ doivent commuter avec des éléments de $H \backslash Z$ qui sont certainement en $N_j$. Il s'ensuit $H_j \neq Z$. Par conséquent $K = \sum K_j^*$ où les index $j$ sont les mêmes qui paraissent en $H = \sum H_j^*$.

Comme on a vu pour $H$ on a $N_d(K) = \sum N_d(K_j^*) = \sum N_j^*$. Il s'ensuit $N_d(H) = N_d(K)$ et à cause de 2.2 la "normalité faible" est transitive ($T_d$). □

**3.4** Pour un groupe $G$ *pas abélien* le propriétés suivantes sont *équivalentes.*

i) $G \in T_d$;

ii) $G$ est *réductible* (par la permutabilité) et ses $N$-*complexes minimaux* sont des *sousgroupes abéliens*: c'est a dire $G$ est l'union (d'ensembles) de sousgroupes abéliens $N_i$ qui ont en commun seulement $Z$ tels que aucun élément de $N_i \backslash Z$ commute avec un élément de $N_j \backslash Z\,,\ i \neq j$;

iii) $G$ est *réductible* par la permutabilité et il a *distance* $d(G) = 1$.

iv) $G$ est *réductible* par la permutabilité et chaque *complexe* $H$, avec $Z \subset H \subseteq G$ a *distance* $\delta(H) \leq 1$ (cfr. [9]).

i) $\iff$ ii) C'est le Théorème 3.3.

ii) $\implies$ iii) Lorsque les $N$-complexes minimaux $N_i$ de $G$ sont des groupes abéliens on a $d(N_i) = 1$ et donc $d(G) = 1$ (cfr. [4]).

iii) $\implies$ ii) Lorsque $d(G) = 1$ et $G = \sum N_i$ pour les $N$-complexes minimaux $N_i$ on a $d(N_i) = 1$. Donc (cfr. [4]) les complexes $N_i$ sont des sousgroupes abéliens.

iv) $\Longrightarrow$ iii) Soit $\delta(H) = 1$. Pour le complexe $H = \{Z, x\}$ $x \in N_i \backslash Z$ on a $M_1 = N^{(1)}(x) = N_i$ c'est à dire $d(x) = 1$. Car $d(x) = 1$, $\forall\, x \in N_i \backslash Z$ il s'ensuit $d(N_i) = 1$ et $d(G) = 1$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Soit $d(G) = 1$.

Pour un complexe $H$ avec $Z \subset H \subseteq G$ et $x_i \in H \backslash Z$ , $x_i \in N_i$ on a $d(x_i) = 1$ , $N^{(i)}(x_i) = N_i$. Soient $N_j^*$ les $N$-complexes minimaux pour lesquels $H \cap N_j^* \neq Z$. Considérons $x_j^* \in (H \cap N_j^*) \backslash Z$: on a $N^{(1)}(x_j^*) = N_j^*$ et $\cup\, N^{(1)}(x_j^*) = N_d(H) \subseteq \cup\, N_j^*$. Encore $\cup\, N^{(1)}(x_j^*) = \cup\, N_j^*$ et donc $N_d(H) = \cup\, N_j^*$ , $N_d(N_d(H)) = N_d(H)$ et enfin $\delta(H) \leq 1$.

Exemples 3.5: Il y a beaucoup d'exemples de groupes $G \in T_d$ (naturellement il sont réductibles par la permutabilité). Ici nous signalons seulement quelque type de groupes $G \in T_d$.

**3.5.1** $G \in T_d$ lorsque $G$ est un groupe de Frobenius (fini ou localement fini) $G = KH$ avec noyau $K$ et complément $H$ tous les deux abéliens (cfr. [11] 12.6 p. 348, [5], [7]). Entre ces groupes il y a en particulier tous les groupes finis dans lesquels les sousgroupes de Sylow sont cycliques: dans ce cas les $N$-complexes minimaux sont des sousgroupes cycliques (de Hall) (cfr. [11] 12.6, p. 356).

**3.5.2** Plus précisément, a partir de 4.9, 4.7 en [5] on déduit que "les groupes finis $G \in T_d$, réductibles par la permutabilité, avec $Z(G) = 1$ sont seulement les groupes de Frobenius qui ont noyau et complément abéliens et les groupes projectives $PSL(2, 2^r)$.

**3.5.3** Les groupes de Tarski $G \in T_d$. Ils ont $Z(G) = 1$ et un nombre infini de $N$-complexes minimaux d'ordre premier.

**3.5.4** Le groupes libres $G \in T_d$ (cfr.1. en [8]).

## 4. La Transitivité $T_d^Q$

**Théorème 4.1**

*Un groupe (pas abélien) $G \in T_d^Q$ si et seulement si les $N$-complexes minimaux $N_i$ (en particulier $G = N_i$) sont tels que $\forall x,\, y \in N_i \backslash Z$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ , $n \geq 1$ avec $[x^n, y] = 1$ , $x^n \notin Z$.*

*Preuve.* i) $G \in T_d^Q$. Soit $N_i$ un de ses $N$-complexes minimaux (en particulier $G = N_i$). On considère $x \in N_i \backslash Z$ et $H = \{Z\langle x\rangle\}$ où $H$ est un $Q$-complexe. On a (cfr. 3.1, 3.2) que $Z\langle x\rangle \lhd_d N_i$, donc chaque $y \in N_i \backslash Z$ commute avec quelqu'un des éléments de $(Z\langle x\rangle)\backslash Z$ qui sont du type $z\,x^n \notin Z$ , $z \in Z$. Enfin $x^n \notin Z$ et $[y, x^n] = 1$.

ii) Soit $G$ un groupe pour lequel $\forall x,\, y \in N_i$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $[x^n, y] = 1$ , $x^n \notin Z$. Considérons $H$ avec $Z \subset H \subseteq N_i$ où $N_i$ est un des $N$-complexes minimaux et $\langle x\rangle \subseteq H$ où $x \in H\backslash Z$; par l'hyothèse on a $N_d(Z\langle x\rangle) = N_i$. Mais $N_d(Z\langle x\rangle) \subseteq N_d(H) \subseteq N_i$ et enfin $N_d(H) = N_i$ .

Soit $H$ un $Q$-complexe quelconque ($Z \subset H \subseteq G$) en $G$ et soient $N_j^*$ les $N$-complexes minimaux pour lesquels on a $H \cap N_j^* \neq Z$. En répétant la même démonstration de ii) 3.3, lorsque $H \lhd_d K$ (où maintenant $H, K$ sont des $Q$-complexes) on a $N_d(H) = N_d(K)$. Donc il s'ensuit $G \in T_d^Q$ (cfr. 2.2). □

**4.2** *Pour les groupes $G$* (pas abéliens) les propriété suivantes sont *équivalentes:*

i) $G \in T_d^Q$

ii) $\forall\, x, y \in N_i \backslash Z$ où $N_i$ est un $n$-complexe minimal (en particulier $N_i = G$) *il existe* $n \geq 1$ *tel que* $[x^n, y] = 1$ , $x^n \notin Z$.

iii) *la distance* $\delta(H)$ d'un $Q$-complexe $H$ quelconque ($Z \subset H \subseteq G$) *est tel que* $\delta(H) \leq 1$.

i) $\Longleftrightarrow$ ii) C'est le théorème 4.1.

i) $\Longrightarrow$ iii) Car $G \in T_d^Q$ (cfr. 3.2, 3.1) pour un $Q$-complexe $H$ tel que $Z \subset H \subseteq N_i$ (où $N_i$ est un $N$-complexe minimal) on a $H \lhd_d N_i$, c'est à dire $\delta(H) \leq 1$. Maintenant $H$ soit un $Q$-complexe quelconque: indiquons par $N_j^*$ les $N$-complexes minimaux tels que $H_j = H \cap N_j^* \neq Z$. Donc $H \subseteq \cup N_j^* = N$ où $N$ est un $N$-complexe. Pour ce qu'on a dit plus haut $H_j \lhd_d N_j^*$ et par conséquent $H \lhd_d \cup N_j^* = N \subseteq N_d(H), N_d(H) = N$ et enfin, car $N_d(H) = N$, on a $\delta(H) \leq 1(\delta(H) = 0$ si et seulement si $H = N)$.

iii) $\Longrightarrow$ ii) Soit $\delta(H) \leq 1$. Considérons $H = Z\langle x\rangle$ où $x \notin Z$, soit même $x \in N_i$. Car $\delta(H) \leq 1$ on a $N_d(H) = N_i$ (cfr. 5.1 de [9]). Il s'ensuit que $\forall\, y \in N_i \backslash Z$ commute avec un élément de $H\backslash Z$ qui sera du type $z\,x^n$ , $z \in Z$ , $z\,x^n \notin Z$; donc $[y, x^n] = 1$ , $x^n \notin Z$;

**Corollaire 4.3**

*Les groupes $G \in T_d^Q$ ont distance $d(G) \leq 2$ et donc les $N$-complexes minimaux sont des sousgroupes.*

Dans un $N$-complexe minimal $N_i$ on a que $\forall\, x,\ y \in N_i \backslash Z$ il existe $n \geq 1$ tel que $[x^n, y] = 1$ et $x^n \notin Z$.

On peut considérer la chaîne de permutabilité $x$ , $x^n$ , $y$ (cfr. [4]): donc $d(x, y) \leq 2$ et par conséquent $d(N_i) \leq 2$ , $d(G) \leq 2$. Car $d(N_i) \leq 2$ on a que $N_i$ est un sousgroupe de $G$ (cfr. [5]).

**4.4** In *n'est pas vrai l'inverse* de la proposition précedente, dans le sens que si $d(G) \leq 2$ on ait $G \in T_d^Q$. Il $y$ a des groupes pour lesquels $d(G) = 2$ et $G \notin T_d^Q$.

Par exemple: le groupe $G = \pi U_i (1 \leq i < \infty)$ où $U_i \simeq S_3$ a $d(G) = 2$ (cfr. [6]) et $Z(G) = \langle 1 \rangle$; il est irréductible par la permutabilité. Toutefois dans un tel $G$ il $y$ a des couple $x, y \in U_i \backslash 1$ pour lesquelles n'est pas valable la proprieté ii) de 4.2.

**4.5** Soit $G \in T_d^Q$ *un groupe* (pas abélian) *irréductible* par la permutabilité. On a:

i) $\forall x \notin Z$ *il n'existe pas* $m > 1$ , $x^m \in Z$ (c'est à dire $x$ a période infini en $Z$ et par conséquent $|x| = \infty$);

ii) $|G| = \infty$;

iii) $G/Z$ *n'a pas de torsion.*

i) Soit $x^m \in Z$ où $m$ est le nombre positif minimum pour lequel on a cela. Soit $m = m_0 p$ où $p$ est un nombre premier; on a $u = x^{m_0} \notin Z$ , $u^p \in Z$. $\forall\, y \in G \backslash Z$ il $y$ a $n$ (où $0 < n < p$) pour lequel $y\, u^n = u^n y$ , $u^n \notin Z$. On aura $[p, n] = 1$ , c'est à dire $1 = \lambda\, n + \mu p$ et $u = u^{\lambda n} \,.\, u^{\mu p}$ où $u^{\mu p} \in Z$; donc $u\, y = y\, u$. Puisque cette propriété est valable $\forall\, y \in G \backslash Z$ il s'ensuit $u \in Z$ contre l'hypothèse. Donc en conclusion chaque $x \notin Z$ a période infinie en $Z$ et en particulier $|x| = \infty$.

ii) Evidement $|G| = \infty$ à cause de i);

iii) Dans l'homorphisme canonique $f : G \longrightarrow G/Z$ pour $x' = f(x)$ , $x \in G \backslash Z$ on a $x'^m \neq 1\ \forall\, m \neq 0$ à cause de i). Donc le groupe $G/Z$ n'a pas de torsion.

**4.6** En particulier un groupe $G$ qui satisfait les hypothèses de 4.5 et en outre a $Z = \langle 1 \rangle$ il *n'a pas de torsion.*

Des propriétés analogues a celles de 4.7 on peut les considérer même pour les groupes $G$ réductibles par la permutabilité en introduisant des conditions convenables pour les éléments de chaque $N$-complexe minimal.

**4.7** *Un groupe $G$ irréductible par la permutabilité avec $Z(G) = \langle 1 \rangle$ et $G \in T_d^Q$ il n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments*(*)

On voit que "lorsque un sousgroupe $H$ de $G \in T_d^Q$ est engendré par un nombre fini d'éléments il a un centre $Z(H) \neq \langle 1 \rangle$".

(*) Cette propriété a été signaler par M. C. Tamburini.

Soit $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_k\rangle$ un sousgroupe de $G$ engendré par un nombre fini d'éléments (les $g_i$) et $Z(H)$ soit son centre.

Lorsque $k = 1$ on a $H = Z(H) \neq \langle 1\rangle$. Démonstrons la propriété par induction sur $k$; vérifions que lorsque elle est vrai pour $k-1$ elle est vrai même pour $k$.

Soit $H_1 = \langle g_1, g_2, \dots, g_{k-1}\rangle \, . \, Z(H_1) \neq \langle 1\rangle$ pour l'hypothèse d'induction. On aura $Z(H) \subseteq Z(H_1)$. Lorsque $Z(H) = Z(H_1)$ on a $Z(H) \neq \langle 1\rangle$. Soit $Z(H) \subset Z(H_1)$ et soit même $z_1 \in Z(H_1) \backslash Z(H)$. Car $G \in T_d^Q$ il existe $n > 0$ tel que $[z_1^n, g_k] = 1\,,\ z_1^n \notin Z(H)$. L'élément $z_1^n$ commute avec $g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$ et donc $z_1^n \in Z(H)$ ce qui est absurde. En conclusion chaque sousgroupe $H \subset G$ qui est engendré par un nombre fini d'éléments a le centre $Z(H) \neq \langle 1\rangle$.

En particulier il s'ensuit que le groupe $G$ ne peut pas être engendré par un nombre fini d'éléments.

EXEMPLES 4.8:

**4.8.1** Ici de suite on indique un exemple de groupe $G \in T_d^Q$, $G \notin T_d$. Soit $H = \{x, y / |y| = 6\,,\ x^{-1} y\, x = y^{-1}\,,\ x^2 = y^3\}$ où $|H| = 12$. Il existe un groupe de Frobenius $G = H\,K$ avec noyau $K$ qui est un groupe abélien élémentaire d'ordre 25 (cfr. [11] 12.6.26, p. 359).

Les $N$-complexes sont $K$ et les sousgroupes $H^k, k \in K$ (cfr. [5], [7]). Car $H$ (et donc chaque $H^k$) n'est pas abélien on a $G \notin T_d$. On vérifie aisement que $G \in T_d^Q$ en montrant que pour les $N$-complexes minimaux est valable la propriété ii) de 4.2. Cette propriété est certainement valable pour $K$ qui est abélien. Les éléments de $H$ sont des types $y^i, xy^i$où $0 \leq i \leq 5$, le centre $Z(H) = \langle x^2\rangle = \langle y^3\rangle$. Il faut remarquer que $Z(G) = \langle 1\rangle$. On a $(x\, y^i)^2 = x^2 = y^3 \in Z(H)$ : il s'ensuit que $\forall\, h,\, h' \in H \backslash Z$ l'élément $h$ commute avec une puissance $h'^n$ de $h'$ (où $h'^n \notin Z(G)$). Donc la propriété ii) de 4.2 est valable pour chaque $H^k$. En conclusion $G \in T_d^Q$.

**4.8.2** Remarquons que *pas tous les groupes de Frobenius* $G \in T_d^Q$ (et donc pas même $G \in T_d$).

En [11] 12.6.23, p. 358 on considère un groupe de Frobenius $G = H\,K$ avec noyau pas abélien $K = \langle x, y, z\rangle$ d'ordre $7^3$, d'exposant 7 tel que $Z(K) = \langle x\rangle$, $[y, z] = x$ et complément $H$ où $|H| = 3$.

Ici le complément est abélien mais $K$ n'est pas abélien et donc $G \notin T_d$. Car $H$ a exposant 7 on a que $|k| = 7$ pour $\forall k \in K \backslash 1$. Il s'ensuit que lorsque $k, k' \in K \backslash Z(K)$ et $k\, k'^r = k'^r k\,,\ k'^r \notin Z(G)$ on a $k\, k' = k' k$ contre l'hypothèse que $K$ n'est pas abélien. Donc $K$ ne satisfait pas a ii) de 4.2 et $G \notin T_d^Q$.

**4.8.3** On a que "le groupe de Suzuki $Sz(2^{2m+1})$ avec $m = 2$ est un groupe $\in T_d^Q$". Par [4] on a que $Sz(2^{2m+1}) = G$ est un groupe tel que $d(G) = 2$. Les $N$-complexes minimaux sont ou abéliens ou certains groupes 2-specials $\hat{N}$ pas abéliens d'ordre $(2^{2m+1})^2$. On voit que ces groupes $\hat{N}$ vérifient la propriété ii) de 4.2 (cfr. la Bibliothèque du software Cayley).

**4.8.4** Après les exemples précédents, en utilisant le résultat de [5] déja employé en 3.5.2, on peut conclure que: "les groupes $G \in T_d^Q$, finis, réductibles (par la permutabilité) avec $Z(G) = \langle 1 \rangle$ sont: 1) une partie des groupes de Frobenius, 2) les groupes projectives $PSL(2, 2^r)(\in T_d)$, 3) une partie (ou tous?) les groupes de Suzuki $Sz(2^{2m+1})$.

## Références


1. D. Gorestein, *Finite Groups,* New York, 1968.
2. C. Marchionna Tibiletti, Su alcuni reticoli legati a un gruppo, *Rend. Istit. Lomb.* **A 106** (1972), 470–500.
3. C. Marchionna Tibiletti, Gruppi con complessi a normalità transitiva, *Ann. Mat. Pura Appl.* **(IV) 98** (1974), 365–380.
4. C. Marchionna Tibiletti, Sulla distanza di un gruppo, *Rend. Istit. Lomb.* **A 112** (1978), 181–191.
5. C. Marchionna Tibiletti, Sui gruppi a distanza $\leq 2$, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5) **17** (1980), 14–32.
6. C. Marchionna Tibiletti, Classi di gruppi finitarie rispetto alla permutabilità, *Rend. Sem. Mat. Brescia* **5** (1981), 75–96.
7. C. Marchionna Tibiletti, Gruppi localmente finiti con $N$-complessi dati da sottogruppi, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **52** (1982), 582–597.
8. C. Marchionna Tibiletti, Sulla distanza nei gruppi liberi e nei gruppi di Burnside, *Rend. Sem. Mat. Brescia* **10** (1988), 65–79.
9. C. Marchionna Tibiletti, Un tipo di "normalità debole" in un gruppo, *Rend. Istit. Lomb.* **A 128** (1994) à paraître.
10. D. J. S. Robinson, *A course in the Theory of Groups,* New York, 1982.
11. W. R. Scott, *Group Theory,* New Jersey 1964.