Collect. Math. **46**, 1–2 (1995), 121–130

Dimension injective des produits croisés

Marie-Paule Malliavin

Université P. et M. Curie, Mathématique, Tour 45-46-5ème ètage,
4 place Jussieu, 75252, Paris Cedex 05, France

Dédié à la mémoire de Paul Dubreil

Abstract

Let k be a field, R a commutative noetherian Gorenstein k-algebra of finite Krull dimension, $\mathfrak{G}$ a finite dimensional Lie algebra over k which operates on R by k-derivations and σ a 2-cocycle of $\mathfrak{G}$ with coefficients in R; we will denote by $R *_\sigma \mathfrak{G}$ the crossed product of R by mean of σ; then we will prove the inequalities:

$$\text{injdim}\, R \leq \text{ injdim}\, R *_\sigma \mathfrak{G} \leq \text{ injdim}\, R + \dim \mathfrak{G}\,.$$

We will give also a formula relating injdim $R *_\sigma \mathfrak{G}$ with the Ore localisations of this algebra with respect to the prime ideals of R.

I. Introduction

Si k est un corps, R une k-algèbre associative, $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie opérant par k-dérivations sur R, σ un 2-cocycle de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans R, on note S le produit croisé $R *_\sigma \mathfrak{G}$. De nombreaux travaux étudient la dimension homologique globale de S, par exemple [2], [7], [8], [14]; par contre l'étude de la dimension injective de S n'est faite que lorsque σ est nul, [11]. Nous nous proposons, lorsque R est commutatif, d'une part, d'encadrer la dimension injective de S à l'aide de celle de R et de la dimension de $\mathfrak{G}$, d'autre part d'évaluer la dimension injective de S à l'aide de celles des localisés de S en les idéaux premiers de R.

La section 2 contient un résumé des concepts et notations utilisés dans l'article ainsi qu'un résultat (que nous n'utiliserons pas mais qui peut présenter un certain intérêt) sur la dimension injective d'un anneau de polyômes tordus. Dans la section 3 on généralise un résultat [14] de J. C. McConnell concernant la dimension homologique globale d'un produit croisé, ainsi qu'un résultat de Th. Levasseur [11].

II. Notations

Tous les anneaux considérés sont noethériens à droite et à gauche. Sauf mention du contraire, tous les modules sont des modules à gauche.

2.1 Si A est un anneau et M un A-module, on note dhM lorsque le contexte est clair, la *dimension homologique* de M. On note $lgldimA$ la *dimension homologique globale à gauche* de A; symétriquement on utilisera la notation à droite $rgldimA$. On a alors ([1]):

Théorème

Si A est noethérien à droite et à gauche et si lgldim A et rgldim A sont finies, elles sont égales. On notera alors cette dimension commune par gldim A.

2.2 Si A est un anneau et M est un A-module, on note idM, la *dimension injective* de M. On note $linjdimA$ la *dimension injective du A-module à gauche A.* De façon symétrique on définit la dimension injective à droite de A que l'on note $rinjdimA$. Il est bien connu [3] que si $lgldimA$ est finie, alors $linjdimA = lgldimA$. D'autre part on a un théorème parallèle au Théorème 2.1 (voir [18]):

Théorème

Si A est noethèrien à droite et à gauche et si linjdim A et rinjdim A sont finies, elles sont égales. On notera alors par $injdimA$ cette dimension commune.

Remarquons:

Proposition

Si R est un anneau commutatif noethérien et si injdim R est finie, elle est égale à la dimension de Krull de R.

2.3 On peut trouver une démonstration du résultat suivant dans [11]. *Si R est un anneau commutatif noethérien de dimension injective finie m, l'anneau des polynômes $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ est de dimension injective $m+n$.*

On démontrera une généralisation de l'assertion précédente dont la preuve est due à Th. Levasseur:

Théorème

Soit A un anneau noethérien non nécessairement commutatif de dimension injective finie et τ un automorphisme de A. Alors injdim $\big(A[X,\tau]\big) =$ injdim $A+1$.

Preuve. On pose $B = A[X,\tau]$ que l'on gradue positivement par $B_m = X^m B = BX^m$. Alors $Grinjdim(B) = injdim(B)$ si l'une des deux dimensions est finie (cf. Lemme 3.3 de [10]). Il suffit donc de montrer l'égalité $Grinjdim(B) = injdim(A) +$ 1. Nous poserons $\mu = injdim(A)$.

Soit M un A-module de type fini tel que $E_A^\mu(M) := Ext_A^\mu(M,A) \neq 0$. Comme $A = B/XB$, on a $E_B^{\mu+1}(M) = E_A^\mu(M) \neq 0$, par le lemme de Rees. Donc en considérant M comme un B-module concentré en degré 0, on a l'inégalité: $Grinjdim(S) \geq \mu + 1$.

Soit $\nu \geq \mu + 2$. Considérons un B-module M gradué de type fini, $M = \bigoplus_n M_n, M_n = 0$ si $n < p$, $XM_n \subset M_{n+1}$. On veut montrer que $E_B^\nu = 0$. On étudiera d'abord le cas où il existe w tel que $X^w M = 0$, puis le cas général.

Si $X^w M = 0$ pour un w, on démontre par récurrence sur w que $E_B^\nu = 0$. Si $w = 1$, le lemme de Rees fournit $E_B^\nu(M) = E_A^{\nu-1}(M) = 0$ puisque $\nu - 1 > \mu$. Si $w > 1$, on considère la suite exacte:

$$0 \to X^{w-1}M \to M \to M/X^{w-1}M \to 0$$

qui donne la suite exacte:

$$E_B^\nu\big(M/X^{w-1}M\big) \to E_B^\nu(M) \to E_B^\nu\big(X^{w-1}M\big)$$

et on conclut par récurrence.

Remarquons que si $M = B \otimes_A N$ pour un A-module N, alors: $E_B^\nu(M) = E_A^\nu(N) \otimes_A B = (0)$ où la première égalité vient du fait que B est libre sur A et la seconde de l'hypothèse $\nu > \mu + 1$.

Il suffit alors de prouver que, pout tout B-module gradué de type fini M, il existe w et une suite exacte:

$$0 \to B \otimes_A M_w \to M \to N \to 0$$

où $(0) = X^t N$ pour un certain t.

On note par ${}^{\tau}M$ le groupe abélien M dont l'action à gauche par B est donnée par $b.x = \tau(b)x$. On trouvera par exemple dans [10] des propriétés du foncteur $M \Rightarrow {}^{\tau}M$. On a:

$$0 \to K \to {}^{\tau}M[-1] \overset{\bullet X}{\to} M \to \overline{M} = M/XM \to 0$$

où $K = \{x \in M \text{ tel que } Xx = O\}$ est un B-module gradué de type fini, ainsi que $\overline{M}$. De $XK = 0$ et $X\overline{M} = 0$, on déduit que K et $\overline{M}$ sont des A-modules de type fini gradués comme B-modules. En particulier on a $K \cap M_\nu = \overline{M}_\nu = M_\nu / XM_\nu = 0$ si $\nu >> 0$. Ainsi il existe w tel que la multiplication par X induise des bijections: $X : \left({}^{\tau}M[-1]\right)_{\nu+1} = M_\nu \to M_{\nu+1}$ pour $\nu \geq w$. D'où $B \otimes_A M_w \simeq M^{\geq w} := \bigoplus_{\nu \geq w} M_\nu$ et on a la suite exacte:

$$0 \to M^{\geq w} \to M \to M/M^{\geq w} \to 0$$

avec $X^t M/M^{\geq w}$ si $t \geq w + p$, ce qui achève la démonstration. □

On peut en déduire comme conséquence:

Corollaire

Soient $A = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$ *un anneau noethérien gradué,* $\Omega \in A_d, d > 0$, *un élément normal non diviseur de zéro. Alors* $injdim(A)$ *est finie si et seulement si* $injdim(A/\Omega A)$ *est finie et alors on a:* $injdim(A) = 1 + injdim(A/\Omega A)$.

Preuve. Cela résulte de [10] (Proposition 3.3 et Théorème 3.6). □

2.4 Si A est un anneau noethérien, on appelle *dimension projective finistique à gauche* de A et on note $lFPD(A)$ le supremum des dimensions projectives dhM de tous les A-modules à gauche M qui sont de dimension projective finie. On définit de manière symetrique la *dimension projective finistique à droite* de A que l'on note $rFPD(A)$. Lorsque ces deux dimensions sont égales, on notera $FPD(A)$ la dimension commune.

On a les deux résultats suivants; le premier est démontré dans [16]:

Théorème 1

Si R est un anneau commutatif noethérien, $FPD(R)$ est égale à la dimension de Krull classique de R.

Le second est démontré dans la Proposition 1 de [9]:

Théorème 2

Si A est un anneau noethérien de dimensions injectives à droite et à gauche finies, on a $injdim A = lFPD(A) = rFPD(A)$.

2.5 Soient k un corps et A une k-algèbre filtrée par des k-espaces vectoriels: $\Sigma_{-1} = (O) \subset \Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \ldots$ telle que $\bigcup \Sigma_i = A$, $\Sigma_i \Sigma_j \subseteq \Sigma_{i+j}$ tels que $B = Gr_\Sigma A = \bigoplus_{i \geq 0} \Sigma_i / \Sigma_{i-1}$ soit une k-algèbre commutative noethérienne de dimension de Krull classique égale à ω finie. Alors A est noethérienne. Nous allons énoncer quelques résultats relatifs à la dimension injective de A et aux propriétes homologique des A-modules de type fini que l'on peut trouver dans le Chapitre 2 de [4]. Tous les résultats que nous allons énoncer valent aussi bien pour des A-modules de type fini à droite ou à gauche. Aussi, pour alléger les énoncés, nous ne préciserons pas le côté employé, le contexte étant clair. Introduisons les notions suivantes. Rappelons que l'on a supposé la dimension de Krull classique de B finie et égale à ω. Si M est un A-module de type fini, une filtration $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de M est dite *bonne* si $Gr_\Gamma M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma_i / \Gamma_{i-1}$ est un B-module de type fini, auquel cas la filtration Γ est bornée inférieurement. Tout A-module de type fini peut être muni d'une bonne filtration. (Pour plus de précisions, cf. [4] paragraphe 6).

Proposition

(i) Supposons que B soit de dimension injective fine (donc égale à ω par la proposition 2.2), *alors l'anneau A est de dimension injective finie* (à droite et à gauche et elles sont égales par le Théorème 2.2), *et l'on a:*

$$\mu = injdim A \geq \omega = injdim B \,.$$

(ii) Supposons que B soit de dimension homologique globale finie (donc égale à ω par la proposition 2.2), *alors l'anneau A est de dimension homologique globale finite et l'on a:*

$$gldim A \leq gldim B \,.$$

Preuve. (i) Si M est un A-module de type fini, alors pour tout $i \geq 0$, $Ext^i_A(M,A)$ peut être mui d'une bonne filtration de telle sorte qu'il existe une suite spectrale convergente:

$$E_1^i = Ext^i_B(GrM,B) \Rightarrow E_\infty^n = Gr\big(Ext^i_A(M,A)\big)$$

(cf. [4] paragraphe 6). De cette suite, on déduit que $\mu = injdimA \leq \omega = injdimB$ et que le B-module de type fini $GrExt^i_A(M,A)$ est un sous-quotient de $Ext^i_B(GrM,B)$.

(ii) On trouvera la démonstration suivante dans l'Appendice IV de [5]. Rappelons qu'un A-module F est filtré-libre de rang fini, s'il est libre de rang s muni d'une filtration Γ telle que, pour tout v:

$$\Gamma_v = \Sigma_{v-k_1}\varepsilon_1 + \ldots + \Sigma_{v-k_s}\varepsilon_s$$

où $k_1,\ldots,k_s$ sont des entiers et $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s\}$ est une base de F.

Soit M un A-module de type fini; choisissons une bonne filtration Γ sur M et une résolution filtrée-libre $F_\bullet$ de (M,T). Si $\omega = gldimB$ le A-module $K_\omega = ker(F_\omega \to F_{\omega-1})$ possède une bonne filtration telle que GrK_ω est un B-module projectif. Il en résulte que le A-module K_ω est projectif et donc la dimension projective de M est au plus ω, d'où $gldimA \leq \omega$. $\square$

III. Dimension injective des produits croisés

3.1 Soit k un corps. Par "algèbre" est "algèbre de Lie", on entendra respectivement "k-algèbre associative avec élément unité" et "K-algèbre de Lie". A partir de maintenant, R désigne une algèbre commutative et $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie munie d'un homomorphisme θ de $\mathfrak{G}$ dans l'algèbre de Lie $Der_k(R)$ des k-dérivations de l'algèbre R. Soit $Z^2(\mathfrak{G},R)$ le *k-espace vectoriel des 2-cocycles* de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans R. Donc si $\sigma \in Z^2(G,R)$, alors $\sigma : \mathfrak{G}\times\mathfrak{G} \to R$ est alternée, k-bilinéaire et vérifie pour $x_1,x_2,x_3 \in \mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned}\theta(x_1)\big(\sigma(x_2,x_3)\big) + \theta(x_3)\big(\sigma(x_1,x_2)\big) + \theta(x_2)\big(\sigma(x_3,x_1)\big)\\ + \sigma\big(x_1,[x_2,x_3]\big) + \sigma\big(x_2,[x_3,x_1]\big) + \sigma\big(x_3,[x_1,x_2]\big) = 0\,.\end{aligned}$$

Pour σ un 2-cocycle, J.C. McConnell a construit, dans une série d'articles, l'algèbre des produits croisés par σ, notée $S = R*_\sigma\mathfrak{G}$ ou plus simplement $R*\mathfrak{G}$, de la manière suivante. On munit R de sa structure d'algèbre de Lie abélienne naturelle et on note $\mathfrak{H}$ l'algèbre de Lie $R\times_\sigma\mathfrak{G}$ qui est l'extension de R par $\mathfrak{G}$ correspondant à σ [6];

le crochet de $\mathfrak{H}$ est défini pour $r_1, r_2 \in R$ et $x_1, x_2 \in G$, par $\big[(r_1, x_1), (r_2, x_2)\big] = \big((\theta x_1)r_2 - (\theta x_2)r_1 + \sigma(x_1, x_2), [x_1, x_2]\big)$; ensuite on note $U(\mathfrak{H})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{H}$; alors $S = R * \mathfrak{G}$ est le quotient $U(\mathfrak{H})/I$, où I est l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{H})$ engendré par les éléments $\{1_{U(\mathfrak{G})} - 1_R,\ r_1 \times r_2 - r_1 r_2, r_1 r_2 \in R\}$ où $r_1 \times r_2$ est le produit de r_1 et r_2 dans $U(\mathfrak{H})$ et $r_1 r_2$ leur produit dans R. L'image de $U(R)$ dans $R * \mathfrak{G}$ est isomorphe à R; comme k-espace vectoriel $R * \mathfrak{G}$ est isomorphe à $R \otimes_k U(\mathfrak{G})$ où $R \otimes_k 1$ est la sous-algèbre isomorphe à R auquel on l'identifiera. On montre que $\mathfrak{G} \to R * G,\ x \longmapsto \overline{x}$ est une application injective et que la structure de $R * \mathfrak{G}$ comme algèbre est donnée par les relations:

$$r\overline{x} - \overline{x}r = \theta(x)r, \quad \overline{xy} - \overline{yx} = \overline{[x, y]} + \sigma(x, y)\,,$$

$r \in R,\ x, y \in \mathfrak{G}$. Si on considère une base de $\mathfrak{G}$ sur k, les monômes standards forment une base de $R * \mathfrak{G}$ comme R-modules à droite et à gauche. Donc $R * \mathfrak{G}$ est un R-module libre à droite et à gauche. Le gradué associé à la filtration de $R * \mathfrak{G}$ définie par une base standard est un anneau de polynômes sur R. Il en résulte que si R est noethérien et $\mathfrak{G}$ de dimension finie sur k, alors $R * \mathfrak{G}$ est noethérien à droite et à gauche et est un domaine intègre si R l'est. L'algèbre $R * \mathfrak{G}$ vérifie la propriété universelle suivante:

Proposition

Soient une K-algèbre A et deux applications $h : R \to A$ et $\psi : \mathfrak{G} \to A$, où h est un homomorphisme d'algèbres et où ψ et h sont liés par

$$h(\theta(x)r) = \psi(x)h(r) - h(r)\psi(x) \quad r \in R,\ x \in \mathfrak{G}$$

$$\psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x) = \psi\big([x, y]\big) + h\big(\sigma(x, y)\big) \quad x, y \in \mathfrak{G}\,.$$

Alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres:

$$\tilde{\varphi} : S = R *_\sigma \mathfrak{G} \to A$$

tel que $\tilde{\varphi}_{|R} = h,\ \tilde{\varphi}_{|\mathfrak{G}} = \psi$.

Preuve. Si $\tilde{\varphi}$ existe, elle est unique car alors:

$$\tilde{\varphi}\left(\sum r_\alpha g_1^{\alpha_1} \ldots g_n^{\alpha_n}\right) = \sum h(r_\alpha)\psi(g_1)^{\alpha_1} \ldots \psi(g_n)^{\alpha_n}$$

où $r_\alpha \in R,\ \{g_1, \ldots, g_n\}$ est une base de $\mathfrak{G}$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Pour montrer l'existence de $\tilde{\varphi}$, il suffit de montrer qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : R \times_\sigma \mathfrak{G} = \mathfrak{H} \to A$; on appliquera ensuite [13]. On vérifie sans peine, qu'en posant $\varphi(c + x) = h(c) + \psi(x)$, où $c \in R$ et $x \in \mathfrak{G}$, on définit un morphisme d'algèbres de Lie. $\square$

3.2 On démontre ici le résultat principal de cet article:

Théorème

Soient k un corps, R une k-algèbre commutative noethérienne de dimension injective finie μ, $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie qui opère par dérivations sur R et σ un 2-cocycle de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans R. Alors on a:

$$injdimR \leq injdimR *_\sigma \mathfrak{G} \leq injdimR + dim_k\mathfrak{G}\,.$$

Preuve. On notera $S = R *_\sigma \mathfrak{G}$. D'après la Proposition 2.2, on a $injdimR = \mu = dimR$, la dimension de Krull classique de R. D'après le Théorème 2.4 1, $dimR = FPD(R)$. D'après le Théorème 2.4 2 et la Proposition 2.5 $injdimS = lFPD(S) = rFPD(S)$ est finie. Considérons un R-module M tel que $dhM = FPD(R) = \mu$. Alors il est clair, puisque S est libre sur R, que $S \otimes_R M$ est un S-module de dimension projective finie; on a en fait $dh_S(S \otimes_R M) \leq dh_R M$ en prenant une résolution R projective de M et en la tensorisant par le R-module S. D'autre part, d'après le Théorème 9.32 de [17], on a: $dh_R(S \otimes_R M) \leq dh_S(S \otimes_R M) + dh_R S = dh_S(S \otimes_R M)$. On va montrer que $dh_R(S \otimes_R M) = dh_R M$ en utilisant le raisonnement du Lemme 3 de [12]. Puisque S est en particulier fidèlement plat comme R-module à droite, l'application $M \to S \otimes_R M$ défine par $m \longmapsto 1 \otimes m$ est un R-monomorphisme. On a donc une suite exacte de R-modules:

$$(*) \qquad 0 \to M \to S \otimes_R M \to C \to 0\,.$$

D'après le choix de M, i.e. $dh_R M = FPD(R)$, on a, puisque d'après la suite exacte $(*)$ $dh_R C$ est finie, l'inégalité $dh_R C \leq dh_R M$. Si l'on avait $dh_R(S \otimes_R M) < dh_R M = \mu$ on aurait $Ext^i_R(S \otimes_R M, -) = 0$ pour $i \geq \mu$. Considérons un R-module N. La suite exacte des Ext donne:

$$0 = Ext^\mu_R(S \otimes_R M, N) \to Ext^\mu_R(M, N) \to Ext^{\mu+1}_R(C, N) = 0\,,$$

d'où $Ext^\mu_R(M, -) = 0$ ce qui implique $dh_R M < \mu$ qui est la contradiction cherchée. On a donc: $dh_R M = dh_R(S \otimes_R M) \leq dh_S(S \otimes_R M) \leq FPD(S)$. Pour tout autre R-module M' on a $dh_R M' \leq dh_R M \leq FPD(S)$. Donc

$$FPD(R) \leq FPD(S)$$

et on obtient $injdimR \leq injdimS$. Enfin d'après la Proposition 2.5 et le Théorème 2.3, on a $injdimS \leq injdimGrS = injdimR + dim_k\mathfrak{G}$, d'où le résultat. $\square$

Remarques. Dans le cas où $\sigma = 0$, il est démontré dans [11] que $injdimS$ est finie si et seulement si $injdimR$ est finie; ceci résulte du fait qu'alors R est muni d'une structure naturelle de S-module avec $dh_S R$ finie, ce qui n'a pas lieu lorsque σ est non nul; en effet (cf. 1.7.14 de [15]) l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_s(k)$ est de la forme $k *_\sigma \mathfrak{G}$ où $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie abélienne de dimension $2s$ et cependant k n'est pas un $\mathbb{A}_s(k)$-module. Il ne doit pas être vrai que $injdimS$ finie entraine $injdimR$ finie lorsque σ n'est pas nul. En tout cas ceci n'est pas vrai pour la dimension homologique globale même dans le cas où $\sigma = 0$, comme il résulte d'un exemple de [7].

3.3 Soit T une partie multiplicative de R. On démontre comme dans le Lemme 14.2.7 de [15] que T est une partie de Ore à droite et à gauche dans S. Comme S est noethérien T est un ensemble de dénominateurs à droite et à gauche dans S et on peut former l'anneau $T^{-1}S$. D'autre part $\theta : \mathfrak{G} \to Der_k(R)$ se prolonge en θ_T de $\mathfrak{G}$ dans $Der_k(T^{-1}R)$ par la formule $\theta_T(x)(r/t) = \{\theta(x)(r)t - r\theta(x)(t)\}/t^2$ pour $x \in G$ et $r/t \in T^{-1}R$. Enfin on définit $\sigma_T : \mathfrak{G} \to T^{-1}R$ comme la composée de σ et de i_T. On peut alors construire $T^{-1}R *_{\sigma_T} \mathfrak{G}$. Reprenons les notations de la Proposition 3.1. Soit h l'application composée: $R \xrightarrow{i_T} T^{-1}R \hookrightarrow T^{-1}R *_{\sigma_T} \mathfrak{G}$ et soit $\psi : \mathfrak{G} \hookrightarrow T^{-1}R *_{\sigma_T} \mathfrak{G}$ l'application naturelle. Alors $h_{|R} = i_T$. On vérifie que $h(\theta(x)r) = \theta_T(x)(r/1) = \psi(x)(r/1) - (r/1)\psi(x)$ et $\psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x) = \psi([x,y]) + \sigma_T(x,y)$, pour $x, y \in \mathfrak{G}$ et $r \in R$. D'après la Proposition 2.1, il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\tilde{\varphi} : R *_\sigma \mathfrak{G} \to T^{-1}R *_{\sigma_T} \mathfrak{G}$ avec $\tilde{\varphi}_{|R} = i_T$ et $\tilde{\varphi}_{|\mathfrak{G}} = \psi$. Comme les images par $\tilde{\varphi}$ des éléments de T sont inversibles dans $T^{-1}R * \sigma_T \mathfrak{G}$, $\tilde{\varphi}$ se prolonge en un homomorphisme d'algèbres $\tilde{\varphi}_T : T^{-1}(R *_\sigma \mathfrak{G}) \to T^{-1}R * \sigma_T \mathfrak{G}$.

Proposition

L'application $\tilde{\varphi}_T$ est un isomorphisme.

Preuve. L'application $\tilde{\varphi}_T$ est surjective car si $z = \sum_z (r_\alpha/t_\alpha) g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n} \in T^{-1}R *_{\sigma_T} \mathfrak{G}$, où $r_\alpha \in R, t_\alpha \in T, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \{g_1, \dots, g_n\}$ est une base de $\mathfrak{G}$, on choisit un dénominateur commun t aux r_α/t_α; d'où $\tilde{\varphi}_T\big(t^{-1} \sum r'_\alpha g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n}\big) = z$. D'autre part $\tilde{\varphi}_T$ est injective car si $\tilde{\varphi}_T\big(\sum r_\alpha g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n}/1\big) = 0$ alors $\sum (r_\alpha/1) g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n} = 0$. Comme $T^{-1}R * \mathfrak{G}$ est libre sur $T^{-1}R$, on a $r_\alpha/1 = 0$ pour α et il existe $t \in T$ tel que $tr_\alpha = 0$ car R est commutatif; donc $\sum r_\alpha g_1^{\alpha_1} \dots g_n^{\alpha_n}/1 = 0$. $\square$

Notation. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R, on posera si T est le complémentaire de $\mathfrak{p}$ dans $R, S(\mathfrak{p}) = T^{-1}R *_{\sigma_T} \mathfrak{G}$.

On démontre comme dans le cas où $\sigma = 0$ (cf. [11]):

Théorème

Soient R une k-algèbre commutative noethérienne de dimension injective finie, $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. Avec les notations précédentes on a:

$$injdimS = Sup_{\mathfrak{p}\in Spec(R)} injdimS(\mathfrak{p}) = Sup_{\mathfrak{m}\in Max(R)} injdimS(\mathfrak{m}).$$

Références

1. M. Auslander, On the dimension of modules and algebras III, *Nagoya Math. J.* **9** (1955), 67–77.
2. S. M. Bhatwadekar, On the global dimension of some filtered algebras, *J. London Math. Soc.* **13** (1976), 239–248.
3. N. Bourbaki, *Algèbre Homologique,* Algèbre, Chapitre 10, Masson, 1980.
4. J. E. Björk, *Rings of Differential Operators,* North Holland, 1979.
5. J. E. Björk, *Analytic D-modules and Applications,* Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, **247** 1992.
6. H. Cartan et S Eilenberg, *Homological Algebra,* Princeton University Press, 1956.
7. K. R. Goodearl, Global dimension of differential operator rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45** (1974), 315–322.
8. K. R. Goodearl, Global dimension of differential operator rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **209** (1975), 65–85.
9. E. Kirkman, J. Kuzmanovich et L. Small, Finistic dimensions of noetherian rings, *J. of Algebra* **147** (1992), 350–364.
10. Th. Levasseur, Some properties of non-commutative regular graded rings, *Glasgow Math. J.* **34** (1992), 277–300.
11. Th. Levasseur, Anneaux d'opérateurs differentials, pp. 157–173 in Séminaire P. Dubreil et M. P. Malliavin 1980, *LN in Math.* **867** Springer Verlag, 1981.
12. J. C. McConnell, On the global dimension of some rings, *Math. Z.* **153** (1977), 235–254.
13. J. C. McConnell, Representations of solvable Lie algebras II: Twisted group rings, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup* **8** (1975), 157–178.
14. J. C. McConnell, The global dimension of rings of differential operators, pp. 189–197 in Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil 1976–77, *LN in Math.* **641** Springer Verlag.
15. J. C. McConnell et J. C. Robson, *Non commutative noetherian rings,* Wiley Interscience Publication 1987.
16. M. Raynaud et L. Gruson, Critère de platitude et de projectivité, *Invent. Math.* **13** (1971), 1–89.
17. J. Rotman, *An introduction to homological algebra,* Academic Press, New-York, 1979.
18. A. Zaks, Injective dimension of semi-primary rings, *J. of Algebra* **13** (1969), 73–86.