Collect. Math. **45**, 1 (1994), 85–99

Algèbres de Bass et extensions de Ore itérées

Marie-Paule Malliavin

Université Pierre et Marie Curie 4, Place Jussieu 75252, Paris, France

Received December 20, 1993

Abstract

We show that some iterated Ore extensions have the same behaviour with respect to injective resolutions as Gorenstein commutative rings.

Introduction

Quant à la propriété de leur résolution injective minimale les algèbres de Weyl ou les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie résolubles de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle possèdent des propriétés proches de celles vérifiées par les algèbres Gorenstein commutatives. Nous montrons qu'il en est de même pour certaines extensions de Ore itérées de ces algèbres.

Dans le premier et le second paragraphe nous rappelons les notions d'Auslander Gorenstein et la condition de Cohen-Macaulay ainsi que les propriétés que nous entendrons par algèbre de Bass sur un corps. Dans le quatrième paragraphe, après avoir rappelé la définition de produit croisé généralisé, nous démontrons que si k est un corps de caractéristique nulle, si A est une algèbre de Bass vérifiant certaines conditions et si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie alors $A * \mathfrak{G}$ est aussi une algèbre de Bass.

1. Préliminaires

1.1. Soit B un anneau. Sauf mention du contraire tous les B-modules sont des modules à gauche. On notera $\underline{\mathrm{Mod}}_f B$ la catégorie des modules de type fini. On notera ${}_B M$ ou M_B pour indiquer que M est un B-module à gauche ou à droite; cette notation sera surtout utilisée dans le cas où M est un B-bimodule.

L'anneau B est dit noetherien s'il est noetherien à gauche et à droite sauf mention du contraire tous les anneaux qui interviendront seront noetheriens.

1.2. Soit M un B-module, on notera $dh_B M$ la dimension homologique de M et par $\mathrm{inj}\dim_B M$ la dimension injective de M. On dira que B est de dimension homologique globale finie si la dimension homologique de ${}_B B$ et celle de B_B sont finies; elles sont alors égales car B est noetherien [1]; on notera alors $gl\dim B$ la dimension homologique globale de B. On dira que B est de dimension injective finie si les modules ${}_B B$ et B_B sont de dimension injective finie; elles sont alors égales [23].

1.3. Si M est un B-module, on appelle *grade* de M et on note $j_B(M)$ (ou $j(M)$ si aucune confusion ne peut en résulter) le nombre entier naturel ou $+\infty$ défini par:

$$j_B(M) = \mathrm{Inf}\left\{i,\ \mathrm{Ext}^i_B(M,\, B) \neq 0\right\}.$$

On a évidemment $j_B((0)) = +\infty$.

DÉFINITION 1.4. (a) Un B-module M satisfait *la condition d'Auslander* si por tout $q \geq 0$ on a $j_B(N) \geq q$ pour tout sous-B-module N de $\mathrm{Ext}^q_B(M, B)$.

(b) L'anneau B est dit *Auslander-Gorenstein* (resp. *Auslander-régulier*) si $inj\dim B < \infty$ (resp. $gl\dim B < \infty$) et chaque $M \in \underline{\mathrm{Mod}}_f B$ satisfait la condition d'Auslander.

La condition d'Auslander-Gorenstein (resp. Auslander-régulier) est symétrique [10].

H. Bass [2] a démontré que tout anneau noetherien commutatif de dimension injective finie est Auslander-Gorenstein. Cependant pour les anneaux non commutatifs la condition d'Auslander n'est pas une conséquence directe de la finitude de la dimension injective ni même de celle de la dimension homologique globale. Un exemple en est donné dans la thèse de I. Reiten [19]: il s'agit, k étant un corps, de l'anneau $B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ V & 0 \end{bmatrix}$ où V est un k-espace vectoriel de dimension 2; alors $gl\dim B = 1$ mais B n'est pas Auslander-régulier.

1.5. On terminera ce paragraphe en donnant une forme simplifiée d'un théorème de J.E. Björk [5], forme dont nous nous servirons plus loin et qui est démontré dans l'article cité en 3.1, 3.4 et 3.9:

Théorème

Soit B *un anneau noetherien positivement filtré:* $B = \{B(i)_{i\in\mathbb{N}}\}$ *et* $M \in \underline{\mathrm{Mod}}_f(B)$. *Si le gradué associé* $Gr\,B$ *est noetherien et Auslander-Gorenstein, alors* $j_B(M) = j_{Gr B}(Gr\,M)$, *où* $Gr\,M$ *est le gradué associé à* M *à l'aide d'un système fini de générateurs et de la filtration de* B. *De plus si* $Gr\,B$ *est Auslander-régulier, alors* B *est Auslander-régulier.*

2. La condition de Cohen-Macaulay

2.1. Rappelons d'abord [14] que si B est une algèbre sur un corps k, on note $GK\dim B$ la dimension de Gelfand-Kirillov de B et si M est un B-module on note $GK\dim_B M$ sa dimension de Gelfand-Kirillov. On a en particulier le théorème suivant [14].

Théorème

Supposons que B *est positivement filtrée par une filtration* $\{B(i)\}_{i\geq 0}$, *croissante et exhaustive, telle que* $\dim_k B(i) < \infty$ *pour tout* i *de sorte que la* k*-algèbre graduée associée* $Gr\,B$ *soit de type fini. Soient* $M \in \underline{\mathrm{Mod}}_f$, $\Gamma = \{M(i)\}_i$ *une filtration de* M *telle que* $\dim_k M(i) < \infty$ *pour tout i et* $Gr\,M$ *soit un* $Gr\,B$*-module de type fini. Alors* $GK - \dim_B M = GK - \dim_{GrB}\ Gr\,M$.

2.2. Lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse de finitude dans le théorème 2.1 on a seulement l'inégalité $GK - \dim_{GrB}\ Gr\,M \leq GK - \dim_B\ M$. Cependant dans certains cas J.C. McConnell et J.T. Stafford [18] sont arrivés à prouver l'égalité sans faire ces hypothèses de finitude. Nous utiliserons un de leurs résultats sous la forme du théorème suivant. Pour cela rappelons [17] la notation suivante sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 3: si B est une k-algèbre associative et $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie on note $B * \mathfrak{G}$ un produit croisé de B par $U(\mathfrak{G})$, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$.

Théorème

Si $B = u(\mathfrak{h})/I$ *où est* $\mathfrak{h}$ *une* k*-algèbre de Lie de dimension finite et* $S = B * \mathfrak{G}$ *où la* k*-algèbre de Lie* $\mathfrak{G}$ *est de dimension* $n \in \mathbb{N}$, *si on filtre* S *par la filtration de Poincaré-Birkhoff-Witt de* $U(\mathfrak{G})$, *alors le gradué associé à* S *est l'anneau des polynômes* $B[X_1, \ldots, X_n]$ *et si* M *est un* S*-module de type fini, on a* $GK - \dim_S M = GK - \dim_{GrS} Gr\,M$.

2.3. A partir de maintenant, tous les anneaux sont des algèbres sur un corps k.
La définition suivante est dûe à T. Levasseur [13].

DÉFINITION. Soit B une k-algèbre noetherienne avec $GK - \dim B = \omega \in \mathbb{N}$. On dit que B satisfait *la condition de Cohen-Macaulay* (on dira la condition CM pour abréger) si l'on a pour tout $M \in \underline{\mathrm{Mod}}_f B,\ M \neq (0),\ GK - \dim_B M + j_B(M) = \omega$.

Remarques :

1. La condition CM entraîne que $GK - \dim M \in \mathbb{N}$ pour tout module M.
2. Si B est une k-algèbre commutative de type fini alors de dimension de Gelfand-Kirillov de B coïncide avec sa dimension de Krull et B satisfait la condition CM si et seulement si B est un anneau de Cohen-Macaulay équidimensionnel.
3. Si la caractéristique du corps k est nulle, l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n(k)$ est Auslander-régulière de dimension homologique globale n et satisfait la condition CM avec $\omega = 2n$ [4].

2.4. On dira qu'une k-algèbre B est *presque commutative* si c'est une image homomorphe de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension finie; elle est positivement filtrée et son gradué associé est commutatife.

Proposition

Si B est une k-algèbre presque commutative dont le gradué associé est Gorenstein équidimensionnel, l'anneau de polynômes $B\big[X_1, \ldots, X_n\big]$ est Auslander-Gorenstein et vérifie la condition CM.

Preuve. Il existe une k-algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{h}$ et un idéal I de $U(\mathfrak{h})$ tels que $B = U(\mathfrak{h})/_I$. Il est clair que $B\big[X_1, \ldots, X_n\big] = U(\mathfrak{k})/IU(\mathfrak{k})$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \oplus kX_1 \oplus \ldots, \oplus kX_n$ et $Gr\big(B[X_1, \ldots, X_n]\big) = (Gr\, B)\big[X_1, \ldots, X_n\big]$. On peut en raisonnant par récurrence sur n se ramener au cas où $n = 1$. Il est clair que $Gr\, B[X]$ est Gorenstein équidimensionnel. D'après le théorème 1.5 $B[X]$ est Auslander-Gorenstein et si M est un $B[X]$-module de type fini on a $j_{GrB[X]}(GrM) = j_{B[X]}(M)$. D'après 2.1 on a $GK - \dim_{B[X]} M = GK - \dim_{GrB[X]} GrM$; en particulier $GK - \dim GrB[X] = GK - \dim B[X]$. On a donc facilement le résultat puisque

$$j_{GrB[X]}(GrM) + GK - \dim_{GrB[X]} GrM = GK - \dim\, GrB[X]\ .\ \square$$

Corollaire 1

Si la caractéristique du corps k est nulle et si $\mathbb{A}_m(k)$ est la m-ième algèbre de Weyl, alors l'algèbre de polynômes $\mathbb{A}_m(k)\big[X_1, \ldots, X_n\big]$ est Auslander-régulière et vérifie la condition CM.

Preuve. Ceci résulte immédiatement de la proposition précédente et du fait que $\mathbb{A}_m(k)$ est presque commutative. □

Corollaire 2

Si B est une k-algèbre presque commutative dont le gradué associé est Gorenstein équidimensionnel, $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie et $S = B * \mathfrak{G}$, alors S est Auslander-Gorenstein et vérifie la condition CM.

Preuve. Le gradué associé à S pour la filtration de Poincaré-Birkhoff-Witt de $U(\mathfrak{G})$ est l'anneau de polynômes $B\big[X_1, \dots, X_n\big]$. Donc par le théorème 1.5, S est Auslander-Gorenstein. De plus si M est un S-module de type fini on a, toujours par le théorème 1.5, $j_{GrS}(GrM) = j_S(M)$ et, d'après le théorème 2.2, on a $GK - \dim_{GrS}(GrM) = GK - \dim_S(M)$. D'où le résultat. □

Corollaire 3

Si A est une k-algèbre commutative, de type fini, Gorenstein équidimensionnelle et $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie, alors $A * \mathfrak{G}$ est Auslander–Gorenstein et vérifie la condition CM.

Preuve. La preuve est la même que celle du corollaire précédent car le gradué associé à $A * \mathfrak{G}$ est commutatif Gorenstein équidimensionnel. □

3. Algèbres de Bass

3.1. Dans la suite on considère des idéaux bilatères P de B et les bimodules correspondants $M = B/P$. Pour le calcul $\mathrm{Ext}^i_B(M, B)$ on utilisera la structure de B-module à gauche sur M et on mettra sur $\mathrm{Ext}^i_B(M, B)$ la structure de B/P-module à gauche provenant de $M_{B/P}$.

Définition. Soient B un anneau noetherien et P un idéal complétement premier de B. On notera $\mu_i(P, B)$ et on appellera *i-ème invariant de Bass de B* la dimension, sur le corps gauche $Fr(B/P)$ des fractions de B/P, de l'espace vectoriel

$$Fr(B/P) \otimes_{B/P} \mathrm{Ext}^i_B(B/P, B)\,.$$

Le théorème suivant se démontre comme le théorème 3.4 de [16].

Théorème

Soient B un anneau Auslander-Gorenstein vérifiant la condition CM, P un idéal complétement premier de B, d le grade du B-module à gauche B/P. Alors $\mu_d(P, B) \neq 0$ et $\mu_i(P, B) = 0$ si $i \neq d$.

Ce théorème s'applique à tous les idéaux premiers de la k-algèbre des coordonnées des matrices quantiques $n \times n$ sur un corps k, notée $\mathcal{O}_q\big(\mathbb{M}_n(k)\big)$, si q n'est pas une racine de l'unite. En effet il est démontré dans [11] que tout idéal premier de $\mathcal{O}_q\big(\mathbb{M}_n(k)\big)$ est complétement premier et il est démontré dans [12] que $\mathcal{O}_q\big(\mathbb{M}_n(k)\big)$ est Auslander-régulier et vérifie la condition CM. Les mêmes références montrent que l' algèbre quantique des coordonnées du groupe spécial linéaire a tous ses idéaux premiers complétement premiers, est Auslander-Gorenstein et vérifie la condition CM.

DÉFINITION 3.2. On appellera *algèbre de Bass* toute k-algèbre de type fini A qui est Auslander-Gorenstein, vérifie la condition CM, dont tout idéal premier est complétement premier et tel que $\mu_d(P, A) = 1$ si le grade du A-module A/P est d.

EXEMPLES: Sont des algèbres de Bass, les algèbres commutatives Gorenstein de type fini équidimensionnelles, les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie résolubles de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle, les algèbres de Weyl sur un corps de caractéristique nulle. On verra au paragraphe 4, d'autres exemples.

4. Produits croisés et extensions de Ore itérées

4.1. Soient B une algèbre sur un corps k, $\mathrm{Der}_k B$ la k-algèbre de Lie des k-dérivations de B et $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie n. On suppose que $\mathfrak{G}$ opère par dérivations sur B via une application linéaire $\delta : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Der}_k B,\ X \longmapsto \delta(X) = \delta_X$. On se donne en outre une application $t : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \longrightarrow B$. En imposant certaines conditions sur t J.C. McConnell et J.C. Robson [17] construisent une k-algèbre associative $B * \mathfrak{G}$. En fait cette algèbre a été étudiée par W. Chin [9]. On définit l'espace vectoriel $B \underset{t}{*} \mathfrak{G}$ ou plus simplement $B * \mathfrak{G}$ comme étant $B \otimes_k U(\mathfrak{G})$ où $U(\mathfrak{G})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$. Notons $X \longmapsto \bar{X}$ l'application k-linéaire injective de $\mathfrak{G}$ dans $B \otimes_k U(\mathfrak{G})$. La multiplication de $B * \mathfrak{G}$ est définie par les relations:

$$\text{(i)} \qquad \bar{X}b - b\bar{X} = \delta_X(b)\,, \qquad b \in B\,,\ X \in \mathfrak{G}$$

$$\text{(ii)} \qquad [\bar{X}, \bar{Y}] = [\,\overline{X, Y}\,] + t(X, Y)\,, \quad X, Y \in \mathfrak{G}$$

et on impose à t de vérifier les conditions de sorte que cette multiplication soit bilinéaire et associative.

Remarques :

1. Si $\mathfrak{G}$ est de dimension 1, alors t est nulle en raison de (ii) et $B*\mathfrak{G}$ est l'extension de Ore $B[\Theta, \delta]$.
2. Si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une base de $\mathfrak{G}$ sur k, alors $B * \mathfrak{G}$ est un B-module libre à droite et à gauche de base la famille des monômes $\bar{X}_1^{\alpha_1}\bar{X}_2^{\alpha_2}\ldots\bar{X}_n^{\alpha_n}$ où les $\alpha_i \in \mathbb{N}$. De plus $B * \mathfrak{G}$ est muni d'une filtration croissante, appelée filtration standard, provenant de la filtration de Poincaré-Birkhoff-Witt de $U(\mathfrak{G})$; c'est la filtration
$$F_{-1} = (0) \subset F_0 = B \subset F_1 \subset \ldots \subset F_p \subset \ldots$$
où $F_p = \big\{ \sum b_\beta \bar{X}_1^{\beta_1}\bar{X}_2^{\beta_2}\ldots\bar{X}_n^{\beta_n}$ où $b_\beta \in B$ et $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n \leq p \big\}$.
3. Le gradué de $B * \mathfrak{G}$ associé à la filtration standard est $B[Y_1, \ldots, Y_n]$ qui est donc commutatif si B l'est, qui est noetherien si B l'est et qui est Auslander-Gorenstein (resp. Auslander-régulier) si B l'est.
4. Si de plus B est de la forme $U(\mathfrak{h})/I$ où $\mathfrak{h}$ est une k-algèbre de Lie de dimension finie alors par le théorème 2.2 on a pour tout $B * \mathfrak{G}$-module de type fini $GK -$ dim $M = GK - \dim_{Gr(B*\mathfrak{G})} Gr\, M$. Donc si B est Auslander-Gorenstein et vérifie la condition CM, alors il en est de même de $B*\mathfrak{G}$ d'après le corollaire 2.4 2. Remarquons que comme B est une k-algèbre affine a $GK - \dim\, B * \mathfrak{G} = GK - \dim\, B + n$ d'après 8.2.10 de [17].

4.2. On trouvera dans [9] et dans [3] une esquisse de la preuve de la proposition suivante.

Proposition

En conservant les notations de 4.1, soit $\mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{G}$, alors il existe une application $t' : \mathfrak{G}/\mathfrak{g} \times \mathfrak{G}/\mathfrak{g} \longrightarrow B \underset{t}{*} \mathfrak{G}$ telle que $B \underset{t}{*} \mathfrak{G}$ et $(B \underset{t}{*} \mathfrak{g}) \underset{t}{*} \mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ sont isomorphes.

Corollaire

Si l'algèbre $\mathfrak{G}$ est résoluble, alors $B * \mathfrak{G}$ est une extension de Ore itérée $B\big[\Theta_1, \delta_1\big]\ldots\big[\Theta_{i-1}, \delta_{i-1}\big]\big[\Theta_i, \delta_i\big]\ldots\big[\Theta_n, \delta_n\big]$ où δ_i est une dérivation de $B\big[\Theta_1, \delta_1\big]\ldots\big[\Theta_{i-1}, \delta_{i-1}\big]$.

4.3. Rappelons un lemme dû à G. Sigurdsson [21].

Lemme

Soit R une k-algèbre neotherienne à droite. Si chaque idéal premier de $R[X]$ est complétement premier, il en est de même de l'extension de Ore itérée $R\big[\Theta_1, \delta_1\big]\ldots\big[\Theta_m, \delta_m\big]$.

Corollaire

Soit B une k-algèbre telle que ou bien (a) B est commutative noetherienne, ou bien (b) $B = U(\mathfrak{h})/I$ ou $\mathfrak{h}$ est une k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie et la característique de k est nulle. Alors si $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie, tout idéal premier de $B * \mathfrak{G}$ est complétement premier.

Preuve. Clairement ceci résulte du lemme 4.3 et du corollaire 4.2. □

DÉFINITION 4.4. Un idéal Q de B est $\mathfrak{G}$-invariant si l'on a $\delta_X(Q) \subseteq Q$ pour tout $X \in \mathfrak{G}$. En particulier si $\mathfrak{G}$ est de dimension 1 et $\{X\}$ est une base de $\mathfrak{G}$, on posera $\delta = \delta_X$ et on dira que est δ-invariant.

On trouvera une démonstration des lemmes suivants en 14.2.4 de [15] et en 14.2.5 de [15].

Lemme 1

Posons $S = B * \mathfrak{G}$. Si Q est un idéal $\mathfrak{G}$-invariant de B alors QS est un idéal bilatère de S et les algèbres S/QS et $(B/Q) * \mathfrak{G}$ sont isomorphes.

Lemme 2

(1) Si Q est un idéal premier $\mathfrak{G}$-invariant de B, alors QS est un idéal premier de $S = B * \mathfrak{G}$.

(2) Si P est un idéal premier de S, alors $P \cap B$ est un idéal premier $\mathfrak{G}$-invariant de B.

4.5. Dans toute cette partie on supposera le corps k de caractéristique nulle et on notera A une k-algèbre de Bass (cf. Définition 3.2). On supposera de plus que A vérifie les trois conditions (i), (ii), (iii) suivantes;

(i) Tour idéal premier de $A[X]$ est complétement premier. Alors si $\mathfrak{G}$ est une k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie tout idéal premier $A * \mathfrak{G}$ est complétement premier (cf. Lemme 4.3. et Corollaire 4.2).

(ii) Si $\mathfrak{G}$ est une k-algèbre de Lie de dimension finie et M est un $A * \mathfrak{G}$-module de type fini on a, en posant $S = A * \mathfrak{G}$ et en filtrant S par la filtration standard (cf. 4.1, Remarque 2), $GK - \dim_S M = GK - \dim_{Gr\,S}\ Gr\,M$.

(iii) Toute algèbre de polynômes sur A, soit $A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, vérifie la condition CM.

On va montrer que si les conditions (i) à (iii) pour l'algèbre de Bass A sont vérifiées alors pour toute algèbre de Lie résoluble de dimension finie $\mathfrak{G}$, $A * \mathfrak{G}$ est aussi une algèbre de Bass.

Remarquons que les conditions (i) à (iii) sont vérifiées si A est une k-algèbre commutative de type fini Gorenstein équidimensionnelle et ceci sans hypothèse sur la caractéristique de k (cf. 2.4, Corollaire 3 et 2.2 Théorème). Elles sont aussi vérifiées si $A = U(\mathfrak{h})$ où $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension finie [15]. Elles sont aussi vérifiées si A est une algèbre de Weyl sur k (cf. Théorème 2.2 et Remarque 2.3 3).

Le théorème suivant se démontre de manière analogue à celui du théorème 4.17 de [15], lequel avait été retrouvé par K.A. Brown et T. Levasseur [16] en utilisant le fait que les cliques de $U(\mathfrak{h})$, pour $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension finie, sont localisables. Ici on ne fait pas d'hypothèse de condition de second niveau sur A ni sur $A * \mathfrak{G}$.

Théorème

Soient k un corps de caractéristique nulle, A une k-algèbre de Bass vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) et $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie. Soient P un idéal premier de $S = A * \mathfrak{G}$ et $d = j_S(S/P)$. Alors $\mu_d(P, S) = 1$ et S est une k-algèbre de Bass.

Remarquons qu'en raison de la condition CM on a $j_S\big(({}_S S/P)\big) = j_S\big((S/P)_S\big)$.

Pour démontrer le théorème précédent nous utiliserons les deux lemmes suivants dans lesquelles nous conservons les hypothèses faites dans le théorème.

Lemme 1

Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{G}$. Posons $R = A * \mathfrak{h}$ et $Q = P \cap R$. Alors on a

$$(1) \qquad j_R(R/Q) = j_S(S/P) \qquad si \quad P = QS$$

$$(2) \qquad j_R(R/Q) = j_S(S/P) - 1 \qquad si \quad P \underset{\neq}{\supset} QS\,.$$

Preuve. (1) On a par la Remarque 4.1 1) et la proposition 4.2, $S = R[\Theta, \delta]$. D'après le lemme 4.4.2 2) Q est un idéal (complétement) premier de R et QS est un idéal (complétement) premier de S. On a par la condition CM, $GK-\dim\ S/QS = GK-\dim\ S - j(S/QS)$. Or (cf. Lemme 4.4.1) $S/QS \simeq R/Q[\Theta,\, \delta]$. Donc

$$\begin{aligned} GK-\dim\ S/QS &= GK-\dim\ R/Q + 1 = GK-\dim\ R - j(R/Q) + 1 \\ &= GK-\dim\ S - j(S/QS)\,. \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $GK-\dim\ R + 1 = GK-\dim\ S$, l'égalité $j_S(S/QS) = j_R(R/Q)$: ceci démontre (1).

(2) Supposons $P \underset{\neq}{\supset} QS$. Comme QS est complétement premier, on a $GK - \dim(S/P) \leq GK - \dim(S/QS) - 1 < GK - \dim(S/QS)$. D'où d'après la condition CM, on a $GK - \dim S - j_S(S/P) < GK - \dim S - j_S(S/QS)$ et $j_S(S/QS) < j_S(S/P)$. Or R/Q est une sous-algèbre de S/P puisque $P \cap R = Q$; donc:

$$\begin{aligned} GK - \dim R - j_R(R/Q) &= GK - \dim(R/Q) \\ &\leq GK - \dim(S/P) = GK - \dim S - j_S(S/P) \end{aligned}$$

et puisque $GK - \dim S = 1 + GK - \dim R$ il en résulte que $j_R(R/Q) \geq j_S(S/P) - 1$. Mais d'après (1) on a $j_S(S/QS) = j_R(R/Q)$; il résulte de ce qui précède que $j_R(R/Q) < j_S(S/P)$. Des inégalités $j_S(S/P) - 1 \leq j_R(R/Q) < j_S(S/P)$, on déduit l'égalité $j_S(S/P) - 1 = j_R(R/Q)$ ce qui achève la démonstration de (2). $\square$

On conserve les hypothèses du Théorème 4.5 et les notations du Lemme 1 précédent et on posera $C = S/QS$. Pour $j \geq 0$ munissons $\operatorname{Ext}^j_S(C, S)$ de la structure de C-module à gauche provenant de la structure de R/Q-module à gauche provenant de la structure de C-module à droite sur C et munissons $\operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R)$ de la structure de R/Q-module à gauche provenant de la structure R/Q-module à droite sur R/Q. Avec ces conventions on a:

Lemme 2

(1) $\operatorname{Ext}^j_S(C, S) \simeq S \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R) \simeq C \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R)$

(2) Si $P \underset{\neq}{\supset} QS$ *on a* $Fr(S/P) \otimes_S \operatorname{Hom}_C\big(S/P, \operatorname{Ext}^d_S(C, S)\big) = 0$ *où* $Fr(S/P)$ *désigne le corps des fractions de* S/P *et* d *le grade du* S*-module* S/P.

Preuve. (1) L'anneau A étant noetherian, il en est de même de S. De plus S est un R-module libre à droite et à gauche. Donc $S \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R) \simeq \operatorname{Ext}^j_S\big(R/Q \otimes S,\ R \otimes_R S\big)$. Or $R \otimes_R S \simeq S$ et $R/Q \otimes_R S \simeq S/QS = C$. Donc $S \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R) \simeq \operatorname{Ext}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{S}}(C, S)$. On a aussi:

$$\begin{aligned} &S \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R) \simeq S \otimes_R \big(R/Q \otimes_{R/Q} \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R)\big) \\ &\simeq S \otimes_R \big(R/Q \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R)\big) \simeq \big(S \otimes_R R/Q\big) \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R) \\ &\simeq C \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R), \text{car il est clair que } QS = SQ \text{ car } Q \text{ et } \delta\text{-invariant; d'où (1)} \end{aligned}$$

(2) Posons $Y = \operatorname{Hom}_C\big(S/P, \operatorname{Ext}^d_S(C, S)\big)$ et $T = R/Q \setminus \{0\}$. Il est clair que T est un système de Ore à droite et à gauche de R/Q. D'après [17], 14.2.7, T est un système de Ore à droite et à gauche dans $R/Q[\Theta, \delta] = S/QS = C$. Appliquons le foncteur

$\mathrm{Hom}_C\big(-, \mathrm{Ext}^d_S(C,S)\big)$ à la suite exacte de C-modules à gauche $C \longrightarrow C/_{(P/QS)} = S/P \longrightarrow 0$; on obtient une injection de R/Q-modules à gauche:

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_C\big(C, \mathrm{Ext}^d_S(C,S)\big) \simeq \mathrm{Ext}^d_S(C,S) \simeq C \otimes_{R/Q} \mathrm{Ext}^d_R(R/Q,R)\big)$$

où le dernier isomorphisme provient du point (1). Il en résulte que l'on a

$$\begin{aligned}
&T^{-1}Y \subseteq T^{-1}\big(C \otimes_{R/Q} \mathrm{Ext}^d_R(R/Q,R)\big) \simeq Fr(R/Q) \otimes_{R/Q} \big(C \otimes_{R/Q} \mathrm{Ext}^d_R(R/Q,R)\big)\\
&\simeq T^{-1}C \otimes_{R/Q} \mathrm{Ext}^d_R(R/Q,R) = CT^{-1} \otimes_{R/Q} \mathrm{Ext}^d_R(R/Q,R)\\
&\simeq C \otimes_{R/Q} \big(Fr(R/Q) \otimes_{R/Q} \mathrm{Ext}^d_R(R/Q,R)\big)\,.
\end{aligned}$$

Mais $j_R(R/Q) = d-1$ et d'après le théorème 3.1, $\mu_d(Q,R) = 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{Ext}^{\mathrm{d}}_{\mathrm{R}}(\mathrm{R/Q,R}) = 0$. Donc $T^{-1}Y = (0)$. D'autre part Y est un S-module à droite de type fini pour la structure de S-module à droite provenant de celle de $\mathrm{Ext}^d_S(C,S)$. Donc Y est un $S/P-S$-bimodule de type fini à droite. Comme $T^{-1}Y = (0)$, il existe $s \in R\setminus Q$ tel que $sY = (s+Q)Y = 0$. Mais s n'est pas un élément de P, donc $P \subsetneq \mathrm{Ann}_S Y$. Par suite $Fr(S/P) \otimes_S Y = U^{-1}Y = (0)$ où l'on a posé $U = S/P\setminus\{0\}$. Ceci démontre (2). $\square$

Preuve du Théorème 4.5. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{G}$. Si cette dimension est nulle le théorème est vrai par l'hypothèse sur A. Supposons la dimension de $\mathfrak{G}$ supérieure ou égale à 1 et soit $\mathfrak{h}$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{G}$. Posons $R = A * \mathfrak{h}$, $Q = P \cap R$, $C = S/QS$ et $P' = P/QS$. D'après l'hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour R. On a $S = R[\Theta,\delta]$ où Θ est une indéterminée et δ est une dérivation de R. L'idéal Q est un idéal (complétement) premier de R et $\delta(Q) \subseteq Q$. Donc $QS = SQ$ est un idéal bilatère de S. Il est clair que $C = \frac{R}{Q}[\Theta,\delta]$. Donc C est intègre et P' est un idéal complétement premier de C.

Supposons d'abord que $P = QS$; donc $C = S/QS = S/P$ et d'après le lemme 1 précédent on a $j(R/Q) = d$; d'où par l'hypothèse de récurrence, $\mu_d(Q,R) = 1$. L'isomorphisme $\mathrm{Ext}^j_S(S/P,S) \simeq C \otimes_R \mathrm{Ext}^j_R(R/Q,R)$, qui provient du lemme 2 (1), entraîne l'isomorphisme:

$$(*) \qquad Fr(C) \otimes_C \mathrm{Ext}^j_S(S/P,S) \simeq Fr(C) \otimes_R \mathrm{Ext}^j_R(R/Q,R)$$

où $Fr(C)$ désigne le corps des fractions de $C = R/Q[\Theta,\delta]$. Comme $T = R/Q\setminus\{0\}$ est un système de Ore à droite et à gauche de C, $Fr(R/Q)$ est un sous-corps de $Fr(C)$ et $Fr(C)$ est isomorphe comme $Fr(C) - Fr(R/Q)$-bimodule à $Fr(C) \otimes_{Fr(R/Q)} Fr(R/Q)$. On a donc:

$$Fr(C) \otimes_R \mathrm{Ext}^j_R(R/Q,R) \simeq Fr(C) \otimes_{Fr(R/Q)} Fr(R/Q) \otimes_R \mathrm{Ext}^j_R(R/Q,R)$$

et

$$Fr(R/Q) \otimes_R \operatorname{Ext}^d_R(R/Q, R) \simeq Fr(R/Q)\,.$$

L'isomorphisme (*) entraîne

$$Fr(C) \otimes_C \operatorname{Ext}^d_S(S/P, S) \simeq Fr(C) \text{ où } C = S/P\,.$$

Donc on a démontré dans ce cas que $\mu_d(P, S) = 1$.

Supposons à présent que $P \underset{\neq}{\supset} QS$. Alors d'après le lemme 1 précédent on a $j(R/Q) = d - 1$. Considérons la suite spectrale ci-dessous associée aux modules C/P' (où $P' = P/QS$), S et C, où C/P' est considéré comme C-module à gauche et C comme $S - C$-bimodule:

$$E_2^{i,j} = \operatorname{Ext}^i_C\big(C/P',\ \operatorname{Ext}^j_S(C, S)\big) \Longrightarrow \mathbb{H}^{i+j} = \operatorname{Ext}^{i+j}_S(S/P, S)\,.$$

On a $E_2^{i,j} = 0$ dans chacun des trois cas suivants:

1) si $i + j = d$, $i \neq 1$ et $i \neq 0$ car alors ou bien $i < 0$ et alors $\operatorname{Ext}^i_C(-\,,\,-) = 0$ ou bien $i > 1$, donc $j < d-1$ et $\operatorname{Ext}^j_C(C, S) = S \otimes_R \operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R)$; alors $\operatorname{Ext}^j_R(R/Q, R) = 0$ pour $j < d - 1$ car $d - 1 = j_R(R/Q)$

2) si $i + j = d + 1$ et $i \geq 3$ car alors $j \leq d - 2 < j(R/Q)$

3) si $i + j = d - 1$ et $i \leq -2$.

D'après la Proposition 5.7 de [6] on a la suite exacte:

$$E_2^{1,d-1} \longrightarrow \mathbb{H}^d \longrightarrow E_2^{0,d-1+1} = E_2^{0,d}\,.$$

Posons

$$X = E_2^{1,d-1} = \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{C}}\big(S/P, C \otimes_R \operatorname{Ext}^{d-1}_R(R/Q, R)\big)$$

et

$$Y = E_2^{0,d} = \operatorname{Hom}_{\mathrm{C}}\big(S/P, \operatorname{Ext}^d_S(C/S)\big).$$

On a donc la suite exacte de S/P-module à gauche:

$$(**) \qquad X \longrightarrow \operatorname{Ext}^d_S(S/P, S) \longrightarrow Y.$$

D'après le lemme 2 (2), on a $Fr(S/P) \otimes_S Y = (0)$. On déduit alors de (**) la suite exacte de $Fr(S/P)$-espaces vectoriels à gauche:

$$Fr(S/P) \otimes_S X \xrightarrow{\pi} Fr(S/P) \otimes_S \operatorname{Ext}^d_S(S/P, S) \longrightarrow 0\,.$$

Nous allons montrer que $Fr(S/P) \otimes_S X \simeq Fr(S/P)$. Il en résultera, puisque d'après le théorème 3.1 $\mu_d(P,S) \neq 0$, que π est une application injective; d'où l'on déduira l'isomorphisme $Fr(S/P) \simeq Fr(S/P) \otimes_S \operatorname{Ext}^d(S/P,S)$ et alors $\mu_d(P,S) = 1$.

Posons $T = R/Q \backslash \{0\}$ et $L = T^{-1}(R/Q) = \mathrm{Fr}$ (R/Q). Alors d'après le lemme 4.4 1) et 14.2.7 de [17] on a:

$$\begin{aligned} &Fr(R/Q) \otimes_{R/Q} C = T^{-1}C = T^{-1}(S/QS) \\ &= T^{-1}\big(R/Q[\Theta,\delta]\big) = T^{-1}(R/Q)[\Theta,\delta] = L[\Theta,\delta]\,. \end{aligned}$$

Posons

$$Z = C \otimes_R \operatorname{Ext}^{d-1}(R/Q,R) = C \otimes_{R/Q} \operatorname{Ext}_R^{d-1}(R/Q,R)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} &L[\Theta,\delta] \otimes_C X = L[\Theta,\delta] \otimes_C \operatorname{Ext}^1_C(S/P,Z) \\ &= \big(Fr(R/Q) \otimes_{R/Q} C\big) \otimes_C \operatorname{Ext}^1_C(S/P,Z) = \big(Fr(R/Q) \otimes_{R/Q}\big) \otimes_{R/Q} \operatorname{Ext}^1_C(S/P,Z) \\ &= T^{-1}\operatorname{Ext}^1_C(S/P,Z) \simeq \operatorname{Ext}^1_{T^{-1}C}\big(T^{-1}(S/P), T^{-1}Z\big) \quad \text{où} \quad T = R/Q \setminus \{0\} \end{aligned}$$

est un système de Ore dans C et $T^{-1}C = L[\Theta,\delta]$. On a: $T^{-1}Z = T^{-1}C \otimes_{T^{-1}(R/Q)} T^{-1}\operatorname{Ext}_R^{d-1}(R/Q,R) = L[\Theta,\delta] \otimes_L L$ car $T^{-1}\operatorname{Ext}_R^{d-1}(R/Q,R) \simeq Fr(R/Q) \otimes_R \operatorname{Ext}_R^{d-1}(R/Q,R) \simeq Fr(R/Q)$ ceci d'après l'hypothèse de récurrence. On a donc $T^{-1}Z = L[\Theta,\delta]$, d'où, il résulte que $L[\Theta,\delta] \otimes_C X = \operatorname{Ext}^1_{L[\Theta,\delta]}(T^{-1}(S/P), L[\Theta,\delta])$. Or on a $S/P \simeq C/P'$ où $P' = P/QS$. Donc $T^{-1}(S/P) \simeq T^{-1}(C/P') = T^{-1}(C/P' \otimes_C C) = C/P' \otimes_C T^{-1}C = T^{-1}C/P'T^{-1}C$. Il en résulte que $L[\Theta,\delta] \otimes_C X = \operatorname{Ext}^1_{L[\Theta,\delta]}\big(T^{-1}C/P'T^{-1}C,\, L[\Theta,\delta]\big)$. Mais $Fr(S/P) \otimes_C X = Fr(S/P) \otimes_{L[\Theta,\delta]} \big(L[\Theta,\delta] \otimes_C X\big)$ et $Fr(S/P) \otimes_{S/P} X = Fr(S/P) \otimes_{C/P'} X = Fr(S/P) \otimes_C X$. Ainsi $Fr(S/P) \otimes_S X = Fr(S/P) \otimes_{L[\Theta,\delta]} \operatorname{Ext}^1_{L[\Theta,\delta]}\big(T^{-1}C/PT^{-1}C, L[\Theta,\delta]\big)$ et $Fr(S/P) = Fr\big(T^{-1}C\big)$.

L'anneau $L[\Theta,\delta]$ est une extension de Ore du corps gauche L. C'est est un anneau principal à droite et à gauche; $P'L[\Theta,\delta]$ est un idéal bilatère complètement premier dans $L[\Theta,\delta]$. Soit $h \in L[\Theta,\delta]$ un générateur à gauche de $P'T^{-1}C = P'L[\Theta,\delta]$. On peut supposer h unitaire, donc d'après la Proposition 13 de [8] h est un élément normalisant de $L[\Theta,\delta]$, c'est-à-dire que l'on a $L[\Theta,\delta]h = hL[\Theta,\delta]$. D'où, d'après le lemme 2.1 et le corollaire du théorème 2.1 de [20], $L[\Theta,\delta]h$ est localisable. D'autre part l'idéal $L[\Theta,\delta]h$ est maximal car si l'on avait $L[\Theta,\delta]h \underset{\neq}{\subset} L[\Theta,\delta]h_1$ alors $h = uh_1$ où $u \in L[\Theta,\delta]$; donc $uh_1 \in L[\Theta,\delta]h$ et $u \in L[\Theta,\delta]$ avec $u \notin L[\Theta,\delta]$; or $L[\Theta,\delta]h$ est un idéal complétement premier de $L[\Theta,\delta]$ donc $h_1 \in L[\Theta,\delta]h$ et $L[\Theta,\delta]h_1 = L[\Theta,\delta]h$ d'où la contradiction et $L[\Theta,\delta]h$ est maximal.

Soit V le localisé de $L[\Theta,\delta]$ en $L[\Theta,\delta]h$. L'idéal maximal de V est $hV = Vh$. Posons $U = L[\Theta,\delta] \setminus L[\Theta,\delta]h$. Le corps résiduel de V est $V/hV = U^{-1}L[\Theta,\delta]/hU^{-1}L[\Theta,\delta] = Fr\big(L[\Theta,\delta]/hL[\Theta,\delta]\big)$. Donc

$$\begin{aligned}&Fr\big(L[\Theta,\delta]/hL[\Theta,\delta]\big) \otimes_{L[\Theta,\delta]} \mathrm{Ext}^1_{L[\Theta,\delta]}\big(L[\Theta,\delta]/hL[\Theta,\delta], L[\Theta,\delta]\big)\\ &= U^{-1}\mathrm{Ext}^1_{L[\Theta,\delta]}\big(L[\Theta,\delta]/hL[\Theta,\delta], L[\Theta,\delta]\big)\\ &= \mathrm{Ext}^1_{U^{-1}L[\Theta,\delta]}\big(U^{-1}L[\Theta,\delta]/hU^{-1}L[\Theta,\delta], U^{-1}L[\Theta,\delta]\big)\\ &= \mathrm{Ext}^1_V(V/hV, V)\,.\end{aligned}$$

Mais l'anneau V est noetherien local intègre; son idéal maximal est $hV = Vh$; d'après le lemme 11 du chapitre 6 de [18], V est un anneau de valuation discrète de rang 1. Si F désigne le corps des fractions de V alors F est un V-module injectif et c'est l'enveloppe injective du V module V. Donc $\mathrm{Ext}^1_V\big(V/hV, F\big) = 0$. Or on a: $\mathrm{Hom}_V\big(V/hV, V\big) = 0$ et $\mathrm{Hom}_V\big(V/hV, F\big) = 0$. Par suite la longue suite exacte des Ext appliquée à la suite exacte de V-modules: $0 \longrightarrow V \longrightarrow F \longrightarrow F/V \longrightarrow 0$, donne l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_V\big(V/hV, V\big) \simeq \mathrm{Hom}_V\big(V/hV, F/V\big)$. Le V-module F/V est l'enveloppe injective de V/hV; donc F/V est une extension essentielle du V-module V/hV qui est un corps. Donc $\mathrm{Hom}_V\big(V/hV, F/V\big)$ est un V/hV-espace vectoriel de dimension un. Il en résulte que $\mathrm{Hom}^1_V\big(V/hV, V\big) \simeq V/hV$. On a donc

$$\mathrm{Ext}^1_V\big(V/hV, V\big) \simeq V/hV = Fr\big(L[\Theta,\delta]/hL[\Theta,\delta]\big) = Fr(S/P)\,.$$

D'où $Fr(S/P) \otimes_S X \simeq Fr(S/P)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

References

1. M. Auslander, On the dimension of modules and algebras III, *Nogoya Math. J.* **9** (1955), 67–77.
2. H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Mat. Z.* **82** (1963), 8–28.
3. A.D. Bell, Localization and ideal theory in iterated differential operator rings, *J. of Algebra* **106** (1987), 376–401.
4. J.E. Björk, *Rings of differential operators,* North–Holland 1970.
5. J.E. Björk, The Auslander condition on noetherian rings, Séminaire Dubreil–Malliavin, 1987–1988, *L.N. in Math.* **1404** Springer Verlag 1989, 137–173.
6. K.A. Brown et T. Levasseur, Cohomology over enveloping algebras, *Math. Z.* **189** (1985), 393–413.
7. H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra,* Princeton University Press 1956.
8. G. Cauchon, Idéaux bilatères et centre des anneaux de polynômes de Ore sur les anneaux quasi–simples, Séminaire Dubreil–Malliavin, 1977–1978, *L. N. in Math.* **740**, Springer Verlag, 397–407.

9. W. Chin, Prime ideals in differential operator rings and crossed products of infinite groups, *J. of Algebra,* **106** (1987), 78–104.
10. R.M. Fossum, P.A. Griffiths et I. Reiten, Trivial extensions of abelian categories, *L. N. in Math.* **456**, Springer Verlag 1975.
11. K.R. Goodearl et E.S. Letzter, Prime factor algebras of the coordinate ring of quantum matrices, à paraître.
12. T. Levasseur et J.T. Stafford, The quantum coordinate ring of the special linear group, *J. of Pure and Applied Algebra* **86** (1993), 181–186.
13. T. Levasseur, Some properties of non commutative regular graded rings, *Glasgow J. Math.*, à paraître.
14. G. Krause et T.H. Lenagan, Growth of Algebras and Gelfand–Kirillov Dimension, *Research Notes in Math.* **116** Pitman, London 1985.
15. M.-P. Malliavin, Modules sans torsion et modules injectifs sur les algèbres de Lie résolubles, *J. of Algebra,* **83** (1983), 126–157.
16. M.-P. Malliavin, Cohomologie locale de certains anneaux Auslander–Gorenstein, *Publications Matemàtiques,* **36** (1992), 725–742.
17. J.C. McConnell et J.C. Robson, *Non commutative noetherian rings,* Wilery series in Pure and Applied Math., 1987.
18. J.C. McConnell et J.T. Stafford, Gelfand–Kirillov dimension and associated graded modules, *J. of Algebras* **125** (1989), 197–214.
19. I. Reiten, *Trivial extensions and Gorenstein rings,* Thesis, Chicago University 1971.
20. G. Renault, *Algèbre non commutative,* Gauthier Villars 1975.
21. G. Sigurdsson, Differential operator rings whose prome factors have bounded Goldic dimension, *Arch. der Math.* **42** (1984), 348–353.
22. P.F. Smith, Localization and the A.R. property, *Proc. London Math. Soc.* **22** (3) (1971), 39–68.
23. A. Zaks, Injective dimension of semi–primary rings, *J. of Algebra* **13** (1969), 73–86.