Collectanea Mathematica (electronic version): http://www.mat.ub.es/CM

Collect. Math. **45**, 1 (1994), 1–11

Conjuntos estrictamente aproximadamente compactos en un espacio normado

Juan R. Torregrosa Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada. E.T.S.I. Telecomunicación
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera, 14. 46071 Valencia, Spain

Received March 19, 1993. Revised November 15, 1993

Abstract

We use the notion of strict approximative compactness to obtain Chebyshev sets in normed spaces. We also discuss the relation of some global geometric properties of a normed space to the strictly approximatively compact character of its subsets.

1. Introducción

Numerosos conceptos de la Teoría de Aproximación, tales como conjunto de existencia, de unicidad, proyección métrica, etc, han sido tratados de forma sistemática en trabajos de N. V. Efimov y S. B. Stechkin [3], quienes, motivados por el problema de la convexidad de un conjunto de Chebyshev introdujeron en 1961 el concepto de conjunto aproximadamente compacto en un espacio normado, concepto que, como I. Singer [8] demostró posteriormente, está estrechamente relacionado con la continuidad de la proyección métrica.

Presentamos en este trabajo algunas propiedades de estos conjuntos así como equivalencias entre propiedades globales del espacio de Banach, tales como la rotundidad, la propiedad de Kadec-Klee o la propiedad de la gota, y el carácter aproximadamente compacto de sus subconjuntos.

La condición de aproximación compacta da lugar a conjuntos de existencia. Para obtener no sólo conjuntos de existencia sino también de unicidad, refinamos esta condición introduciendo lo que hemos llamado conjuntos estrictamente aproximadamente compactos. Establecemos propiedades de estos nuevos conjuntos y su relación con el concepto de aproximación compacta.

Al igual que en el caso anterior, obtenemos equivalencias entre algunas propiedades globales del espacio de Banach y el carácter estrictamente aproximadamente compacto de sus subconjuntos. Cabe mencionar, entre otras, la caracterización de la propiedad (ν) en términos de la propiedad de la gota y la rotundidad del espacio, de "streams" convergentes y de conjuntos estrictamente aproximadamente compactos.

Finalmente estudiamos la conexión entre el concepto de estricta aproximación compacta y la continuidad de la proyección métrica.

En todo el trabajo, X (o, con más precisión $(X, \|\cdot\|)$) denotará un espacio normado, B_x su bola unidad cerrada y M un subconjunto no vacío de X. Sea S_x la esfera unidad, X^* el dual topológico de X y $conv\,(A)$ y $diam\,(A)$ la envoltura convexa y el diámetro respectivamente, de un subconjunto A de X. Por "la gota", $D(x_0, B_x)$, definida por un elemento $x_0 \in X$, $x_0 \notin B_x$, entendemos la envoltura convexa del conjunto $\{x_0\} \cup B_x$, $D\big(x_0, B_x\big) = conv\,\big(\{x_0\} \cup B_x\big)$. El subconjunto de X, $D\big(x_0, B_x\big) \setminus B_x$, recibe el nombre de "resto" de x_0 y se denota por $R(x_0)$. Se dice que una sucesión (x_n) es una "stream" si $x_{n+1} \in R(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Conjuntos aproximadamente compactos.

Vamos a introducir a continuación los conceptos de teoría de aproximación que utilizamos en este trabajo.

Sea M un subconjunto no vacío de un espacio normado X y x_0 un elemento de X.

Diremos que $y_0 \in M$ es un *elemento de mejor aproximación* si

$$d(x_0, M) = d(x_0, y_0) \ .$$

El conjunto de todos los elementos de mejor aproximación se denota por

$$P_M(x_0) = \big\{y \in M : d(x_0, M) = d(x_0, y)\big\} \ .$$

Se dice que M es un *conjunto de existencia* si $P_M(x) \neq \emptyset$ para cualquier x de X.

Se dice que M es un *conjunto de unicidad* si para cualquier $x \in X$, $P_M(x) = \emptyset$ o bien existe $y \in M$ tal que $P_M(x) = \{y\}$.

Se dice que M es un *conjunto de Chebyshev* si para cualquier $x \in X$ existe $y_0 \in M$ tal que $P_M(x) = \{y_0\}$.

Cuando M es un conjunto de Chebyshev, $P_M : X \longrightarrow M$ es una aplicación bien definida que recibe el nombre de *proyección métrica* sobre M.

Es obvio que todo conjunto de existencia es cerrado. Por otra parte, es sencillo demostrar que todo conjunto convexo, cerrado y débil localmente compacto es un conjunto de existencia.

A partir de la definición de conjunto de unicidad se prueba, de forma evidente, el conocido resultado que establece la equivalencia entre la rotundidad, (R), del espacio y el hecho de que todos sus subconjuntos convexos sean de unicidad.

La sucesión (y_n) en M recibe el nombre de *aproximante para* x_0 si

$$d(x_0, y_n) \longrightarrow d(x_0, M) \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow +\infty\ .$$

A partir de este concepto y de la semicontinuidad inferior de la norma para la topología débil, se obtiene de forma inmediata que "si (y_n) es aproximante para x_0 y débil convergente a $y \in M$, entonces

$$d(x_0, M) = d(x_0, y)''.$$

El concepto de aproximación compacta es debido a N. V. Efimov y S. B. Stechkin [3], y posteriormente ha sido generalizado por W. Breckner [1].

Definición 2.1 Un subconjunto M de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que es *aproximadamente compacto* (AK) (ó *débil aproximadamente compacto* $(\sigma - AK)$) si dado $x \in X$, cualquier sucesión en M aproximante para x tiene una subsucesión convergente (débil convergente) a un punto de M.

Evidentemente todo subconjunto AK es $\sigma - AK$. Para poder afirmar el recíproco, basta exigir en el espacio la propiedad de Kadec-Klee ($(KK) \equiv$ en S_x las sucesiones débil convergentes y norma convergentes son las mismas), como sugiere W. Breckner [1].

Son conocidas algunas condiciones suficientes para que un conjunto sea $AK(\sigma - AK)$:

DEFINICIÓN 2.2 Sea M un subconjunto de un espacio normado $(X,\, \|\cdot\|)$.

(a) Se dice que M es *acotadamente compacto* (bK) (ó *débil acotadamente compacto* $(\sigma - bK)$) si para cualquier B bola cerrada, $B \cap M = \emptyset$ ó $B \cap M$ es compacto (σ–compacto).

(b) Se dice que M es *δ–compacto* $(\delta - K)$ si $\forall\ x \notin M$ existe $\delta > 0$ tal que $M \cap B\big(x,\, d(x,\, M) + \delta\big)$ es compacto.

Fácilmente podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{tikzcd}
 & & \delta - K \arrow[dr] & \\
\text{compacto} \arrow[r] \arrow[d] & bK \arrow[ur] \arrow[d] & & AK \arrow[d] \\
\sigma - \text{compacto} \arrow[r] & \sigma - bK \arrow[rr] & & \sigma - AK
\end{tikzcd}$$

La siguiente proposición recoge determinadas propiedades de los conjuntos $\sigma - AK$ y AK, generalizando algunos de los resultados que aparecen en [4] y [9].

Proposición 2.3

Sean M un subconjunto de un espacio normado $(X,\, \|\cdot\|)$.

(i) Si M es $\sigma - AK$, entonces M es un conjunto de existencia y $P_M(x)$ es σ–compacto, $\forall\ x \in X$.

(ii) Si M es AK, entonces M es un conjunto de existencia y $P_M(x)$ es compacto, $\forall\ x \in X$.

(iii) Si $(X,\, \|\cdot\|)$ es rotundo y M es convexo y $\sigma - AK$, entonces M es un conjunto de Chebyshev.

(iv) Si M es AK y Chebyshev, entonces la proyección métrica P_M es continua.

Demostración. Las afirmaciones (i), (ii) y (iii) son evidentes.

Veamos (iv). Si P_M no fuese continua en x_0 existiría una sucesión (x_n), convergente en norma a x_0 y un $\varepsilon > 0$ tales que

$$\big\|P_M(x_n) - P_M(x_0)\big\| \geq \varepsilon\,, \quad \forall\ \ n \in \mathbb{N}\ .$$

Puesto que

$$\big\|x_n - P_n(x_n)\big\| = d(x_n,\, M) \longrightarrow d(x_0,\, M)\ ,$$

la sucesión $\big(P_M(x_n)\big)$ es aproximante para x_0. Por ser M un conjunto AK, una subsucesión de $\big(P_M(x_n)\big)$ debería converger en norma a $P_M(x_0)$, una contradicción. $\square$

Los siguientes resultados proporcionan equivalencias entre propiedades geométricas globales de un espacio de Banach y el carácter de todos sus subconjuntos de cierto tipo.

Proposición 2.4

Sea $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X *es rotundo y tiene la propiedad* (KK) .

(ii) Todo subconjunto convexo y $\sigma - AK$ *de* X *es* AK *y Chebyshev.*

(iii) Todo subconjunto convexo y $\sigma - bK$ *de* X *es* AK *y Chebyshev.*

(iv) Todo subconjunto convexo y σ*–compacto de* X *es* AK *y Chebyshev.*

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.3 y del hecho establecido por W. Breckner [1] según el cual en un espacio con la propiedad (KK) todo conjunto $\sigma - AK$ es AK.

Por otra parte, (ii) $\Longrightarrow$ (iii) y (iii) $\Longrightarrow$ (iv) son inmediatas a partir de las relaciones σ–compacto $\Longrightarrow \sigma - bK \Longrightarrow \sigma - AK$, establecidas anteriormente.

Finalmente, veamos que (iv) $\Longrightarrow$ (i). Para probar que X tiene la propiedad (KK) supongamos que tenemos una sucesión (x_n) en S_x , débil convergente a $x \in S_x$ pero que $\|x_n - x\| \geq \varepsilon$, para cierto $\varepsilon > 0$, $n = 1, 2$. Sea $H = \{z : f(z) = 1\}$ un hiperplano soporte de B_x en el punto x , donde $f \in X^*$, $\|f\| = 1$. Entonces, $d(0, H) = d\big(x, ker\,(f)\big) = f(x) = 1$. Puesto que $f(x_n) \longrightarrow f(x) = 1$, cuando $n \longrightarrow \infty$, podemos suponer $f(x_n) \neq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y tomar

$$x_n' = x_n / f(x_n) \ , \quad \forall \ \ n \in \mathbb{N}$$

sucesión de elementos de H, débil convergente a x .

Sea $M = \overline{conv}\,\{x, x_n' : n \in \mathbb{N}\}$. Por el Teorema de Krein M es un conjunto convexo y débil compacto. Por tanto M es AK y Chebyshev. Además, como $M \subset H$ y $x \in M$, $d((0, M) = 1$.

(x_n') es una sucesión en M aproximante para 0. Por tanto, existe un subsucesión (x_{n_k}') $\|\cdot\|$–convergente a x . Entonces

$$x_{n_k} = f\big(x_{n_k}\big)\ x_{n_k}' \longrightarrow x \ , \quad \text{en} \quad \|\cdot\| \ , \quad \text{cuando} \quad k \longrightarrow \infty$$

lo cual es una contradicción. Por tanto X tiene la propiedad (KK) .

Supongamos ahora que X no es rotundo. Entonces podemos encontrar x_1, x_2 elementos distintos de S_x tales que $[x_1, x_2] \subset S_x$. El conjunto $[x_1, x_2]$ es convexo y débil compacto, debería ser pues un conjunto de unicidad. Sin embargo todos sus puntos distan 1 del origen. Obtenemos así una contradicción que nos permite afirmar que X es rotundo. $\square$

Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice que tiene la *propiedad de la gota,* (dp), si para cualquier subconjunto cerrado M disjunto de B_x, existe un elemento $x_0 \in M$ tal que $D(x_0, B_x) \cap M = \{x_0\}$.

El siguiente resultado es debido a I. Singer [8], si bien vamos a dar una demostración distinta de la condición suficiente apoyándonos en la caracterización (KK) + Reflexivo $\Longleftrightarrow$ (dp) , establecida por V. Montesinos [5].

Proposición 2.5

Sea $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach.* X *es reflexivo y tiene la propiedad* (KK) *si y sólo si cualquier subconjunto convexo y cerrado es aproximadamente compacto.*

Demostración. La condición necesaria podemos encontrarla en [8]. Para demostrar la condición suficiente supongamos que X no tiene la propiedad de la gota. Entonces, por un resultado de S. Rolewicz [6], existe una "stream" (x_n) en X que no tiene subsucesiones convergentes. Llamamos $M = \overline{conv}\,(x_n)$, subconjunto de X convexo y cerrado, luego aproximadamente compacto. Si $\big(\|x_n\|\big)$ no converge a 1, entonces $\{(x_n)\}$ es un subconjunto cerrado a distancia positiva de B_x, por lo que en virtud del Teorema de Daneš [2],

$$\exists\, x \in \big\{(x_n)\big\} \quad \text{tal que} \quad D\big(x, B_x\big) \cap \big\{(x_n)\big\} = \{x\}\ ,$$

lo que está en contradicción con la construcción de (x_n).

Por tanto $\big(\|x_n\|\big) \longrightarrow 1 = d(0, M)$, luego (x_n) es una sucesión aproximante que no tiene subsucesiones convergentes. Esta contradicción pone fin a la prueba. $\square$

Se deduce de forma inmediata la Proposición anterior el siguiente resultado

Corolario 2.6

Sea $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach.* X *es rotundo y satisface la propiedad de la gota si y sólo si todo subconjunto convexo y cerrado es aproximadamente compacto y Chebyshev.*

3. Conjuntos estrictamente aproximadamente compactos

Como hemos visto en la Proposición 2.3 la condición de aproximación compacta nos conduce a conjuntos de existencia. Para obtener no sólo conjuntos de existencia sino también de unicidad refinamos esa condición introduciendo el siguiente concepto

DEFINICIÓN 3.1 Sea M un subconjunto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Se dice que M es *estrictamente aproximadamente compacto* (sAK) (ó *débil estrictamente aproximadamente compacto* $(\sigma - sAK)$) si dado $x \in X$, cualquier sucesión en M aproximante para x es convergente (débil convergente) a un punto de M.

Es evidente que todo conjunto sAK es $\sigma - sAK$, así como que todo conjunto sAK $(\sigma - sAK)$ es AK $(\sigma - AK)$. Se pueden deducir fácilmente de la definición que, bajo ciertas condiciones, las implicaciones en el otro sentido son válidas. Por ejemplo, si el espacio tiene la propiedad (KK) los subconjuntos sAK y $\sigma - sAK$ coinciden. Así mismo, en subconjuntos de unicidad, los conceptos de aproximación compacta y estricta aproximación compacta son equivalentes.

Evidentemente los conjuntos $\sigma - sAK$ y sAK tienen todas las propiedades de los conjuntos $\sigma - AK$ y AK . Además, como ya hemos comentado, todo conjunto $\sigma - sAK$ es un conjunto de Chebyshev.

Los siguientes resultados proporcionan equivalencias entre propiedades globales del espacio y el caracter sAK ó $\sigma - sAK$ de todos sus subconjuntos.

A partir de la Proposición 2.4 y teniendo en cuenta que sAK equivale a $AK+$ Chebyshev, se obtiene de forma inmediata:

Proposición 3.2

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio Banach rotundo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) X tiene la propiedad (KK) .

(ii) Todo subconjunto M de X $\sigma - sAK$ es sAK .

(iii) Todo subconjunto M de X convexo y σ–compacto es sAK .

Teorema 3.3

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Si (x_n) es una sucesión en S_x y $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, tal que $f(x_n) \longrightarrow 1$, entonces (x_n) es σ–convergente.

(ii) X es reflexivo y rotundo.

(iii) Todo subconjunto M de X convexo y cerrado es $\sigma - sAK$.

(iv) Todo hiperplano cerrado de X es $\sigma - sAK$.

Demostración. Veamos (i) $\Longrightarrow$ (ii). A partir de la hipótesis (i) se comprueba fácilmente que todo funcional lineal continuo en X alcanza su norma, luego, por el Teorema de James, X es reflexivo.

Para ver que X es rotundo utilizamos la caracterización de rotundidad dada por A. F. Ruston [7]. Si X no es rotundo, existe un hiperplano soporte de B_x, $H = \{z : f(z) = 1\}$, que intersecta S_x en al menos dos puntos distintos x e y. La sucesión (x_n) en S_x definida por

$$x_{2n} = x\,, \qquad x_{2n-1} = y\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

no es débil convergente, lo que está en contradicción con (i).

Para (ii) $\Longrightarrow$ (iii), supongamos que X es reflexivo y rotundo. Sea M un subconjunto de X convexo y cerrado. Veamos que M es $\sigma - sAk$. Sea $x \in X$ y (x_n) una sucesión en M, aproximante para x. Por ser X reflexivo, existe una subsucesión (y_n) de (x_n) débil convergente a $y \in M$. Así M es $\sigma - AK$ y por tanto $\sigma - sAK$.

La implicación (iii) $\Longrightarrow$ (iv) es inmediata. Veamos, por último, (iv) $\Longrightarrow$ (i). Teniendo en cuenta que cualquier subconjunto $\sigma - sAK$ es un conjunto de existencia, podemos afirmar, en virtud del Teorema de R. C. James, que X es reflexivo. Sea (x_n) una sucesión en S_x y $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, tal que $f(x_n) \longrightarrow 1$. Por ser X reflexivo, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) débill convergente a $x_0 \in X$.

Sea $H = \{z : f(z) = 1\}$ hiperplano soporte de B_x en x_0. Por hipótesis es un conjunto $\sigma - sAK$. Podemos suponer $f(x_n) \neq 0$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Así

$$y_n := x_n / f(x_n) \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

es una sucesión en H tal que $(\|y_n\|) \longrightarrow d(0, H) = 1$, luego (y_n) es una sucesión aproximante para cero. Por ser H $\sigma - sAK$, (y_n) es débil convergente a $z \in H$. Pero $z = x_0$. De aquí deducimos que (x_n) es débil convergente a x_0. $\square$

4. La propiedad (ν)

Dado $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $\varepsilon > 0$, sea $S(f, \varepsilon) = \{x \in B_x : f(x) \geq 1 - \varepsilon\}$. Se dice que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ tiene la *propiedad* (ν) si para cualquier $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, *diam* $S(f, \varepsilon)$ tiende a cero cuando ε decrece a cero. Cuando la condición anterior se cumple únicamente para cualquier $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, que alcanza el supremo sobre B_x, se dice que el espacio tiene la *propiedad* $(L\nu)$.

Si sustituimos el diámetro de las secciones $S(f, \varepsilon)$ por el índice de Kuratowski de no compacidad, $\alpha\big(S(f, \varepsilon)\big)$, (el ínfimo de todos los números $r > 0$ tales que $S(f, \varepsilon)$ se puede cubrir por una cantidad finita de conjuntos de diámetro menor que r), obtenemos las *propiedades* (α) *y* $(L\alpha)$, respectivamente.

Vamos a establecer un resultado que caracteriza a los espacios con la propiedad (ν) en términos de la propiedad de la gota y la rotundidad del espacio, de "streams"'convergentes y de conjuntos sAK. Para establecer esta caracterización necesitamos el siguiente resultado:

Lema 4.1

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si (x_n) es una "stream" en X tal que $(\|x_n\|) \longrightarrow a > 1$, entonces (x_n) es convergente.

Demostración. Aplicando el Lema de Zabreiko–Krasnosel'skii [10] obtenemos que

$$diam\left(D(x_n,\, B_x) \setminus a\, \overset{\circ}{B}_x\right) \le 2\, \frac{\|x\|+1}{\|x_n\|-1}\left(\|x_n\|-a\right), \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

donde $\overset{\circ}{B}_x$ denota la bola abierta de X.
En consequencia

$$diam\left(D(x_n,\, B_x) \setminus a\, \overset{\circ}{B}_x\right) \longrightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Por tanto (x_n) es una sucesión de Cauchy, luego convergente. □

Teorema 4.2

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(i) $(X, \|\cdot\|)$ *tiene la propiedad* (ν).
(ii) $(X, \|\cdot\|)$ *es rotundo y tiene la propiedad de la "gota".*
(iiii) Toda "stream" es convergente.
(iv) Todo subconjunto convexo y cerrado de X *es* sAK.
(v) Todo hiperplano cerrado de X *es* sAK.

Demostración. Veamos, en primer lugar, la implicación (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si $(X, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad (ν), desde luego tiene la propiedad (α) que es equivalente a la propiedad de la gota [5]. Supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ no es rotundo. Entonces podemos encontrar un hiperplano soporte de B_x que intersecta la bola unidad en más de un punto, digamos en x_1 y x_2. Resulta que si el hiperplano es $H = \{z : f(z) = 1\}$ con $f \in S_x$, $\|f\| = 1$, las secciones $S(f,\, \delta)$ contienen a $[x_1,\, x_2]\ \forall\, \delta > 0$, luego

$$diam\, S(f,\, \delta) \ge \|x_1 - x_2\|, \quad \forall\ \delta > 0,$$

lo que está en contradicción con el hecho de que $(X, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad (ν).

Para la implicación (iii) $\Longrightarrow$ (i), supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ no satisface la propiedad (ν), entonces

$\exists\, f \in X^*$, $\|f\| = 1$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $diam\, S(f,\, \delta) > \varepsilon\ \ \forall\ \ \delta > 0$.

Tomamos $x_0 \in X$ con $f(x_0) > 1$. Construiremos una sucesión (x_n) en X de modo que sea una "stream" y que satisfaga

$$\begin{aligned} \left\|x_n - x_{n+1}\right\| &> \varepsilon/4, \quad \forall\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ f(x_n) &> 1, \qquad \forall\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Supongamos construidos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Como $f(x_n) > 1$, tomemos δ tal que $0 < \delta < f(x_n) - 1$. Como $diam\, S(f, \delta) > \varepsilon$, existirá z_{n+1} en $S(f, \delta)$ con $\|z_{n+1} - x_n\| > \varepsilon/2$. Sea

$$x_{n+1} := \frac{z_{n+1} + x_n}{2} \ ,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= \frac{1}{2}\Big(f\big(z_{n+1}\big) + f(x_n)\Big) \geq \frac{1}{2}\ \Big(1 - \delta + f(x_n)\Big) \\ &> \frac{1}{2}\ \Big(1 - f(x_n) + 1\Big) + \frac{1}{2}\ f(x_n) = 1 \ . \end{aligned}$$

Además $x_{n+1} \in D\big(x_n, B_x\big)$, y

$$\big\|x_{n+1} - x_n\big\| = \left\| \frac{z_{n+1}}{2} + \frac{x_n}{2} - x_n \right\| = \left\| \frac{z_{n+1} - x_n}{2} \right\| > \varepsilon/4 \ .$$

Resulta pues que (x_n) es una “stream” no convergente, lo cual es una contradicción.

La implicación (ii) $\Longrightarrow$ (iv) se deduce de forma inmediata del Corolario 2.6 y del hecho de que todo conjunto AK y Chebyshev es sAK.

Para demostrar (iv) $\Longrightarrow$ (iii) tomemos (x_n) una “stream” en X. Vamos a considerar dos posibilidades:

(a) Si $(\|x_n\|) \longrightarrow a > 1$, por el Lema 4.1 podemos afirmar que (x_n) es convergente.

(b) Si $(\|x_n\|) \longrightarrow 1$, entonces $M = \overline{conv}\left(\{x_n\}\right)$ es un subconjunto de X sAK y, por ser (x_n) una “stream”, $d(0, M) = 1$. Como (x_n) es una sucesión en M aproximante para 0, entonces (x_n) es convergente.

Como (iv) $\Longrightarrow$ (v) es evidente, sólo nos resta demostrar que (v) $\Longrightarrow$ (ii). Veamos que X es reflexivo, rotundo y tiene la propiedad (KK). La reflexividad se deduce de forma inmediata del Teorema de James. Si X no fuese rotundo existiría un hiperplano soporte de B_x, $H = \{z : f(z) = 1\}$, con $\|f\| = 1$, que corta a S_x en al menos dos puntos distintos x e y. Construimos la siguiente sucesión en S_x

$$x_{2n+1} := x \ , \qquad x_{2n} := y \ , \qquad n = 1, 2, \ldots \ .$$

(x_n) es una sucesión en H aproximate para 0. Por ser H sAK, (x_n) es convergente, una contradicción. Por último, si X no tuviera la propiedad (KK) existiría una sucesión (x_n) en S_x débil convergente a $x \in S_x$ y no $\|\cdot\|$–convergente. Sea $H = \{z : f(z) = 1\}$ un hiperplano soporte de B_x en punto x donde $f \in X^*$, $\|f\| = 1$. La sucesión

$$z_n = x_n / f(x_n) \ , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

está en H y es aproximante para 0. Por ser H sAK (z_n) es convergente, contradicción que pone fin a la prueba. $\square$

Un espacio de Banach tiene la *propiedad de Kadec,* (K), si la topología débil y de la norma coinciden sobre su esfera unidad.

Como consecuencia inmediata del Teorema 4.2 obtenemos:

Corolario 4.3

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach reflexivo. Las siguientes propiedades son equivalentes:
(i) (ν); (ii) (dp) y (R); (iii) (KK) y (R); (iv) $(L\nu)$; (v) (K) y (R).

También a partir del Teorema 4.2 y de la Proposición 2.3 podemos establecer el siguiente resultado:

Corolario 4.4

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con la propiedad (ν). Si M es un subconjunto de X convexo y cerrado, entonces P_M es continua.

References

1. W. W. Breckner, "Bemerkungen über die Existenz von Minimallösugen in normierten linearen Räumen", *Mathematica (Cluj)* **10** (33):2, (1968), 223–228.
2. J. Daneš, "A geometric theorem useful in non–linear functional analysis", *Boll. Un. Mat. Ital.* **6** (1972), 369–372.
3. N. V. Efimov and S. B. Stechkin, "Approximative compactness and Chebyshev sets", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **140** (1961), 522–524.
4. G. Köthe, *Topological Vector Spaces I,* Springer–Verlag, 1969.
5. V. Montesinos, "Drop property equals reflexivity", *Studia Math.* **87** (1987), 93–100.
6. S. Rolewicz, "On drop property", *Studia Math.* **85** (1987), 27–35.
7. A. F. Ruston, "A note on convexity of Banach spaces", *Proc. Cambridge Philos. So.,* (1949).
8. I. Singer, "Some remarks on approximative compactness", *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **9** (1964), 167–177.
9. L. P. Vlasov, "Aproximative properties of sets in normed linear spaces", *Mat. Zametki* (1973).
10. P. P. Zabreiko and M. A. Krasnosel'skii, "On the solvability of non–linear operator equations", *Funktsional Anal. i Prilozhem* **5** (3), (1971), 42–44.