Collect. Math. **43**, 2 (1992), 125–140

Sur les équations fonctionelles p-adiques aux q-différences

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Université de Caen, Mathématiques

Esplanade de la paix, 14032 Caen Cedex, France

ABDELBAKI BOUTABAA

U.S.T.H.B., Institut de Mathématique

BP 09, Dar El Beida, Alger, Algérie

Received May 4, 1992

ABSTRACT

In this paper, we study the convergence of formal power series Φ solutions of functional equations of the form $\sum_0^t P_i(x)\Phi(\varphi^{[i]}(x)) = \tau(x)$ where the base field is the field $\mathbb{C}_p$ of p-adic numbers for a prime number p, and $\varphi^{[k]}$ denotes the k-th iterate of the function φ. The case when the base field is $\mathbb{C}$ has been studied in a previous paper.

As an application, we prove that a formal power series solution of a system of a q_1-difference equation and of a q_2-difference equation is the Taylor series at the origin of a rational function, when the base field is the field of algebraic numbers and q_1, q_2 multiplicatively independents, or for a base field K, commutative with zero characteristic and q_1, q_2 algebraically independents.

I Introduction

Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle, muni d'une valuation non archimédienne non triviale. Nous supposons de plus que K est algébriquement clos, de sorte que la valuation est dense. Soit φ une série formelle de $K[[x]]$ telle que l'on ait $\varphi(x) = \sum_0^\infty q_n x^n$ avec $q_0 = 0$ et $q_1 \in K$ non nul; nous supposerons toujours que $q = q_1$ n'est pas une racine de l'unité et, sauf dans la partie VI, que $|q|$ est différent de un (on voit alors immédiatement que l'on peut supposer sans perte de généralité que $|q| < 1$).

Pour k entier naturel, nous définissons $\varphi^{[k]}(x)$ comme l'itérée k-ième de $\varphi(x)$ si k est non nul, avec la convention $\varphi^{[0]}(x) = x$. Soient t un entier positif et $P_i(x)$ $i = 0, \ldots, s$ et $\tau(x)$ des séries formelles à coefficients dans K. Nous nous intéressons aux séries formelles Φ solutions de l'équation fonctionnelle:

$$\sum_0^t P_i(x)\Phi(\varphi^{[i]}(x)) = \tau(x) \tag{1}$$

Nous ferons dès le départ l'hypothèse que les séries $P_i(x)$ et $\tau(x)$ sont de rayon de convergence non nul, et nous étudierons dans ce cas les propriétés de convergence de la série $\Phi(x)$. Cette étude a déjà été faite dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$ dans [1], où le lecteur pourra trouver des résultats semblables à ceux que nous allons démontrer. La plupart des méthodes de démonstration se transposent, mais avec des difficultés spécifiques au cas de l'analyse ultramétrique; ceci nous permettra néammoins de donner simplement un schéma de démonstration pour certaines de nos preuves.

Comme application, nous étudierons les séries formelles à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$ solutions d'un système d'équations aux q_1-différences et aux q_2-différences quand q_1 et q_2 sont des nombres algébriques non nuls et multiplicativement indépendants, ou quand le corps de base est un corps K commutatif de caractéristique nulle quelconque, mais avec l'hypothèse que q_1 et q_2 sont algébriquement indépendants.

Nous trouverons dans les deux cas que la série formelle est une fraction rationnelle.

II Résultats préliminaires

Nous rappelons tout d'abord qu'un opérateur L d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dit à indice si $\ker(L)$ et $\mathrm{coker}(f)$ sont tous les deux de dimension finie, l'indice de L étant alors $\chi(L, E, F) = \dim(\ker(L)) - \dim(\mathrm{coker}(L))$. On a les propriétés suivantes:

Proposition 2.1

Soient u et v deux applications linéaires d'un espace vectoriel E; on suppose que u et v sont toutes les deux à indices. Alors $w = u \circ v$ est à indice, et on a: $\chi(w) = \chi(u) + \chi(v)$.

Démonstration. Voir [4], proposition 0.8. □

Nous aurons besoin aussi de la notion d'opérateur complètement continu d'un espace de Banach ultramétrique:

DÉFINITION. Soient E et F deux espaces de Banach ultramétriques sur le corps K. On dit que l'application linéaire u de E dans F est complètement continue si elle est adhérente dans l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F au sous-espace des applications linéaires de rang fini.

On a les résultats suivants:

Proposition 2.2

a) Soient E, F et G trois espaces de Banach sur le corps K, et u, v appartenant à $L(E, F)$ et $L(F, G)$ respectivement. Si u ou v est complètement continu, il en est de même de $u \circ v$;

b) L'ensemble des applications complètement continues de E dans E est un idéal bilatère fermé de $L(E, E)$.

Démonstration. Voir [7]. □

Soit I un ensemble d'indices. On associe à I l'espace de Banach formé des familles d'éléments de K de limite nulle suivant le filtre des complémentaires des parties finies de l'ensemble I muni de la norme $||x|| = \sup |x_i|$.

Nous notons (*) dans la suite la condition suivante pour un espace de Banach ultramétrique E: celui-ci vérifie (*) s'il est isomorphe à un espace de la forme $c(I)$ pour un ensemble d'indice I.

Proposition 2.3

Soit u une application linéaire complètement continue d'un espace de Banach sur K vérifiant la condition (*). L'image de $\mathrm{id} + u$ est alors un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie de E et cette codimension est égale à la dimension du noyau de $\mathrm{id} + u$.

Démonstration. Voir [7], corollaire de la proposition 12. □

Le résultat précédent veut donc dire sous les conditions indiquées que l'opérateur $\mathrm{id} + u$ est à indice, et que cet indice est nul.

Proposition 2.4

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, F étant un espace métrique complet, avec $E \subset F$, on suppose que E est dense dans F. Soit L un opérateur continu de F dans F, on suppose que la restriction de L à E est une application linéaire de E dans E, que L a un indice dans ces deux espaces. Alors $\chi(L,E) \leq \chi(L,F)$ et si de plus on a l'égalité alors v dans F et $L(v) \in E$ implique $v \in E$. En particulier, on a $\ker(L,E) = \ker(L,F)$.

Démonstration. Voir [6], Lemma 4.5 et 4.6. □

III Étude de l'opérateur L

Nous allons considérer une situation un peu plus compliquée que celle envisagée dans l'introduction; nous allons étudier des opérateurs de la forme:

$$L(\Phi) = \sum_0^{\infty} P_i(x)\Phi(q_i x) \tag{2}$$

où q_i est une suite d' éléments de K telle que $q_0 = 1$ et $|q_i| > |q_{i+1}|$, et les $P_i(x)$ des séries formelles de valuation x-adique (que nous noterons $v(P_i)$) tendant vers l'infini si i tend vers l'infini. Avec cette hypothèse, l'opérateur L est bien défini sur l'espace $K[[x]]$ des séries formelles à coefficients dans K. Pour tout réel positif r dans le groupe des valeurs de K nous notons $C(r)$ l'espace des fonctions analytiques sur le disque fermé de centre zéro, rayon r de K. Cet espace, quand on le munit de la norme de la convergence uniforme sur le disque en question, est un espace de Banach vérifiant la condition (*). La norme d'un élément $f = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ de $C(r)$ est donnée par $||f||_r = \max |a_n| r^n$. Une base normale de cet espace (cf. [7]) est donnée par $(x/\rho)^n$, $n \in \mathbb{N}$ où ρ est un élément de K module r.

Proposition 3.1

On suppose que les P_i sont tous dans $C(r)$, que P_0 est non nul et que $||P_i||_r$ tend vers zéro quand i tend vers l'infini. Alors l'opérateur L a un indice dans $C(r)$ qui est égal $-m$, où m est le nombre de zéros de P_0 situés dans le disque fermé de centre zéro, rayon r comptés avec leur multiplicités.

Démonstration. On regarde d'abord le cas de l'application qui à Φ associe $P_0\Phi$, qui est linéaire injective de $C(r)$ dans lui-même. Soit Q le polynôme unitaire ayant tous les zéros de P_0 situés dans le disque $D^+(0,r)$, comptés avec leur multiplicités. On voit facilement que toute fonction analytique f sur ce disque s'écrit de manière unique sous la forme $f = Qg+h$ où h est un polynôme de degré inférieur à m, et g un élément de $C(r)$. Le polynôme $R = P_0/Q$ étant inversible dans $C(r)$, il en résulte que cette application a un conoyau de dimension m, ce qui démontre l'assertion dans ce cas particulier. Nous notons de plus ζ l'application qui à la série f associe g, qui est une application linéaire continue. On a alors la formule $L = P_0(\mathrm{id} + (1/R)\zeta \circ S)$ où S est l'application qui à Φ associe $\sum_1^\infty P_i(x)\Phi(q_i x)$. Pour démontrer le résultat dans le cas général, il suffit de démontrer que l'application S est complètement continue de $C(r)$ dans lui-même, d'après la proposition 2.2. Pour cela, il suffit de démontrer qu'il en est ainsi de l'application qui à $\Phi(x)$ associe $\Phi(qx)$ où q est un élément de K de valeur absolue plus petite que 1. Cette dernière propriété se démontre en composant cette application par la projection sur l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à un entier M donné et en faisant tendre M vers l'infini, et ceci termine la démonstration de la proposition. □

Nous notons $G(K)$ l'espace vectoriel sur K des germes de fonctions analytiques à l'origine, que nous munissons de la topologie limite inductive des espaces $C(r)$ quand r tend vers zéro, en restant dans le groupe des valeurs de K.

Proposition 3.2

On suppose qu'il existe r_0 tel que tous les P_i soient dans $C(r_0)$ et que $||P_i||_{r_0}$ tende vers zéro si i tend vers l'infini. Alors l'opérateur L est bien défini sur G, et a un indice dans cet espace, qui est $-v(P_0)$ (où $v(P_0)$ est la valuation x-adique de P_0).

Démonstration. Pour r dans le groupe des valeurs de K, inférieur à r_0, L a un indice dans $C(r)$, et si l'on ne considère que les valeurs de r assez petites, cet indice est constant et égal à $-v(P_0)$. Nous allons utiliser la proposition 2.4. Soient $r_1 < r_2 < r_0$; nous prenons r_1 et r_2 dans le groupe des valeurs et assez petits de façon que les indices de L dans $C(r_1)$ et $C(r_2)$ soient les mêmes. Alors, comme $C(r_2)$ s'injecte dans $C(r_1)$ et y est dense, le noyau de L dans $C(r_1)$ et $C(r_2)$ est le même.

On en déduit que pour r dans le groupe des valeurs et assez petit, on a $\ker(L,C(r)) = \ker(L,G)$. Soient maintenant u et v tels que $u \in G$ et $v \in C(r)$ et $L(u) = v$. Il existe $r' < r$ tel que u appartienne à $C(r')$; d'après la proposition 2.4, il en résulte que $u \in C(r)$. On a donc $L(G)\bigcap C(r) = L(C(r))$ et par suite $\dim(\mathrm{coker}(L,C(r)) \leq \dim(\mathrm{coker}(L,G))$. On a de plus que si $w_1,\ldots,w_t$ sont des éléments de $C(r)$ dont les images dans $C(r)/L(C(r))$ forment une base de cet espace, il en est de même dans $C(r')/L(C(r'))$ pour tout $r' < r$ et dans le groupe des valeurs. Si alors on considère leurs images dans $G/L(G)$, on voit qu'elles engendrent cet espace; en effet, soit u dans G; alors u est dans un $C(r')$ avec r' dans le groupe des valeurs et assez petit. Donc il existe des scalaires $l_1, \dots, l_t$ et un élément Φ de $C(r')$ tels que l'on ait $u = l_1 w_1 + \dots + l_t w_t + L(\Phi)$, d'où l'assertion; on a donc que $\dim(\operatorname{coker}(L,G)) \leq \dim(\operatorname{coker}(L, C(r)))$, ce qui termine la démonstration. □

Proposition 3.3

On suppose içi que les P_i sont des fonctions entières dans K, telles que pour tout r positif, $||P_i||_r$ tend vers zéro si i tend vers l'infini, et que P_0 est un polynôme non nul. Alors L a un indice dans l'espace $A(K)$ des fonctions entières, et cet indice est $-\deg(P_0)$.

Démonstration. Sous les hypothèses faites, L est un opérateur continu de l'espace $A(K)$ dans lui-même, cet espace étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout disque borné, qui en fait un espace métrique complet. La démonstration est alors semblable à celle faite dans ([6], Lemme 4.7). □

Proposition 3.4

Sous les hypothèses faites au début de ce paragraphe, on a:

a) L'opérateur L est à indice dans $K[[x]]$, et cet indice est $\sup(-v(P_i))$;
b) On a $\operatorname{coker}(L, K[[x]]/G) = 0$;
c) $\dim \ker(L, K[[x]]/G) = \sup(-v(P_i)) + v(P_0)$.

Démonstration. Celle-ci est essentiellement la même que dans [3] en tenant compte du fait que $|q_{i+1}| < |q_i|$ pour tout i. Nous en donnons seulement les grandes lignes. On calcule d'abord l'indice de L agissant sur l'espace de séries formelles. Pour cela, soit $\Phi(x) = \sum_0^\infty a(n)x^n$ tel que $L(\Phi) = \theta = \sum_0^\infty b(n)x^n$. Nous allons démontrer que l'indice est égal à $\sup(-v(P_i))$. On ne restreint pas la généralité en supposant que cette quantité est nulle (il suffit pour le voir de mettre une puissance convenable de x en facteur et d'utiliser la proposition 2.1). La relation $L(\Phi) = \theta$ se traduit alors sur les coefficients de Taylor pour n assez grand par une relation de la forme:

$$a(n)\left(\sum c_i q_i^n\right) = S_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b(n), n)$$

où la somme dans le premier membre est effectuée sur un nombre fini non vide d'indices, les c_i étant non nuls. Comme les valeurs absolues des q_i forment une suite strictement décroissante, la somme en question est non nulle pour n assez grand. On en déduit que L induit un isomorphisme de $x^n K[[x]]$ sur lui-même pour n assez grand. La suite de la démonstration est la même que dans [3], proposition 1.3, p. 149.

Les assertions b) et c) se démontrent alors exactement comme dans [3], théorème 1.4, p. 149. □

IV Étude dans les espaces q-Gevrey

Soit q un élément de K^* tel que $|q| < 1$. Dans cette partie, nous prendrons comme opérateur L un opérateur de la forme

$$L = \sum_0^t P_i(x)\Phi(q^i x) \tag{3}$$

où les P_i sont des séries convergentes; nous notons r un réel positif tel que les P_i soient toutes dans $C(r)$, nous supposons P_0 non nul et nous posons $P_i(x) = \sum_0^\infty a_{i,j}x^j$.

Dans cette partie, nous supposons de plus que le corps K possède la propriété suivante: le groupe des valeurs de K est $]0,\infty[$. Ceci entrainera le résultat cherché (théorème 4.1 ci-dessous), car il suffit de le démontrer pour un sur-corps du corps de base. On peut construire un corps valué contenant un corps donné L et possédant cette propriété en considérant le corps des fractions rationnelles en une infinité de variables x_r indexées par les réels positifs, muni de la norme de Gauss sur le polydisque ($|x_r| \leq r$ pour tout r dans $]0,\infty[$), et en considérant une extension algébriquement close et complète de ce corps. Soit maintenant s un réel positif; nous notons q^s un élément de K dont la valeur absolue est $|q|^s$, choisi de façon quelconque si $s \notin \mathbb{Q}$; si s est dans $\mathbb{Q}$, on écrit $s = a/b$ avec a et b dans $\mathbb{N}$ et premiers entre eux, et on se fixe une racine b-ième de q.

Nous notons $\eta(x)$ la série formelle $\sum_0^\infty q^{sn(n+1)/2}x^n$ qui est une fonction entière dans K, et nous notons η^* la série $\sum_0^\infty q^{-sn(n+1)/2}x^n$ qui est une série de rayon de convergence nul, inverse au sens de Hadamard de η, le produit de Hadamard ∇ de deux séries formelles étant défini par l'égalité $(\sum_0^\infty a(n)x^n)\nabla(\sum_0^\infty b(n)x^n) = \sum_0^\infty a(n)b(n)x^n$.

Nous notons alors $K[[x]]_{q,s}$ et $K[[x]]_{q,(s)}$ respectivement, les espaces de séries formelles Φ telles que la série $\eta\nabla\Phi$ soit dans G (resp dans $A(K)$). Ces deux espaces seront munis de la topologie déduite de celle des espaces G et $A(K)$. Il est clair que ces deux espaces ne dépendent que de s et non pas du choix particulier de q^s.

Nous allons démontrer le résultat suivant:

Théorème 4.1

Soit L un opérateur de la forme (3), et Φ, θ deux séries formelles telles que $L(\Phi) = \theta$. On suppose que θ appartient à G. Alors ou Φ est dans G, ou il existe un unique nombre rationnel positif s tel que Φ appartienne à $K[[x]]_{q,s}$ mais pas à $K[[x]]_{q,(s)}$.

Nous allons montrer que L, considéré comme opérateur de $K[[x]]_{q,s}$ dans lui même ou de $K[[x]]_{q,(s)}$ dans lui-même, a un indice, et calculer celui-ci.

Pour cela, nous allons introduire un nouvel opérateur, fabriqué à partir de L, qui sera $M = \eta\nabla L(\eta^*\nabla\Phi)$.

Proposition 4.2

L'opérateur M est un opérateur de la forme

$$\sum_0^\infty Q_j(x)\Phi(q_j x) \tag{4}$$

où les Q_j sont des polynômes, de valuation x-adique tendant vers l'infini si j tend vers l'infini, et les q_j des éléments de K de la forme $q_j = q^{\alpha_j}(q^s)^{\beta_j}$ avec α_j et β_j dans $\mathbb{Z}$. De plus, $||Q_j||_r$ tend vers zéro quand j tend vers l'infini.

Démonstration. Considérons le transformé d'un opérateur de la forme $x^m\Phi(q^k x)$; on trouve que c'est l'opérateur qui à la série formelle Φ associe la série formelle: $x^m q^{sm(m+1)/2}\Phi(q^{k+sm}x)$. Par suite, M est donné par l'expression:

$$M(\Phi) = \sum a_{i,m}x^m q^{sm(m+1)/2}\Phi(q^{i+sm}x)$$

Avec nos hypothèses sur le choix de q^s, une égalité de la forme $i + ms = i' + sm'$ implique $q^i q^{ms} = q^{i'}q^{m's}$, et la réciproque est immédiate puisque $|q|$ est inférieur à 1, de sorte que on a $Q_j = \sum a_{i,m}q^{sm(m+1)/2}x^m$, la sommation étant étendue aux couples (i,m) tels que $i + sm$ soit égal à p_j, pour un j fixé, où p_j est la suite de réels de la forme $i + sm$ rangés par ordre croissant. On vérifie facilement alors les propriétés énoncées dans la proposition. □

Proposition 4.3

Soit L un opérateur de la forme (4), et s un réel positif. Nous notons $N(s)$ l'ensemble des couples (i,m) tels que $i + sm = \inf(p + sm, a_{p,m} \neq 0)$, $I^+(s) = \sup(m,(i,m) \in N(s))$ et $I^-(s) = \inf(m,(i,m) \in N(s))$. Alors L, considéré comme opérateur de $K[[x]]_{q,s}$ (resp de $K[[x]]_{q,(s)}$) dans lui-même, a un indice, qui et $-I^-$ (resp $-I^+$).

Démonstration. On voit immédiatement que ces nombres sont bien définis. D'autre part, L et M opèrent et ont un indice simultanément dans les espaces G (resp. $A(K)$) et $K[[x]]_{q,s}$ (resp. $K[[x]]_{q,(s)}$) et alors ces indices sont les mêmes. On applique alors les propositions 3.2 et 3.3, qui donnent les résultats annoncés. □

En général, on a $I^+ = I^-$ de sorte que L a un même indice dans les deux espaces $K[[x]]_{q,s}$ et $K[[x]]_{q,(s)}$. Pour certaines valeurs exceptionnelles de s, on a $I^+ > I^-$ et on voit immédiatement qu'en fait les valeurs exceptionnelles sont toutes rationnelles.

Proposition 4.4

Soit L un opérateur de la forme (4), et $J = [a,b]$ un intervalle de $]0,\infty[$ tel que pour tout s dans $]a,b[$, s n'est pas une valeur exceptionnelle pour L. Alors on a: 1) $I^+(s) = I^-(s) = I$ pour $s \in]a,b[$; 2) $I^+(b) = I^-(a) = I$.

Démonstration. Cf. [1], Proposition 3.3. □

Proposition 4.5

Soit L un opérateur de la forme (4), et J un intervalle vérifiant les propriétés de la proposition précédente. Alors on a:

$$\ker\big(L, K[[x]]_{q,(b)}/K[[x]]_{q,a}\big) = 0.$$

Démonstration. Il résulte de la proposition 4.3 que L a un indice dans les deux espaces $K[[x]]_{q,b}$ et $K[[x]]_{q,(a)}$ et que ces deux indices sont égaux. Comme l'espace $K[[x]]_{q,(b)}$ est un espace métrique complet et que l'injection $K[[x]]_{q,a} \to K[[x]]_{q,(b)}$ est d'image dense, la proposition 2.4 s'applique et démontre le résultat. □

Démonstration du Théorème 4.1. Nous avons déjà vu que les valeurs exceptionnelles sont des nombres rationnels.

Pour s assez grand, on a $I^+(s) = I^-(s) = \inf(v(P_i))$, donc l'indice de L dans $K[[x]]_{q,s}$ est le même que celui dans $K[[x]]$.

On en déduit que $\ker\big(L, K[[x]]/K[[x]]_{q,s}\big) = 0$, ce qui montre déjà qu'il existe un s tel que Φ appartienne à $K[[x]]_{q,s}$. On utilise alors la proposition 4.5; si Φ appartient à $K[[x]]_{q,(s)}$, celle-ci, prouve que Φ appartient à $K[[x]]_{q,s'}$ pour un réel s' valeur exceptionnelle pour L tel que $s' < s$ et qu'il n'existe pas de valeur exceptionnelle pour L dans l'intervalle $]s', s[$. Si Φ n'est pas dans $K[[x]]_{q,(s')}$, on a terminé, sinon on recommence. Comme il n'y a qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles, on en déduit le résultat. □

V Cas général

Nous considérons maintenant le cas général des équations de la forme (1):

$$\sum_{0}^{t} P_i(x)\Phi(\Phi^{[i]}(x)) = \theta(x)$$

où les P_i sont des séries entières de rayon de convergence non nul, ainsi que $\theta(x)$ et $\Phi(x)$.

Théorème 5.1

Soit L un opérateur de la forme (1), vérifiant les hypothèses précédentes et Φ une série formelle telle que $L(\Phi) = \theta$. Alors ou Φ est dans G ou il existe un unique nombre rationnel s tel que Φ appartienne à $K[[x]]_{q,s}$ mais pas à $K[[x]]_{q,(s)}$.

Nous procédons exactement comme dans [1]. Nous utilisons la série de Schroder associée à Φ, qui permet de se ramener au cas de $\Phi(x) = qx$ par conjuguaison analytique. Le fait que la série de Schroder associée à Φ converge est un résultat de Hermann et Yoccoz ([2], théorème 1, p.423). La démonstration se déroule alors exactement comme dans [1], en tenant compte des simplifications apportées par le cas ultramétrique, et nous omettons de donner une preuve complète, en renvoyant le lecteur à cette référence.

VI Le cas de module 1

Dans cette partie, nous considérons maintenant le cas où le coefficient q est de module un, mais n'est pas une racine de l'unité.

Nous nous contentons de regarder les opérateurs de la forme:

$$L(\Phi)(x) = \sum_{0}^{s} P_i(x)\Phi(q^i x)$$

où les P_i sont des polynômes.

Proposition 6.1

On note $Q(x)$ le polynôme égal à $\sum a_{i,j}x^i$ où $j = v(P_i)$. On suppose que, pour toute racine u de $(x-1)Q(x)$, on a une minoration de la forme $c_1 n^{-c_2} \le |q^n - u|$ pour tout n assez grand. Alors, pour tout couple de séries Φ, θ tel que $L(\Phi) = \theta$, si la série θ converge, il en est de même de la série Φ.

Démonstration. Là encore, la démonstration se déroule exactement comme dans [1]; nous laissons le soin au lecteur de vérifier les détails. □

VII Application

Dans cette partie, nous allons étudier un système d'équations fonctionnelles. Soient q_1 et q_2 deux éléments non nuls de $\bar{\mathbb{Q}}$, que nous supposons multiplicativement indépendants.

Nous considérons le système (S) suivant:

$$\sum_0^s P_i(x)\Phi(q_1^i x) = 0$$

$$\sum_0^t Q_i(x)\Phi(q_2^i x) = 0$$

Les P_i et les Q_i étant des polynômes à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$, avec P_0Q_0 non nul.

On a alors le résultat suivant:

Théorème 7.1

Toute solution série formelle à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$ du système (S) est une fraction rationnelle.

Réciproquement, il est clair que toute fraction rationnelle est solution d'un système de la forme (S).

Nous aurons besoin pour la démonstration de quelques résultats préliminaires.

Proposition 7.2

On note K soit le corps $\mathbb{C}$, soit le corps $\mathbb{C}_p$ pour un nombre premier p fixé. Soit Φ une série formelle de $K[[x]]$, solution d'une équation de la forme $\sum_0^s P_i(x)\Phi(q^i x) = 0$ où q est un élément non nul de K de valeur absolue inférieure à un, et les P_i des polynômes de $K[x]$ avec P_0 non nul. On suppose que Φ a un rayon de convergence non nul dans K. Alors Φ est méromorphe dans K tout entier, et ses pôles sont parmi les éléments de K de la forme γq^k avec k dans $\mathbb{Z}$ et γ zéro non nul de P_0.

Démonstration. Soit R le rayon de méromorphie de Φ dans K, qui est non nul puisqu'il en est ainsi du rayon de convergence. Supposons R fini; le rayon de méromorphie de $P_i(x)\Phi(q^i x)$ est alors $R|q|^{-i}$ si P_i est non nul. Par suite comme

$$P_0(x)\Phi(x) = -\sum_1^s P_i(x)\Phi(q^i x)$$

il en résulte que $R|q|^{-1} \leq R$, ce qui est absurde et démontre la première assertion.

Soit z un pôle de Φ; si $P_0(z)$ est non nul, il résulte de la relation fonctionnelle qu'il existe un entier i non nul tel que zq^i soit encore un pôle de Φ. Si la propriété indiquée dans la proposition n'était pas vraie, on construirait donc une suite x_n de pôles de Φ telle que l'on ait $x_{n+1} = q^{i_n} x_n$, où i_n est une suite d'entiers positifs non nuls. Comme une telle suite tend vers zéro, cette contradiction démontre le résultat. □

Proposition 7.3

Soit $\Phi = \sum_0^\infty a_n x^n$ une solution d'une équation fonctionnelle de la forme:

$$\sum_0^s P_i(x)\Phi(q^i x) = 0,$$

les hypothèses étant les mêmes que dans la proposition précédente, à l'exception de l'hypothèse de convergence sur Φ. Alors il existe un nombre rationnel s tel que la série $\sum_0^\infty a_n q^{sn(n+1)/2} x^n$ ait un rayon de convergence non nul et fini, sauf si Φ est un polynôme.

Démonstration. Si le rayon de convergence de Φ est nul, le résultat découle de [1], théorème 4.1.

Supposons que pour tout entier rationnel s la série $\sum_0^\infty a_n q^{sn(n+1)/2} x^n$ ait un rayon de convergence infini; nous allons alors démontrer que Φ est un polynôme. Les coefficients de Taylor de Φ satisfont à une relation de récurrence de la forme:

$$\sum_0^t T_i(q^n) a_{n+i} = 0$$

pour tout n assez grand, les T_i étant des polynômes avec T_0 non nul. On en déduit une relation de la forme:

$$|a_n| \leq c_1 |q|^{c_2 n} \sup_{1\leq j}(|a_{n+j}|)$$

pour tout n assez grand. Par récurrence sur m, on démontre alors que, avec $c_3 = |q|^{c_2}$:

$$|a_n| \leq c_1^m c_3^{mn+m(m-1)/2} \sup_{m \leq j} (|a_{n+j}|)$$

Par hypothèse, pour tout $\beta > 0$ on peut trouver α tel que l'on ait $|a(n)| \leq \alpha\beta^{n^2}$ pour tout n. Par suite, on a:

$$\sup_{m \leq j} (|a_{n+j}|) \leq \alpha\beta^{(n+m)^2}$$

donc

$$|a_n| \leq c_1^m c_3^{mn+m(m-1)/2} \alpha\beta^{(n+m)^2}$$

On choisit alors β assez petit, on fixe n et on fait tendre m vers l'infini, et on voit que le second membre de la dernière inégalité tend vers zéro, ce qui termine la démonstration. □

Remarque. On pourra trouver des résultats bien plus précis sur ce type de problèmes dans [5].

Proposition 7.4

On suppose en plus des hypothèses du théorème, qu'il existe un élément σ du groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ tel que $|q_1^\sigma|$ et $|q_2^\sigma|$ soient multiplicativement indépendants. Alors le théorème est vrai dans ce cas.

Démonstration. Nous allons utiliser les résultats de [1]. On peut supposer sans perte de généralité que $|q_1|$ et $|q_2|$ sont multiplicativement indépendants, et de plus que ces deux nombres sont de valeurs absolues plus petites que 1. Nous posons $\Phi(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ et nous supposons que Φ n'est pas un polynôme. D'après la proposition 4.5, il existe deux nombres rationnels s_1 et s_2 tel que les séries:

$$\sum_0^\infty a_n q_1^{s_1 n(n+1)/2} x^n \quad \text{et} \quad \sum_0^\infty a_n q_2^{s_2 n(n+1)/2} x^n$$

soient de rayon de convergence non nul et fini.

On en déduit que $|q_1|^{s_1/2} = |q_2|^{s_2/2}$, et par suite, puisque $|q_1|$ et $|q_2|$ sont multiplicativement indépendants, il en résulte que $s_1 = s_2 = 0$. Donc toute solution de (S) qui n'est pas un polynôme a un rayon de convergence non nul et fini. D'après la proposition 7.2, une telle solution est méromorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier; la caractérisation donnée pour les pôles montre alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles. Il existe donc un polynôme Q non nul tel que $\Psi = Q\Phi$ soit une fonction entière. Mais Ψ va vérifier un système analogue à celui vérifié par Φ; par suite Ψ est un polynôme, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 7.5. La démonstration précédente montre en fait que le théorème est vrai quand le corps de base est $\mathbb{C}$, avec l'hypothèse que $|q_1|$ et $|q_2|$ soient multiplicativement indépendants.

De plus, quand le corps de base est un corps K de caractéristique nulle quelconque, on voit que si q_1 et q_2 sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors toute solution série formelle du système (S) est une fraction rationnelle; en effet, on voit facilement qu'il existe un corps L de type fini sur $\mathbb{Q}$ contenant tous les coefficients des polynômes intervenant dans les équations fonctionnelles, les coefficients de Taylor de Φ et les nombres q_1 et q_2. On peut alors trouver une base de transcendance de L sur $\mathbb{Q}$ contenant q_1 et q_2, et par suite trouver un isomorphisme de L sur un sous-corps de $\mathbb{C}$ tel que les images de q_1 et de q_2 soient des éléments algébriquements indépendants de $\mathbb{C}$ quelconques. En les choisissant de modules multiplicativement indépendants, on peut alors appliquer le résultat précédent.

Proposition 7.6

Le résultat du théorème est vrai s'il existe un élément σ du groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$, tel que $|q_1^\sigma|$ ou $|q_2^\sigma|$ soit différent de un.

Nous supposons sans perte de généralité que σ est l'identité, et que $|q_1|$ est différent de 1. Si $|q_1|$ et $|q_2|$ sont multiplicativement indépendants, le résultat est donné par la proposition précédente. Dans le cas contraire, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ avec v non nul tels que $q = q_1^u q_2^v$ soit de module 1. La série Φ vérifie encore une équation fonctionnelle aux q-différences, de sorte que l'on peut supposer $|q_2| = 1$. On peut toujours supposer de plus que $|q_1| < 1$. D'après la proposition 7.3, si Φ n'est pas un polynôme, ce que nous supposons désormais, il existe un unique rationnel s tel que la série $\sum_0^\infty a_n q_1^{sn(n+1)/2} x^n$ ait un rayon de convergence non nul et fini. D'autre part, le théorème 6.1 de [1] et le fait que le corps de base est $\bar{\mathbb{Q}}$, qui entraine que pour tout u dans $\bar{\mathbb{Q}}$ la minoration $|q_2^n - u| \geq cn^{-d}$ pour des constantes positives c et d est vraie pour tout n assez grand, montre que le rayon de convergence de Φ est non nul. Il en résulte que s est négatif ou nul. Nous supposons tout d'abord que $s < 0$.

La suite a_n vérifie une relation de récurrence de la forme:

$$\sum_0^t T_i(q_2^n) a_{n+i} = 0.$$

On en tire une majoration pour a_n:

$$|a_n| \leq c_3 n^{c_4} \sup_{1 \leq j} \big(|a_{n+j}|\big)$$

pour n assez grand et d'autre part on a: $|a_n| \leq c_1 c_2^{n^2}$ avec $c_2 < 1$ car $s < 0$.

De la première relation, on tire que pour tout m entier positif on a:

$$|a_n| \leq c_3^m (n(n+1)...(n+m-1))^{c_4} \sup_{m \leq j} (|a_{n+j}|)$$

Utilisant alors la deuxième majoration, on voit que:

$$|a_n| \leq c_1 c_3^m \left((n+m)!\right)^{c_4} c_2^{(n+m)^2}$$

On fixe n, et on fait tendre m vers l'infini,le second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro, donc a_n est nul pour tout n assez grand et Φ est bien un polynôme.

Si maintenant $s = 0$, alors Φ a un rayon de convergence non nul et fini. Comme $|q_1| < 1$, on en déduit encore que Φ est une fonction méromorphe dans tout $\mathbb{C}$. Cette fonction aura encore un nombre fini de pôles par la même argumentation que précédemment. Par suite, il existe un polynôme Q tel que $\Psi = Q\Phi$ soit entière. La fonction Ψ vérifie encore un système de la forme (S), et par suite l'argumentation précédente montre que c'est un polynôme.

Proposition 7.7

Le résultat du théorème est vrai s'il existe un nombre premier p et un plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$ tel que pour ce plongement la valeur absolue de l'un des deux éléments q_1 ou q_2 soit différente de 1.

Nous notons $|x|$ la valeur absolue p-adique et nous supposons que $|q_1| < 1$. Les nombres $|q_1|$ et $|q_2|$ sont multiplicativement dépendants, car ce sont des puissances rationnelles de p; par suite on peut trouver deux nombres entiers rationnels u et v non nuls tous les deux tels que $q = q_1^u q_2^v$ soit de valeur absolue 1. Comme v est forcément non nul, ce nombre q est multiplicativement indépendant avec q_1. On voit facilement que la série Φ vérifie encore une équation fonctionnelle aux q-différences. Nous pouvons donc sans perte de généralité supposer que $|q_2| = 1$. Le raisonnement est alors le même que celui du cas correspondant dans $\mathbb{C}$.

Démonstration du Théorème 7.1. D'après les propositions 7.4 et 7.6, on peut supposer que tous les conjugués de q_1 et de q_2 sont de même valeurs absolues dans $\mathbb{C}$. De même, la proposition 7.7 nous montre que l'on peut supposer que, pour tout plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$, les nombres q_1 et q_2 ont même valeurs absolues. Soit $q = q_1 q_2^{-1}$; par les dernières propriétés, q est un entier algébrique; par les premières, cet entier algébrique a tous ses conjugués de module 1. Par un théorème bien connu de Kronecker, ceci implique que q est une racine de l'unité. Mais ceci entraine que q_1 et q_2 sont multiplicativement dépendants, ce qui est contraire à l'hypothèse faite, et termine la démonstration. □

Bibliographie

1. J.P. Bézivin, *Sur les équations fonctionnelles aux q-différences*, a paraitre.
2. M. Hermann et J.C. Yoccoz, Generalisation of some theorem of small divisors to non-archimedean fields (Geometric dynamics, Rio de Janeiro, 1981) *Lectures notes in Math.* **1007**, Springer, 1983.
3. B. Malgrange, Sur les points singuliers des équations différentielles, *Enseign Math.* **20** (1974), 147–176.
4. J.P. Ramis, Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, *Memoirs AMS* **48**, n^o 296, (1984).
5. J.P. Ramis, *About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations*, preprint février 1992.
6. P. Robba, On the index of p-adic differential operators I, *Ann. of Math.* **101** (1975), 280–316.
7. J.P. Serre, Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques, *Public Math. IHES* **12** (1962), 69–85.