Collect. Math. **43**, 2 (1992), 107–115

Comportement asymptotique d'un problème de perturbation singulière non classique

TAOUFIQ BENKIRAN

Faculté des Sciences Semlalia, Bb. Prince Moulay Abdellah, B.P.S 15 Département de Maths, Marrakech, Maroc

Received March 14, 1992. Revised September 3, 1992

ABSTRACT

In this paper, we study the asymptotic behavior of the solution of a non classical elliptic problem of singular perturbation when the limit problem has no solution.

Introduction. Ce travail est consacré à l'étude de comportement asymptotique de la solution d'un problème de perturbation singulière non classique:

$$(P_f)\begin{cases} L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon^2\big(u_\varepsilon^{(4)} - u_\varepsilon^{(2)}\big) - u_\varepsilon^{(2)} + u_\varepsilon = f \quad \text{sur }]0,\pi[\\ u_\varepsilon''(0) = u_\varepsilon''(\pi) = 0 \\ u_\varepsilon'''(0) = u_\varepsilon'''(\pi) = 0. \end{cases}$$

Le problème limite associé est:

$$(L_f)\begin{cases} Lu = -u^{(2)} + u = f \quad \text{sur }]0,\pi[\\ u''(0) = u''(\pi) = 0 \end{cases}$$

Le problème est non classique en ce sens que l'opérateur L et l'opérateur frontière sont de même ordre.

Lorsque f est assez régulière, nous avons montré la convergence de la solution du problème (P_f) vers celle du problème (L_f), lorsque ε tend vers zéro, cf. [1]. Lorsque f n'est pas dans l'espace de Sobolev $H^{1/2}(]0,\pi[)$, le problème (L_f) n'a pas de solution, nous montrons alors que la solution du problème (L_f) diverge dans $L^2(]0,\pi[)$.

Avant d'aborder l'étude du comportement de la solution u_ε d'un problème perturbé (P_f), si f n'est pas assez régulière, on se propose de commencer par deux lemmes:

Considérons les problèmes aux limites

$$(P_{f,\varepsilon})\begin{cases} L_\varepsilon \nu_\varepsilon = \varepsilon^2\left(\nu_\varepsilon^{(4)} - \nu_\varepsilon^{(2)}\right) - \nu_\varepsilon^{(2)} + \nu_\varepsilon = f \quad \text{sur }]0,\pi[\\ \nu_\varepsilon(0) = \nu_\varepsilon(\pi) = 0 \\ \nu_\varepsilon^{(2)}(0) = \nu_\varepsilon^{(2)}(\pi) = 0 \end{cases}$$

et

$$(P_{f,0})\begin{cases} L_0\nu = -\nu^{(2)} + \nu = f \quad \text{sur }]0,\pi[\\ \nu(0) = \nu(\pi) = 0. \end{cases}$$

Lemme 1

Pour f dans $L^2(]0,\pi[)$ donnée par

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n \sin nx, \qquad \sum_{n\geq 1} |f_n|^2 < +\infty, \tag{1}$$

la solution ν du problème $(P_{f,0})$ est donnée par

$$\nu(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{(1+n)^2} \sin nx \tag{2}$$

et celle ν_ε du problème $(P_{f,\varepsilon})$ est donnée par

$$\nu_\varepsilon(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{f_n}{(1+n^2)(1+\varepsilon^2 n^2)} \sin nx \tag{3}$$

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$, $(P_{f,\varepsilon})$ et $(P_{f,0})$ sont des problèmes de Sturn-Liouville d'ordre 4 et 2 respectivement.

$$L_\varepsilon = \varepsilon^2\left(\frac{d^4}{dx^4} - \frac{d^2}{dx^2}\right) - \frac{d^2}{dx^2} + I$$
$$D(L_\varepsilon) = \left\{u \in H^4(]0,\pi[) \cap H_0^1(]0,\pi[) : u^{(2)}(0) = u^{(2)}(\pi) = 0\right\}$$

et

$$L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + I$$
$$D(L_0) = H^2(]0,\pi[) \cap H_0^1(]0,\pi[)$$

Il est clair que les opérateurs L_ε et L_0 sont auto-adjoints. Les valeurs propres de L_ε et L_0 sont respectivement:

$$\lambda_{n,\varepsilon} = (1+n^2)(1+\varepsilon^2 n^2) \tag{4}$$
$$\lambda_{n,0} = (1+n^2) \tag{5}$$

Et les vecteurs propres normalisés:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx. \tag{6}$$

On fait donc appel à la théorie spectrale ([2], [3] et [5]): (φ_n) est un système orthonormal total de $L^2(]0,\pi[)$, donc si f est donnée par (1) alors la solution du problème $(P_{f,0})$ sur donnée (2) et celle du problème $(P_{f,\varepsilon})$ par (3). □

Exemples et remarques:

1°) Considérons les fonctions de $L^2(]0,\pi[)$:

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \tag{7}$$
$$\varphi_2(x) = \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n} \tag{8}$$

Les solutions des problèmes $(P_{\varphi_1,\varepsilon})$ et $(P_{\varphi_2,\varepsilon})$ sont données respectivement par:

$$\psi_{\varepsilon_1}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n\lambda_{n,\varepsilon}} \sin nx \tag{9}$$

et

$$\psi_{\varepsilon_2}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n\lambda_{n,\varepsilon}} \tag{10}$$

2°) L'ensemble E des solutions du problème:

$$\begin{cases} L_\varepsilon W_\varepsilon = 0 & \text{sur }]0,\pi[\\ W_\varepsilon^{(2)}(0) = W_\varepsilon^{(2)}(\pi) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

est un sous espace vectoriel de $H^4(]0,\pi[)$ de dimension 2 dont $(\varphi_1 - \psi_{\varepsilon_1})$, $(\varphi_2 - \psi_{\varepsilon_2})$ est une base:

$$a(\varphi_1 - \psi_{\varepsilon_1}) + b(\varphi_2 - \psi_{\varepsilon_2}) = 0$$

implique $a = b = 0$, il suffit de prendre $x = 0$ puis $x = \pi$.

3°) D'aprés [6], pour f dans $L^2(]0,\pi[)$ la solution du problème $(P_{f,\varepsilon})$ converge vers celle du problème $(P_{f,0})$ dans l'espace de Sobolev $H^2(]0,\pi[) \cap H_0^1(]0,\pi[)$.

Lemme 2

Soient, pour $\varepsilon > 0$ et $2 \leq r < 3$, les fonctions:

$$f_{\varepsilon r}(x) = \frac{x^r}{P_\varepsilon(x)} \qquad \text{où } P_\varepsilon(x) = (1+x^2)(1+\varepsilon^2 x^2) \tag{12}$$

On a alors:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\varepsilon r}(2n) = \frac{1}{4\varepsilon^{r-1}}\beta\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{3-r}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{r-2}}\right) \tag{13}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\varepsilon r}(2n+1) = \frac{1}{4\varepsilon^{r-1}}\beta\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{3-r}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{r-2}}\right) \tag{14}$$

où $\beta(p,q)$ désigne la fonction d'Euler Beta.

Preuve. Comme $2 \leq r < 3$ et $\varepsilon > 0$ alors $f_{\varepsilon r}$ est dans $L^1(]0,+\infty[)$, par le changement de variables $x = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{y}}$ on a:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_{\varepsilon r}(x)\,dx &= \frac{\varepsilon^{1-r}(1-\varepsilon^{r-1})}{2(1-\varepsilon^2)}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1-r}{2}}}{1+y}\,dy \\ &= \frac{\varepsilon^{1-r}(1-\varepsilon^{r-1})}{2(1-\varepsilon^2)}\beta\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{3-r}{2}\right)\end{aligned}$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme:

$$\int_0^\infty f_{\varepsilon r}(x)\,dx = \frac{1}{2\varepsilon^{r-1}}\beta\left(\tfrac{r-1}{2},\tfrac{3-r}{2}\right)(1+O(\varepsilon)). \tag{15}$$

D'autre part, en faisant appel à la formule d'Euler (cf. [7]): Pour g dans $C^1(]0,\infty[)$ et n un entier fixé on a:

$$\int_0^n Q(x)g'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} g(k) - \int_0^n g(x)\,dx - \left(\frac{g(0)+g(n)}{2}\right) \tag{16}$$

avec $Q(x) = (x - E(x) - 1/2)$ qui est périodique de période 1 et $|Q(x)| \leq 1/2$ ($E(x)$ désigne la partie entière de x). On obtient alors:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} g(k) - \int_0^n g(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^n |g'(x)|\,dx + |g(0)| + |g(n)|\right).$$

Appliquons ce résultat pour $g(x) = f_{\varepsilon r}(2x)$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_{\varepsilon r}(2k) - \frac{1}{2}\int_0^n f_{\varepsilon r}(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^{2n} |f'_{\varepsilon r}(x)|\,dx + |f_{\varepsilon r}(2n)|\right)$$

or pour $\varepsilon > 0$ et $2 \leq r \leq 3$, $f_{\varepsilon r}$ est dans $C^1([0,\infty[) \cap L^1(]0,\infty[)$ et $f'_{\varepsilon r}$ est dans $L^1(]0,\infty[)$. Nous sommes donc dans les conditions d'appliquer le théorème de Lebesgue, on aboutit alors:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_{\varepsilon r}(2n) - \frac{1}{2}\int_0^\infty f_{\varepsilon r}(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^\infty |f'_{\varepsilon r}(x)|\,dx \tag{17}$$

* Pour $2 < r < 3$:

$$f'_{\varepsilon r}(x) = \frac{rx^{r-1}}{(P_\varepsilon(x))} - 2(1+\varepsilon^2)\frac{x^{r+1}}{(P_\varepsilon(x))^2} - 4\varepsilon^2\frac{x^{r+3}}{(P_\varepsilon(x))^2}$$

d'où

$$\left|\int_0^\infty f'_{\varepsilon r}(x)\,dx\right| \leq I_1 + 2(1+\varepsilon^2)I_2 + 4\varepsilon^2 I_3$$

avec

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{rx^{r-1}}{P_\varepsilon(x)}\,dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{r+1}}{(P_\varepsilon(x))^2}\,dx, \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{x^{r+3}}{(P_\varepsilon(x))^2}\,dx$$

En posant $x = \varepsilon^{-1}y^{-1/2}$, on obtient

$$I_1 = \frac{r}{2}\varepsilon^{2-r}\int_0^\infty \frac{y^{1-r/2}}{(1+y)(1+\varepsilon^2 y)}\,dy \leq \frac{r}{2}\varepsilon^{2-r}\int_0^\infty \frac{y^{1-r/2}}{1+y}\,dy$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon^{2-r}}{2}\int_0^\infty \frac{y^{2-r/2}}{(1+y)(1+\varepsilon^2 y)^2}\,dy \leq \frac{\varepsilon^{2-r}}{2}\int_0^\infty \frac{y^{2-r/2}}{(1+y)^2}\,dy$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon^{-r}}{2}\int_0^\infty \frac{y^{1-r/2}}{(1+y)^2}\,dy$$

$*$ Pour $r = 2$:

$$f'_{\varepsilon 2}(x) = \frac{2x}{\left(P_\varepsilon(x)\right)^2} + 2\varepsilon^2 \frac{x^5}{\left(P_\varepsilon(x)\right)^2}$$

$$\left| \int_0^\infty f'_{\varepsilon 2}(x)\, dx \right| \leq 2J_1 + 2\varepsilon^2 J_2$$

avec

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{x}{\left(P_\varepsilon(x)\right)^2}\, dx, \quad J_2 = \int_0^\infty \frac{x^5}{\left(P_\varepsilon(x)\right)^2}\, dx,$$

$$J_1 \leq \int_0^\infty \frac{x}{\left(1+(x)^2\right)^2}\, dx$$

et avec le changement de variables: $x = \varepsilon^{-1} y^{-1/2}$

$$J_2 = \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)^2(1+\varepsilon^2 y)^2} \leq \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)^2}$$

Donc pour $2 \leq r < 3$, on peut écrire:

$$\left| \int_0^\infty f'_{\varepsilon r}(x)\, dx \right| \leq C\varepsilon^{2-r} \tag{18}$$

où C est une constante.

D'aprés (15), (17) et (18) on obtient le résultat voulu pour $2 \leq r < 3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{\varepsilon r}(2n) = \frac{1}{4\varepsilon^{r-1}}\, \beta\left(\tfrac{3-r}{2}, \tfrac{r-1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{r-2}}\right).$$

On procéde de la même manière pour obtenir (14), sauf pour la formule d'Euler, on prend $g(x) = f_r(2x+1)$. □

On prend le problème (P_f):

$$(P_f) : \begin{cases} L_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon^2 (u_\varepsilon^{(4)} - u_\varepsilon^{(2)}) - u_\varepsilon^{(2)} + u_\varepsilon = f \quad \text{sur }]0, \pi[\\ u''_\varepsilon(0) = u''_\varepsilon(\pi) = 0 \\ u'''_\varepsilon(0) = u'''_\varepsilon(\pi) = 0 \end{cases}$$

Théorème

Soit f une fonction de $L^2(]0,\pi[)$ donnée par:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \qquad \text{avec } \tfrac{1}{2} < \alpha < 1. \tag{19}$$

Alors la solution u_ε du problème (P_f) n'est pas bornée dans $L^2(]0,\pi[)$ et on a:

$$\int_0^\pi |u_\varepsilon(x)\,dx| = O(\varepsilon^{\alpha-1}). \tag{20}$$

Preuve. La fonction f donnée par (19) est dans $L^2(]0,\pi[)$ car $2\alpha > 1$, et n'est pas continue en zéro car son coefficient de Fourier n'est pas en $\theta(\frac{1}{n})$ cf. [4, p. 391]. Par conséquent f n'est pas dans $H^\alpha(]0,\pi[)$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$. D'aprés Lemme 1, la solution ν_ε du problème $(P_{f,\varepsilon})$ est de la forme:

$$\nu_\varepsilon(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \lambda_{n,\varepsilon}} \sin nx \tag{21}$$

On remarque que $w_\varepsilon = (u_\varepsilon - \nu_\varepsilon)$ est une solution du problème (11):

$$\begin{cases} L_\varepsilon w_\varepsilon = 0 & \text{sur }]0,\pi[\\ w_\varepsilon^{(2)}(0) = w_\varepsilon^{(2)}(\pi) = 0 \end{cases}$$

Donc, grâce à la remarque 2, il existe deux constantes $a(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ telles que:

$$u_\varepsilon = \nu_\varepsilon + a(\varepsilon)(\varphi_1 - \psi_{\varepsilon 1}) + b(\varepsilon)(\varphi_2 - \psi_{\varepsilon 2}) \tag{22}$$

où φ_i, $\psi_{\varepsilon i}$ $(i = 1,2)$ sont données dans la remarque 1. D'autre part d'aprés la remarque 3, le comportement asymptotique de u_ε est entièrement determiné par celui des constantes $a(\varepsilon)$ et $b(\varepsilon)$, que nous déterminerons par

$$u_\varepsilon^{(3)}(0) = u_\varepsilon^{(3)}(\pi) = 0, \tag{23}$$

i.e.,

$$(S_1)\begin{cases} \nu_\varepsilon^{(3)}(0) = a(\varepsilon)\,\psi_{\varepsilon 1}^{(3)}(0) + b(\varepsilon)\,\psi_{\varepsilon 2}^{(3)}(0) \\ \nu_\varepsilon^{(3)}(\pi) = a(\varepsilon)\,\psi_{\varepsilon 1}^{(3)}(\pi) + b(\varepsilon)\,\psi_{\varepsilon 2}^{(3)}(\pi) \end{cases}$$

Comme ν_ε est dans $H^4(]0,\pi[)$ on a alors:

$$\nu_\varepsilon^{(3)}(0) = -\sum_{n\geq 1}\frac{n^{3-\alpha}}{\lambda_{n,\varepsilon}} \qquad \nu_\varepsilon^{(3)}(\pi) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{n^{3-\alpha}}{\lambda_{n,\varepsilon}}$$

$$\psi_{\varepsilon 1}^{(3)}(0) = -\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_{n,\varepsilon}}n^2 \qquad \psi_{\varepsilon 1}^{(3)}(\pi) = \sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{\lambda_{n,\varepsilon}}$$

$$\psi_{\varepsilon 2}^{(3)}(0) = -\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{\lambda_{n,\varepsilon}} \qquad \psi_{\varepsilon 2}^{(3)}(\pi) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{\lambda_{n,\varepsilon}}$$

On rappelle que: $\lambda_{n,\varepsilon} = (1+n^2)(1+\varepsilon^2 n^2)$. Et comme toutes les séries sont même absolument convergentes on a alors, en sommant puis en faisant la différence des deux équations du système (S_1):

$$(S_2)\begin{cases} (b(\varepsilon)-a(\varepsilon))\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(2n)^2}{\lambda_{2n,\varepsilon}}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{(2n)^{3-\alpha}}{\lambda_{2n,\varepsilon}} \\ (b(\varepsilon)+a(\varepsilon))\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(2n+1)^2}{\lambda_{2n+1,\varepsilon}}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{(2n+1)^{3-\alpha}}{\lambda_{2n+1,\varepsilon}} \end{cases}$$

Nous faisons appel au lemme 2, pour $r \in (2, 3-\alpha)$:

$$(S_3)\begin{cases} (b(\varepsilon)-a(\varepsilon))\left(\frac{1}{4\varepsilon}\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})+O(1)\right) = \frac{1}{4\varepsilon^{2-\alpha}}\beta(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{2})+\lambda\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}}\right) \\ (b(\varepsilon)+a(\varepsilon))\left(\frac{1}{4\varepsilon}\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})+O(1)\right) = \frac{1}{4\varepsilon^{2-\alpha}}\beta(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{2})+\lambda\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}}\right) \end{cases}$$

or d'aprés la formule de complement on a

$$\beta(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$
$$\beta(\tfrac{\alpha}{2},\tfrac{2-\alpha}{2}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

On alors

$$(S_4)\begin{cases} (b(\varepsilon)-a(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}}(1+O(\varepsilon)) \\ (b(\varepsilon)+a(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}}(1+O(\varepsilon)) \end{cases}$$

Par conséquent

$$a(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\alpha})$$

et

$$b(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\alpha-1}).$$

Comme $(\varphi_i - \psi_{\varepsilon i})$ converge vers $(\varphi_i - \psi_{0i})$ dans l'espace $H^2(]0,\pi[)$ $(i = 1,2)$ et d'aprés (22) on a

$$\int_0^{\pi} u_\varepsilon(x)\, dx = O(\varepsilon^{\alpha-1})$$

Donc u_ε n'est pas bornée dans $L^2(0,\pi) \subset L^1(0,\pi)$.

Par conséquent u_ε n'est pas bornée dans $L^2(]0,\pi])$ et de plus:

$$\int_0^{\pi} \left|u_\varepsilon(x)\right| dx = O(\varepsilon^{\alpha-1}) \qquad 1/2 < \alpha < 1. \square$$

References

1. T. Benkiran, *Etude d'un problème de perturbation singulière elliptique non classique*, thèse de doctorat de l'université de Nancy I, juin 1989.
2. R. Dautry and J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et technique*, tome 5 (spectre des opérateurs), Masson, 1987.
3. C. George, *Cours d'Analyse supérieure, Décomposition spectrale des opérateurs*, tomes 2 et 3: Cours de D.E.A., NANCY I, 1983.
4. C. George, *Exercices et problèmes d'integration*, université de Nancy I, Gauthier-Viallars, 1980.
5. D. Huet, *Décomposition spectrale et opérateurs*, Presses Universitaires de France, Paris, 1976.
6. D. Huet, Stabilité et convergence dans les problèmes de perturbation singulière, *Jounal of asymptotic analysis* 2, (1989), 5–19.
7. E.D. Rainville, *Special functions*, The Macmillan company, New York, 1965.