

## Prolongement analytique et systèmes dynamiques discrets

AUGUSTIN FRUCHARD

*Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S.,  
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France*

Received March 9, 1992

### ABSTRACT

We present a new method of analytic continuation of series out of their disk of convergence. We then exhibit a connection with the phenomenon of bifurcation delay in a planar discrete dynamical system; the limit of the method is then related to a stop phenomenon.

### 1. Introduction

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence non nul. Pour obtenir un prolongement de cette série en dehors de son disque de convergence on utilise la fonction auxiliaire

$$f_{a,q}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n q^{-n^a}$$

où  $a$  et  $q$  sont deux réels strictement supérieurs à 1, et on considère

$$f_a(z) = \lim_{q \rightarrow 1} f_{a,q}(z)$$

La différence avec les méthodes abéliennes habituelles telles que celles de Lindelöf ou de Hardy est que, lorsque le paramètre  $a$  est appréciablement supérieur à 1, le terme perturbatif est trop fort et ne permet pas d'obtenir toute l'étoile de Mittag-Leffler de la série de départ; en contrepartie, dans la zone de convergence, la convergence est plus rapide que pour la méthode de Lindelöf (ce qui peut représenter

un intérêt pratique) selon le principe bien connu que “moins une méthode est puissante, plus elle est rapide”:

“The delicacy of a method of summation tends to be inversely proportional to its power” [5].

On peut cependant obtenir toute l'étoile de Mittag-Leffler en faisant tendre  $a$  vers 1. L'intérêt principal de cette nouvelle méthode de prolongement analytique provient de son lien étroit, lorsque  $a$  prend la valeur 2, avec un phénomène de retard à la bifurcation dans le système de  $\mathbb{R}^2$

$$(S) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon \\ y_{n+1} = 1 - \exp(x_n) y_n \end{cases}$$

L'article est écrit dans le langage infinitésimal dont l'utilisation a permis de simplifier notablement les preuves; ainsi les théorèmes 6.2.2 et 6.2.3 de [7], version Non-Standard du théorème des familles normales, permettent de remplacer l'étude de la convergence uniforme sur tout compact d'une famille de fonctions par l'estimation d'une fonction en un point. D'autre part ce langage convient parfaitement à la description de la dynamique d'un système à petit paramètre tel que le système (S).

## 2. Notations

On désignera par le symbole “ $\emptyset$ ” (resp. “ $\mathcal{L}$ ”, “ $@$ ”) toute quantité infiniment petite (resp. limitée, appréciable); deux occurrences de ce symbole ne désigneront pas forcément le même infiniment petit (resp. limité, appréciable).

Dans la manipulation de ces symboles, le signe “=” doit être pris au sens de l'implication; ainsi on a par exemple:  $@ = \mathcal{L}$ ; mais on n'a pas  $\mathcal{L} = @$ . Pour plus de précision on peut consulter [8].

Le symbole binaire “ $\simeq$ ” signifie “est infiniment proche de”; le symbole “ $\ll$ ” signifie “est appréciablement inférieur à”; par exemple  $1 \ll 2$ .

### 3. Prolongement analytique

3.1 Dans toute cette partie  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence non nul. On désignera par la même lettre  $f$  la série et son prolongement analytique radial.

DÉFINITION 3.2. L'étoile de Mittag-Leffler de  $f$  est le plus grand domaine étoilé par rapport à 0 sur lequel on peut prolonger  $f$  radialement. On note  $ML(f)$  ce domaine et  $SML(f)$  son  $S$ -intérieur:

$$SML(f) = \{z \text{ limité}; \forall x \simeq z, x \in ML(f)\}$$

EXEMPLE 3.3. L'étoile de Mittag-Leffler de la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} z^n$  est le plan complexe privé de la demi-droite fermée  $[1, +\infty[$ . Son  $S$ -intérieur est le domaine limité du plan privé du halo de  $[1, +\infty[$ .

Cet exemple permet de traiter le cas général, comme le montre le résultat suivant.

#### Théorème 3.4 (E. Borel)

Soit  $\varphi$  une fonction entière telle que pour tout  $z$  limité non infiniment proche de la demi-droite  $[1, +\infty[$ ,  $\varphi(z)$  est infiniment proche de  $1/(1-z)$ .

Soit  $\gamma$  est un lacet standard quelconque inclus dans  $ML(f)$  d'indice 1 par rapport au segment  $[0, z[$ .

Alors pour tout  $z$  dans  $SML(f)$ ,  $f(z)$  est infiniment proche de  $g(z)$  où  $g$  est la fonction définie par

$$(1) \quad g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \varphi\left(\frac{z}{u}\right) f(u) \frac{du}{u}$$

Démonstration. On vérifie que la fonction  $g$  définie par la formule (1) ne dépend pas du lacet choisi. Soit  $z$  dans  $SML(f)$  et soit  $\gamma$  un lacet standard quelconque inclus dans  $ML(f)$  d'indice 1 par rapport à  $[0, z]$ . On a:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{u-z} du = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{1-\frac{z}{u}} \frac{du}{u}$$

et  $1/(1-(z/u)) \simeq \varphi(z/u)$  pour tout  $u$  dans  $\gamma$ . Le lacet  $\gamma$  étant standard et l'intégrale d'une fonction infiniment petite sur un domaine limité étant infiniment petite, on a donc  $f(z) \simeq g(z)$ .  $\square$

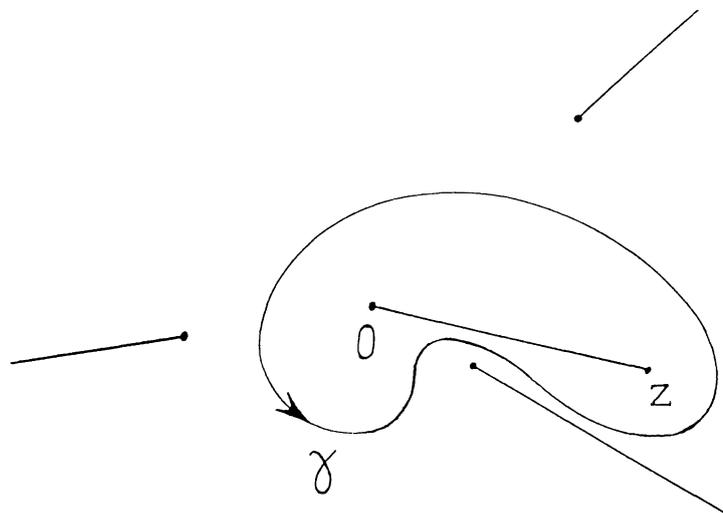


Figure 1

3.5 Ainsi, un procédé de sommation fonctionnant pour la série géométrique fonctionnera pour toute autre série entière. D'autre part, dans le cas d'un procédé ne sommant pas sur l'étoile de Mittag-Leffler en entier, la formule (1) permet de déduire de façon exacte la région de  $SML(f)$  où  $f$  et  $g$  sont infiniment proches à partir de la région où  $\varphi$  et  $1/(1-z)$  sont infiniment proches. Le cas de la série géométrique mérite donc une attention particulière.

3.6 Le cas de  $1/(1-z)$ . Soit  $q$  et  $a$  deux nombres réels strictement supérieurs à 1 et soit  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$s_n = q^{(-n^a)}.$$

On pose  $q = \exp(\varepsilon)$ , ce qui donne

$$s_n = \exp(-n^a \varepsilon).$$

Soit  $\varphi$  la fonction définie par

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} s_n z^n.$$

La règle de Hadamard sur le rayon de convergence donne ici:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{s_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{(-n^{a-1})} = +\infty$$

La fonction  $\varphi$  est donc entière. Si de plus  $q$  est infiniment proche de 1 on a le résultat suivant:

**Proposition 3.7**

Soit  $q$  et  $a$  réels strictement supérieurs à 1 tels que  $a$  est limité et  $q$  est infiniment proche de 1, soit  $\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} q^{(-n^a)} z^n$ . Si  $|z| \ll 1$  alors  $\varphi(z) \simeq 1/(1-z)$ .

*Démonstration.* La démonstration repose sur un simple argument de convergence dominée: soit  $z$  de module appréciablement inférieur à 1; on a pour tout  $n$  limité  $s_n \simeq 1$ , donc, puisque  $z$  est limité, pour tout  $N$  limité  $\sum_{n \leq N} s_n z^n \simeq \sum_{n \leq N} z^n$ . Par permanence il existe donc  $N$  infiniment grand tel que  $\sum_{n \leq N} s_n z^n \simeq \sum_{n \leq N} z^n$ . De plus, pour  $N$  infiniment grand, on a  $\sum_{n \leq N} z^n \simeq 1/(1-z)$  et, puisque  $|s_n| \leq 1$  pour tout  $n$ ,  $|\sum_{n > N} s_n z^n| \leq \sum_{n > N} |z|^n$ , qui est infiniment petit pour  $|z| \ll 1$ .  $\square$

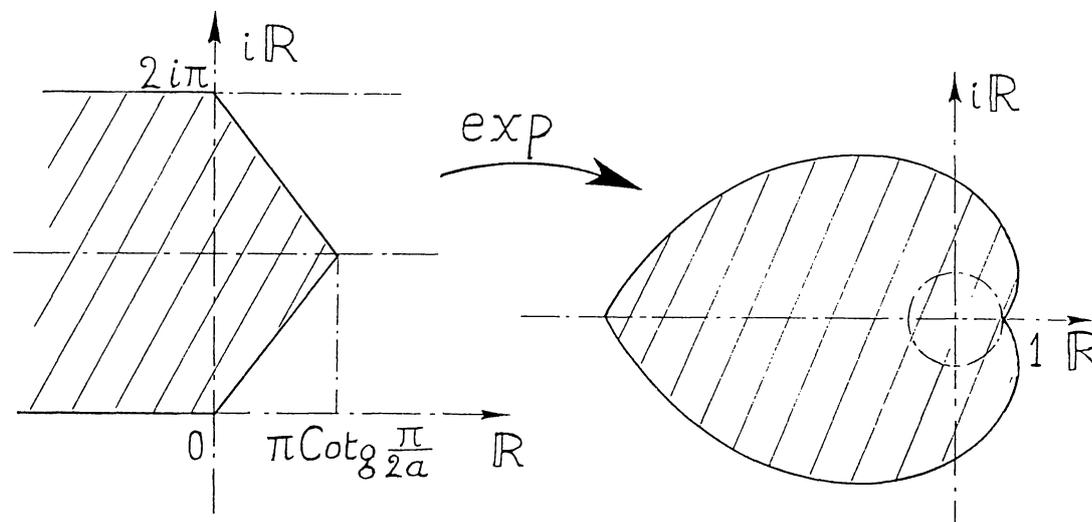
**Théorème 3.8**

Soit  $\varphi$  définie comme en 3.7 avec  $q$  infiniment proche de 1, soit  $\phi_a$  l'image par la fonction exponentielle de

$$\left\{ x \in \mathbb{C} : 0 < \Im x < 2\pi, \Re(x) \cos\left(\frac{\pi}{2a}\right) - \Im(x) \sin\left(\frac{\pi}{2a}\right) < 0, \right. \\ \left. \Re(x) \cos\left(\frac{\pi}{2a}\right) + (\Im(x) - 2\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2a}\right) < 0 \right\}$$

Soit  $S\phi_a$  le  $S$ -intérieur de  $\phi_a$ .

Alors pour tout  $z$  dans  $S\phi_a$  on a  $\varphi(z) \simeq 1/(1-z)$ .



$\phi_a$  et  $S\phi_a$  son  $S$ -intérieur (indiscernables)

Figure 2

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\varphi$  est limitée dans  $S\phi_a$ ; en effet d'après les théorèmes 6.2.2 et 6.2.3 de [7],  $\varphi$  sera alors  $S$ -continue sur  $S\phi_a$  et son ombre  ${}^o\varphi$  est analytique; or cette ombre coïncide avec  $1/(1-z)$  sur  $\{|z| \ll 1\}$  d'après la proposition 3.7. La région  $\phi_a$  étant simplement connexe, les deux fonctions  ${}^o\varphi$  et  $1/(1-z)$  coïncident sur  $\phi_a$ .

Pour estimer  $\varphi$ , on utilise une technique classique qui consiste à l'écrire sous forme intégrale en la considérant comme somme de résidus d'une fonction dépendant du paramètre  $z$ .

*Notations.* Posons  $\text{Log } z = x = \xi + i\eta$  et  $\varepsilon = \text{Log } q$ , où  $\text{Log}$  désigne la détermination principale du logarithme; soit  $f(x, u) = \exp[ux - u^a\varepsilon]$ , ainsi  $\varphi(z) = \sum_{n>0} f(x, n)$ ; posons  $u = R \exp(i\psi)$ ; soit  $\Phi_x(u) = -f(x, u)/(\exp(2i\pi u) - 1)$ ; pour  $\theta$  dans  $]0, \pi[$ , soit  $C(\theta)$  le contour composé de la réunion des deux demi-droites

$$\Delta^+ = [1/2, +\infty[ \cdot \exp(-i\theta),$$

$$\Delta^- = [1/2, +\infty[ \cdot \exp(i\theta),$$

et de l'arc de cercle

$$\gamma_0 = \{1/2 \cdot \exp(-it), -\theta \leq t \leq \theta\}$$

parcouru dans le sens ascendant (indirect).

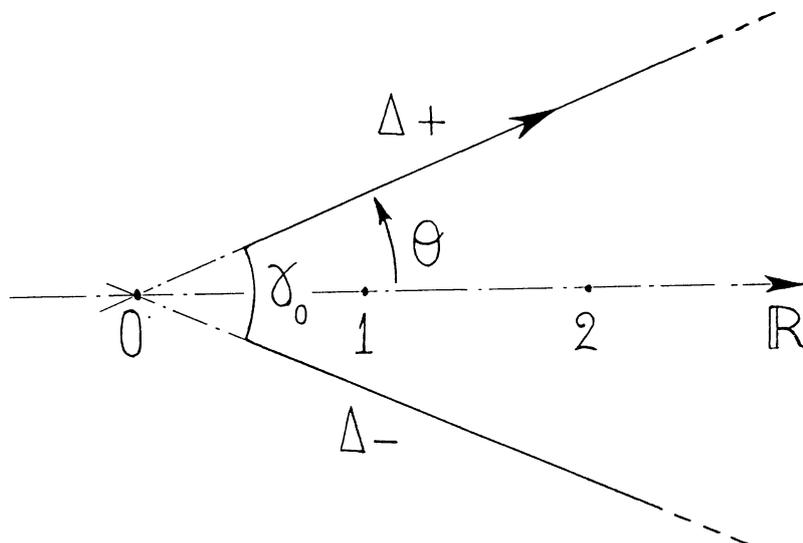


Figure 3

La démonstration du théorème repose sur les deux lemmes suivants.

**Lemme 1**

Si  $\theta < \frac{\pi}{2a}$ , l'intégrale  $\int_{C(\theta)} \Phi_x(u) du$  converge et est égale à  $\varphi(z)$ .

**Lemme 2**

Soit  $x = \xi + i\eta$  un point limité du plan; on a les implications:

$$\begin{aligned} \xi \cos\left(\frac{\pi}{2a}\right) - \eta \sin\left(\frac{\pi}{2a}\right) \ll 0 &\implies \int_{\Delta^+} \Phi_x(u) du = \mathcal{L}, \\ \xi \cos\left(\frac{\pi}{2a}\right) + (\eta - 2\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2a}\right) \ll 0 &\implies \int_{\Delta^-} \Phi_x(u) du = \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Pour la démonstration des deux lemmes, on utilise les notations suivantes.

Soit  $N$  un entier et soit  $C_N(\theta)$  le contour composé de la réunion des deux segments

$$\begin{aligned} \Delta_N^+ &= [1/2, N + 1/2[ \cdot \exp(i\theta), \\ \Delta_N^- &= [1/2, N + 1/2[ \cdot \exp(-i\theta), \end{aligned}$$

et des arcs de cercle

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \{1/2 \cdot \exp(-it), -\theta \leq t \leq \theta\} \\ \gamma_N &= \{(N + 1/2) \cdot \exp(-it), -\theta \leq t \leq \theta\} \end{aligned}$$

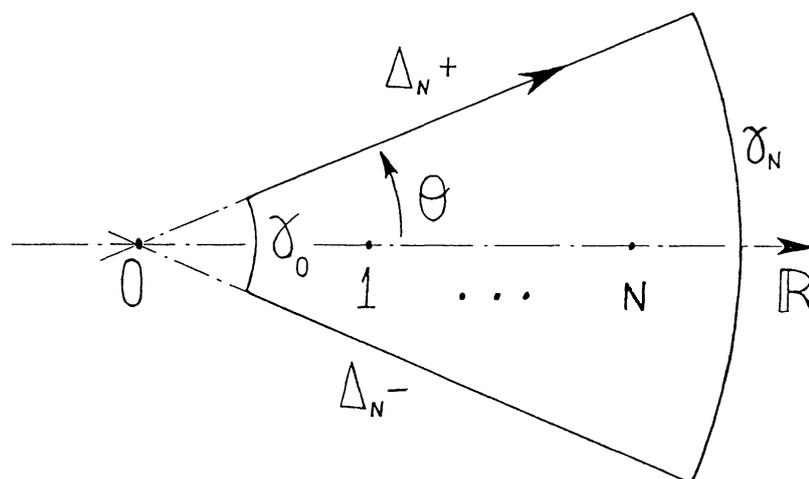


Figure 4

Ainsi on a

$$\int_{C_N(\theta)} \Phi_x(u) du = \sum_{0 < n \leq N} f(x, n).$$

*Démonstration du lemme 1.* Il suffit donc de montrer que les intégrales  $\int_{\Delta^+} \Phi_x(u) du$  et  $\int_{\Delta^-} \Phi_x(u) du$  convergent, et que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_N} \Phi_x(u) du = 0$$

Pour le dénominateur, on vérifie que l'on a les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} \text{sur } \Delta^+, & \quad |\exp(2i\pi u) - 1| \geq 1 - \exp(-\pi \sin \theta); \\ \text{sur } \Delta^-, & \quad |\exp(2i\pi u) - 1| \geq \exp(\pi \sin \theta) - 1; \\ \text{sur } \gamma_0 \text{ et } \gamma_N, & \quad |\exp(2i\pi u) - 1| \geq 1 - \exp(-\pi). \end{aligned}$$

Donc pour tout  $N$  et tout  $u$  sur  $\gamma_N$ ,  $1/(\exp(2i\pi u) - 1) = \mathcal{L}$ .

Pour le numérateur:

$$|f(x, u)| = \exp[\Re(ux - u^a \varepsilon)].$$

Avec les notations  $x = \xi + i\eta$  et  $u = R \exp(i\psi)$  on obtient

$$|f(x, u)| = \exp[R\xi \cos \psi - R\eta \sin \psi - \varepsilon R^a \cos(a\psi)]$$

Si  $\theta < \frac{\pi}{2a}$  alors  $\cos a\psi \geq \cos a\theta > 0$ ; le terme dominant lorsque  $R$  tend vers l'infini est donc  $\varepsilon R^a \cos(a\psi)$  et on en déduit la convergence des deux intégrales  $\int_{\Delta^+} \Phi_x$  et  $\int_{\Delta^-} \Phi_x$  en  $\exp(-kR^a)$ , d'où le lemme 1.  $\square$

*Démonstration du lemme 2.* On choisit  $\theta$  infiniment proche de  $\frac{\pi}{2a}$ ; on a alors pour  $x$  limité:

sur  $\Delta^+$ ,  $\psi \simeq \frac{\pi}{2a}$ , donc

$$\begin{aligned} |f(x, u)| &= \exp\left[R\left(\xi \cos \frac{\pi}{2a} - \eta \sin \frac{\pi}{2a} + \vartheta\right)\right] \exp\left[-R^a \left(\cos \frac{\pi}{2a} + \vartheta\right)\right] \\ &= \mathcal{L} \exp\left[R\left(\xi \cos \frac{\pi}{2a} - \eta \sin \frac{\pi}{2a} + \vartheta\right)\right] \end{aligned}$$

La formule  $|\exp(a + ib) - 1| \geq |e^a \cos b - 1|$  donne

$$|\exp(2i\pi u) - 1| \geq 1 - \exp[-2\pi R(\sin \frac{\pi}{2a} + \vartheta)] \cos[2\pi R(\cos \frac{\pi}{2a} + \vartheta)] = \textcircled{a}$$

donc  $|\Phi_x(u)| = \mathcal{L} \exp\left[R\left(\xi \cos \frac{\pi}{2a} - \eta \sin \frac{\pi}{2a} + \vartheta\right)\right]$ ,

sur  $\Delta^-$ ,  $\psi \simeq \frac{-\pi}{2a}$  donc  $|f(x, u)| = \exp[R(\xi \cos \frac{\pi}{2a} + \eta \sin \frac{\pi}{2a} + \phi)]$  et

$$|\exp(2i\pi u) - 1| = @ \exp[2\pi R(\sin \frac{\pi}{2a} + \phi)];$$

donc  $|\Phi_x(u)| = \mathcal{L} \exp[R(\xi \cos \frac{\pi}{2a} + (\eta - 2\pi) \sin \frac{\pi}{2a} + \phi)]$ .

On conclut alors en utilisant la formule  $\int_0^{+\infty} \mathcal{L} \exp(-|@|R) dR = \mathcal{L}$ .  $\square$

Pour obtenir un prolongement de notre série  $f$  on peut en pratique choisir  $a = q$ , ce qui conduit au résultat suivant:

### Théorème 3.9

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence non nul. Soit  $f$  son prolongement radial,  $ML(f)$  son étoile de Mittag-Leffler et, pour  $q$  strictement supérieur à 1,  $f_q$  la fonction entière définie par

$$f_q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n q^{-n^q}.$$

Alors pour tout  $z$  dans  $ML(f)$  on a

$$\lim_{q \rightarrow 1} f_q(z) = f(z).$$

*Démonstration.* Si  $a = q$ ,  $a$  est infiniment proche de 1, et dans ce cas la région  $S\phi_a$  coïncide avec  $SML(f)$ ; le théorème 3.4 s'applique alors.  $\square$

## 4. Systèmes discrets lents-rapides

4.1 On considère le système de  $\mathbb{R}^2$

$$(S) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon \\ y_{n+1} = 1 - \exp(x_n) y_n \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est un nombre donné positif et  $(x_0, y_0)$  un point donné limité du plan.

Pour  $\varepsilon = 0$  on obtient le système réduit

$$(S_0) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = 1 - \exp(x_n) y_n \end{cases}$$

ce qui revient à étudier la dynamique de la suite  $(y_n)$  en fonction de  $x_0$ : le seul point fixe est  $y = e(x) = 1/(1 + \exp(x))$ , attractif si  $x$  est négatif et répulsif pour  $x$  positif, la valeur  $x = 0$  correspondant à une bifurcation.

Lorsque  $\varepsilon$  est non nul le système ne contient plus ni point fixe ni orbite périodique hormis le point à l'infini; néanmoins si  $\varepsilon$  est infiniment petit, le système (S) est une perturbation du système  $(S_0)$  et la dynamique de  $(S_0)$  permet de décrire partiellement la dynamique de (S) [3]:

Si  $(x_0, y_0)$  est limité et  $x_0$  appréciablement négatif, alors pour tout  $n$  infiniment grand tel que  $x_n$  est appréciablement négatif, on a  $y_n \simeq e(x_n)$ .

En particulier pour  $n$  infiniment grand tel que  $n\varepsilon$  est infiniment petit on a, en posant  $x_e = {}^o x_0$ ,  $x_n \simeq x_e$  et  $y_n \simeq e(x_e)$ .

Autrement dit, l'orbite de  $(x_0, y_0)$  entre dans le halo de la courbe  $y = e(x)$  à l'abscisse d'entrée  $x_e = {}^o x_0$  et longe cette courbe tant que  $x_n$  est négatif.

4.2 On peut se demander ce qu'il advient lorsque le "paramètre"  $x$  traverse la valeur de bifurcation  $x = 0$ , ce qui correspond au diagramme de bifurcation dynamique. On peut montrer ([1], [3]) qu'il se passe un phénomène de retard à la bifurcation: l'orbite d'un point limité  $(x_0, y_0)$ , avec  $x_0$  appréciablement négatif, continue à longer la courbe  $y = e(x)$  sur une portion appréciable de sa partie répulsive; de plus on a localement une relation entrée-sortie symétrique: si  $|x_0|$  est suffisamment petit l'orbite du point  $(x_0, y_0)$  entre dans le halo de la courbe  $y = e(x)$  à l'abscisse  $x_e = {}^o x_0$  et en sort à l'abscisse symétrique  $x_s = -x_e$ .

Si l'on s'intéresse au problème d'un point de vue global, on observe un phénomène de butée en  $-\pi$  et  $\pi$ :

L'orbite d'un point limité  $(x_0, y_0)$  avec  $x_0 \ll -\pi$  et  $y_0 \neq e(x_0)$  entre dans le halo de la courbe  $y = e(x)$  à l'abscisse  $x_0$  et en sort à l'abscisse  $\pi$ .

Par contraposée une orbite  $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  quittant le halo de la courbe  $y = e(x)$  à une abscisse appréciablement supérieure à  $\pi$  est nécessairement entrée à l'abscisse  $-\pi$ .

Pour expliquer ce phénomène de butée on peut utiliser les résultats du paragraphe 3 en les appliquant à des fonctions invariantes par le système (S), c'est-à-dire des fonctions solutions de l'équation aux différences

$$\varphi(x + \varepsilon) = 1 - \exp(x) \varphi(x)$$

L'intérêt de ces fonctions invariantes est de structurer toute la dynamique du système discret (S). En effet l'écart entre une orbite discrète et une fonction invariante  $w_n = y_n - \varphi(x_n)$  est solution de l'équation homogène  $w_{n+1} = -\exp(x_n) w_n$

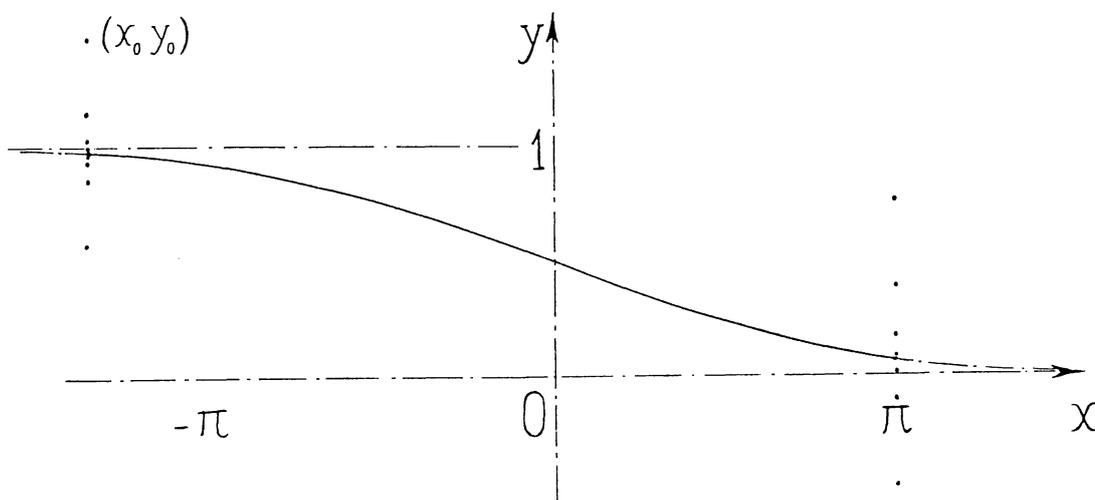


Figure 5

dont l'étude est beaucoup plus facile: la loupe de Benoit  $Z = \varepsilon \text{Log} |w|$  ramène à  $Z_{n+1} = Z_n + \varepsilon x_n$ ; on en déduit  $Z_n = Z_0 + \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} x_i \simeq Z_0 + \int_{x_0}^{x_n} x dx$  ce qui conduit à la relation entrée-sortie symétrique pour l'inconnue  $w$ .

Les deux fonctions suivantes sont invariantes par (S):

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \exp(nx) \exp\left(-\frac{n(n+1)}{2} \varepsilon\right)$$

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \exp(-nx) \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2} \varepsilon\right)$$

En les considérant comme fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , le théorème 3.8 appliqué au cas  $a = 2$  nous permet d'affirmer que ces deux fonctions sont infiniment proches l'une de l'autre dans le  $S$ -intérieur des carrés  $C_n$  de sommets  $-\pi + 2ni\pi$ ,  $\pi + 2ni\pi$ ,  $(2n-1)i\pi$  et  $(2n+1)i\pi$ .

En effet en posant  $q = \exp(\varepsilon/2)$ ,  $z = \exp(x + i\pi - \varepsilon/2)$  et en définissant  $f_1$  par  $f_1(z) = f(x)$ , on obtient

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} z^n q^{-n^2}$$

qui est infiniment proche de  $1/(1-z)$  lorsque  $z$  est dans  $S\phi_2$ , c'est-à-dire lorsque  $x$  est appréciablement dans la partie gauche de la bande  $-\pi < \Im x < \pi$  délimitée par les

deux droites  $\mathbb{R} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) + \pi$  et  $\mathbb{R} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) + \pi + i\pi$ ; en posant  $v = \exp(-x + i\pi + \varepsilon/2)$  et en définissant  $g_1$  par  $g_1(v) = g(x)$ , on obtient

$$g_1(v) = - \sum_{n \geq 0} v^n q^{-n^2}$$

qui est infiniment proche de  $1 - 1/(1 - v) = 1/(1 - (1/v))$  lorsque  $v$  est dans  $S\phi_2$ , c'est-à-dire lorsque  $x$  est appréciablement dans la partie droite de la bande  $0 < \Im x < 2\pi$  délimitée par les deux droites  $\mathbb{R} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) - \pi$  et  $\mathbb{R} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) + i\pi - \pi$ .

Une expérimentation numérique montre que cette région est optimale: il n'existe pas de point limité appréciablement à l'extérieur de ces carrés dans le halo duquel les deux fonctions soient infiniment proches.

### Remerciements

Je tiens à remercier J.P. Ramis et J.L. Callot qui m'ont suggéré l'existence d'un lien entre le phénomène de retard à la bifurcation dans les systèmes lents-rapides discrets et la méthode de sommation de Lindelöf.

### Références

1. C. Baesens, Courbes invariantes d'une application lente-rapide analytique et retard à la bifurcation de dédoublement de période, *CEN Saclay*, (preprint, 1991).
2. A. Delcroix, *Notes du cours de DEA de J.L. Callot sur les fonctions analytiques*, 1991.
3. A. Fruchard, *Canards Discrets*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 7, 1991.
4. G.H. Hardy, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.
5. G.H. Hardy, On the summability of series by Borel's and Mittag-Leffler's methods, *Journal of the London Mathematical Society* **9** (1934), 153–157.
6. E. Lindelöf, *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
7. A. Robinson, *Non-standard analysis*, North-Holland, 1966.
8. I. Van den Berg, *Non-Standard Asymptotic Analysis*, Lecture Notes in Math. **1249**, Springer-Verlag, 1987.