*Collect. Math.* **42**, 2 (1991), 95–124


# Existence d'un contrôle optimal via l'analyse non standard

Patricia Spinelli

*Université de Nice, Laboratoire de Mathématiques*

*Parc Valrose, 06 034 Nice cedex, France*

Georges Solay Rakotonirainy

*Logement no. 876, Cité des 67 Ha*

*101 Antananarivo, Madagascar*



Received November 20, 1987. Revised June 4, 1991

Abstract

In this article, we want to show that it is possible to give a complete theory about the existence of an optimal control, without introducing any functional space, by means of the Non Standard Analysis, (see [15]).

## 0. Introduction

Nous considérons le classique problème de contrôle en temps minimum (voir par exemple [9]):

$$(P) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u) & u \in \Omega,\ x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 & \\ x(T) = x_1 & \text{minimiser } T. \end{cases}$$

On appelle temps minimum, et on note $T^*$, la borne inférieure des $T$ ci-dessus. Il existe de nombreuses approches classiques de ce problème [1] [6] [7] [8] [9] [10] [16] [17] [18]. Il est connu que:

1) Si l'ensemble

$$\Gamma(x) = \{f(x,u) \ : \ u \in \Omega\}$$

est convexe, alors il existe un contrôle optimal.

2) Si $\Gamma(x)$ n'est pas convexe on peut associer au problème $P$ un problème $P_1$, dit problème relaxé, qui possède une solution optimale à laquelle on peut associer une suite de contrôles du problème originel dont la durée tend vers le temps minimum, c'ést à dire une "suite minimissante".

Ce sont ces deux résultats que nous réconsiderons avec les possibilités de l'Analyse Non Standard. Nous introduisons l'objet non classique suivant:

"Un contrôle **quasi-optimal** est un contrôle qui assure le transport de $x_0$ à $x_1$ en une durée **infiniment proche** de le durée minimale $T^*$ ",

dont l'équivalent classique est précisément une "suite minimisante".

Dans l'approche classique les "suites minimisantes de contrôles"ne prennent leur efficacité que dans la mesure où on peut leur associer des limites ce qui nécessite qu'on se place dans des espaces fonctionnels convenables qui sont soit des espaces $L^p$, soit des espaces plus abstraits (Mesures de Young). L'approche non standard qui fixe **un** contrôle **quasi-optimal** permet d'échapper à ces constructions.

Notre approche non standard des problèmes de contrôle optimal n'est pas la première. Il faut signaler celle de Cutland [3]. Mais, à part le fait qu'elles font toutes deux usage des infinitésimaux, elles sont trés différentes:

1) Nous utilisons le formalisme I.S.T. de Nelson [Internal Set Theory, Bull. Amer. Math. Soc. **83**], popularisé par Lutz et Goze [Nonstandard Analysis, Lect. Notes in Math., no. 881] puis par F. Diener [4] et M. Diener [5], à la place du formalisme de Robinson utilisé par Cutland.

2) Nous n'utilisons pas comme dans [3] la mesure de Loeb (qui est une construction non standard spécifique) et ne faisons référence qu'à des résultats de la théorie classique de l'intégration.

3) Cutland étudie le problème de contrôle à valeur finale non fixée à l'avance, ce qui conduit à une théorie de la relaxation un peu différente.

Dans la conclusion nous faisons le parallèle entre notre approche et celle, classique, de Warga [16].

## 1. Terminologie et généralités

Notre problème de contrôle sera défini d'une manière générale par un processus, lequel est caractérisé par un vecteur d'état $x$ appartenant à $\mathbb{R}^n$, obéissant à l'équation d'évolution:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

où la variable $u$, désignant le paramètre de contrôle, appartient à une partie $\Omega$ de $\mathbb{R}^p$. Nous supposons que $\Omega$ est une partie standard compacte et que $f$ est une application standard de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de classe $C^1$ au moins en $x$ et continue en $u$.

On pourrait prendre une hypothèse plus générale, par exemple, $f$ mesurable en $u$, mais c'est un cas que l'on rencontre rarement dans la pratique et qui compliquerait inutilement les démonstrations qui vont suivre.

DÉFINITION 1.1. Un **contrôle** est une application interne mesurable $\mathcal{U}(\cdot)$ définie sur un intervalle fermé borné $[0, T_{\mathcal{U}}]$ de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\Omega$.

Ce contrôle nous permet de définir une équation différentielle ordinaire:

$$\frac{dx}{dt}(t) = f\big(x(t), \mathcal{U}(t)\big)$$

et c'est sous cette forme que nous allons intégrer l'équation différentielle.

On remarque qu'une fois le contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ choisi, l'application $f$ est écrite sous la forme $g(x,t)$ où $g$ est une application de classe $C^1$ au moins en $x$ et mesurable en $t$; l'existence et l'unicité locales des solutions résultent des théorèmes généraux, mais pour alléger l'exposé, nous faisons l'hypothèse (H) ci-dessous:

**(H)** *Il existe deux réels $C$ et $K$ (standards car $f$ et $\Omega$ le sont) strictement positifs tel que:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \Omega, \quad \big\langle x, f(x,u)\big\rangle \leq C + K\,\|x\|^2$$

qui nous assure que, si $\mathcal{U}(\cdot)$ est un contrôle défini sur un intervalle $[0, T_{\mathcal{U}}]$ à valeurs dans $\Omega$ et $x_0$ un point de $\mathbb{R}^n$, la solution de:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f\big(x, \mathcal{U}(t)\big) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

est définie sur tout l'intervalle $[0, T_{\mathcal{U}}]$. Celle-ci est notée $x\big(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)\big)$ ou pourra être remplacée par $x(t, \mathcal{U}(\cdot))$ ou simplement $x(t)$ s'il n'y a aucune confusion possible; cette solution est également appelée réponse dans la terminologie classique.

De plus l'hypothèse (H) nous garantit, lorsque $x_0$ est limité, que la réponse

$$t \longmapsto x\big(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)\big)$$

reste limitée en temps limité; on obtient ce résultat en utilisant l'inégalité de Gronwall.

## 2. Ombre d'une réponse

Nous considérons dans notre problème, outre les contrôles standard, les contrôles non standard; les réponses correspondant à ces derniers, comme nous le savons, ne sont pas standard mais nous allons montrer que chacune d'elles possède une ombre (Théo 2.3) et que celle-ci satisfait une inclusion différentielle (Théo 2.5).

À partir de maintenant et pour toute la suite, nous nous fixons deux points standard et distincts de $\mathbb{R}^n$, $x_0$ et $x_1$. Etant donné un contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$, nous allons imposer à la solution correspondante $x(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot))$ de passer par le point $x_1$ à l'instant $T_{\mathcal{U}}$, d'où la définition:

DÉFINITION 2.1. On dit que le contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ est **$x_0x_1$-admissible** si:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad t < T_{\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \quad x(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) \neq x_1 \\ &\text{ii)} \quad x(T_{\mathcal{U}}, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) = x_1. \end{aligned}$$

Le réel $T_{\mathcal{U}}$ est appelé dans ce cas **durée du contrôle** $\mathcal{U}(\cdot)$ et on dit que le point $x_1$ de $\mathbb{R}^n$ est **$x_0$-accessible.**

On désigne par $U_{x_0x_1}$ l'ensemble des contrôles $x_0x_1$-admissibles. Puisque les points $x_0$ et $x_1$ sont standard, $U_{x_0x_1}$ est un ensemble (interne) standard mais il contient en général des éléments non standard.

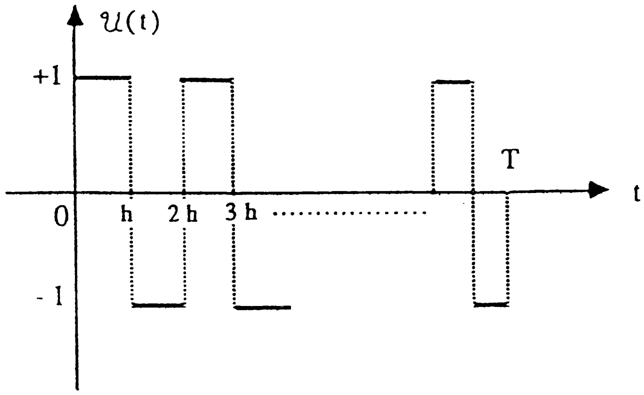
Dans la définition 2.1 ci-dessus, étant donné un contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$, on aurait pu imposer à la durée $T_{\mathcal{U}}$ correspondante d'être limitée mais cela nous mènerait à bien des complications, car l'ensemble $U_{x_0x_1}$ ne serait plus, dans ce cas, interne mais externe; nous reviendrons sur tout cela dans le paragraphe 5 quand nous aborderons le "problème relaxé".

EXEMPLE 2.2: Nous allons donner un exemple de contrôle admissible non standard. Soit le problème de Zermelo-Filippov:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y^2 \\ \dot{y} = u \end{cases}$$

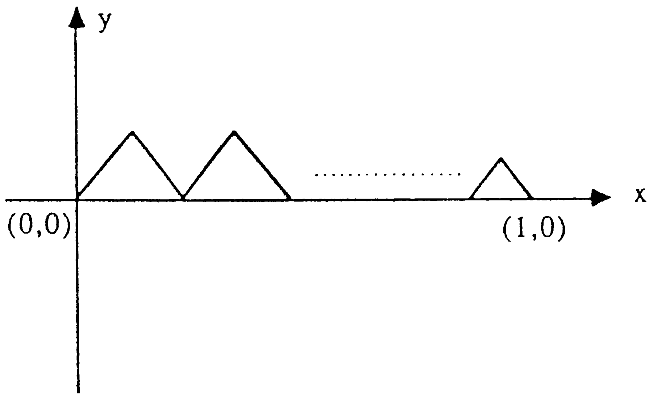
le contrôle $u$ ne pouvant prendre que des valeurs égales à +1 ou -1. Il s'agit de transférer en temps minimum le point $(0,0)$ au point $(1,0)$. Le contrôle $\mathcal{U}_h(\cdot)$ défini par la figure 1, constant par morceaux est $x_0x_1$-admissible si l'on choisit convenablement la dernière commutation; si $h$ est infiniment petit, le contrôle $\mathcal{U}_h(\cdot)$ est non standard. Sur la figure 2 est représentée la trajectorie correspondante.

Figure 1




Contrôle

Figure 2




Trajectoire

On voit que $\mathcal{U}(\cdot)$ n'a pas d'ombre, mais la réponse en a une; ce cas est général.

**Théorèm 2.3**

*Soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle non nécessairement standard mais tel que $T_{\mathcal{U}}$ soit limité. La trajectoire $t \mapsto x(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot))$ possède une ombre sur l'intervalle $[0, T_{\mathcal{U}}]$.*

*Démonstration.* Montrons que la trajectoire correspondant à $\mathcal{U}(\cdot)$ est $S^0$ ($S$-continue et limitée en tout point). Grâce à l'hypothèse (H), on sait que $x(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot))$ est limitée pour tout $t$ limité. Soient $t_1$ et $t_2$ deux réels dans $[0, T_{\mathcal{U}}]$ tels que $t_1$ soit équivalent à $t_2$ alors $x(t_1, x_0, \mathcal{U}(\cdot))$ et $x(t_2, x_0, \mathcal{U}(\cdot))$ sont équivalents. Prenons la boule $B$ de centre ${}^0x(t_1, x_0, \mathcal{U}(\cdot))$ et de rayon 1; $B$ est standard. L'application $f$ étant standard et continue, il existe une constante standard $K_B$ telle que:

$$\forall x(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) \in B \qquad \|f(x(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)), \mathcal{U}(t))\| \leq K_B$$

Dans cette boule, la vitesse est limitée donc le temps $t_B$ pour lequel on en sort est appréciable; $t_2$ étant infiniment proche de $t_1$, on a $t_2 \leq t_B$. On peut alors faire la majoration:

$$\left\|x(t_2,x_0,\mathcal{U}(\cdot)) - x(t_1,x_0,\mathcal{U}(\cdot))\right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\|f(x(s,x_0,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s))\right\| ds$$

$$\left\|x(t_2,x_0,\mathcal{U}(\cdot)) - x(t_1,x_0,\mathcal{U}(\cdot))\right\| \leq K_B(t_2 - t_1)$$

Puisque $t_1$ et $t_2$ sont équivalents et $K_B$ standard, on en déduit que:

$$x(t_2,x_0,\mathcal{U}(\cdot)) \simeq x(t_1,x_0,\mathcal{U}(\cdot))$$

Ceci prouve que la trajectorie $t \mapsto x(t,x_0,\mathcal{U}(\cdot))$ est de classe $S^0$. Donc elle possède une ombre. □

**Proposition 2.4**

*Soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle $x_0x_1$-admissible dont la durée $T_{\mathcal{U}}$ est limitée. Si $\mathcal{U}(\cdot)$ est $S$-continu, alors on a:*

$$^0T_{\mathcal{U}} = T_{^0\mathcal{U}}$$

$$^0x(t,x_0,\mathcal{U}(\cdot)) = x(t,x_0,{}^0\mathcal{U}(\cdot)), \quad t \leq \min({}^0T_{\mathcal{U}}, T_{^0\mathcal{U}})$$

*Démonstration.* Le contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ étant $S$-continu à valeurs dans un compact standard $\Omega$, il possède une ombre, notée $^0\mathcal{U}(\cdot)$; celle-ci est continue par définition. L'application $f$ étant standard, $x$ et $t$ limités, les deux champs

$$f(x,\mathcal{U}(t)) \qquad \text{et} \qquad f(x,{}^0\mathcal{U}(t))$$

sont infiniment proches. Après une petite adaptation du lemme de l'ombre courte [11] (mesurabilité des fonctions en $t$), nous obtenons l'équivalence des trajectories:

$$x(t,x_0,\mathcal{U}(\cdot)) \simeq x(t,x_0,{}^0\mathcal{U}(\cdot))$$

et $^0\mathcal{U}(\cdot)$ étant standard:

$$^0x(t,x_0,\mathcal{U}(\cdot)) = x(t,x_0,{}^0\mathcal{U}(\cdot))$$

D'autre part:

$$x({}^0T_{\mathcal{U}},x_0,{}^0\mathcal{U}(\cdot)) \simeq x(T_{\mathcal{U}},x_0,\mathcal{U}(\cdot)) \quad (= x_1)$$

or $t \mapsto x(t,x_0,{}^0\mathcal{U}(\cdot))$ est une trajectorie standard, le point $x_1$ est également standard, d'où l'égalité. □

Tout ceci nous permet de prouver un théorème où nous ferons appel à la notion de moyennisation (voir annexe).

On désigne par $\Gamma(x)$, l'ensemble égal à $\{f(x,u) \ : \ u \in \Omega\}$ où $x$ est fixé dans $\mathbb{R}^n$ et par ${}^{co}\Gamma(x)$ son enveloppe convexe.

**Théorèm 2.5**

*Soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle non nécessairement standard avec $T_{\mathcal{U}}$ limitée. Alors on a:*

$$\frac{d\,{}^0x}{dt}(t,x_o,\mathcal{U}(\cdot)) \in {}^{co}\Gamma\big({}^0x(t,x_0,\mathcal{U}(\cdot))\big)$$

*presque partout sur* $[0,{}^0T_{\mathcal{U}}]$.

*Démonstration.* Nous noterons $t \mapsto x(t,\mathcal{U}(\cdot))$ la réponse au contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$, issue de $x_0$. Nous savons que $t \mapsto x(t,\mathcal{U}(\cdot))$ possède une ombre continue d'après le théorème 2.3. Nous notons $\hat{f}$, l'application

$$s \longmapsto \hat{f}(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s))$$

"moyennisée"(voir annexe) de l'application

$$s \longmapsto f(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s))$$

(on remarque que $x(t,\mathcal{U}(\cdot))$ étant limitée, $s \mapsto f(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s))$ est intégrable sur $[0,t]$, d'intégrale limitée). On a donc, d'après le corollaire A.10 en Annexe:

$$\int_0^t f\Big(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\,ds \simeq \int_0^t \hat{f}\Big(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\,ds$$

d'où:

$${}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)) = x_0 + \int_0^t \hat{f}\Big(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\,ds$$

ce qui prouve que $t \mapsto {}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot))$ est absolument continue sur $[0,{}^0T_{\mathcal{U}}]$ donc dérivable presque partout sur $[0,{}^0T_{\mathcal{U}}]$. De plus:

$$\frac{d\,{}^0x}{dt}(t,\mathcal{U}(\cdot)) = \hat{f}\Big(x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(t)\Big), \qquad \text{p.p. sur } [0,{}^0T_{\mathcal{U}}].$$

Il reste à montrer que $\hat{f}(x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(t))$ appartient à ${}^{co}\Gamma\big({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot))\big)$ presque partout sur $[0,{}^0T_{\mathcal{U}}]$.D'après la définition A.8 en annexe, on sait qu'il existe un réel $h$ infiniment petit tel que presque partout sur $[0,{}^0T_{\mathcal{U}}]$ on ait:

$$\hat{f}\Big(x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(t)\Big) \simeq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\Big(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\,ds$$

or:
$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\Big(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\,ds = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\Big({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\,ds$$
$$+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\Big[f\Big(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big) - f\Big({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\Big]\,ds$$

le terme $1/h \int_t^{t+h}[f(x(s,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)) - f({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s))]\,ds$ est infiniment petit car $f$ est $S$-continue ainsi que $x(s,\mathcal{U}(\cdot))$.

Il est connu que:
$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f\Big({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(s)\Big)\,ds \in {}^{co}\Gamma\Big({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot))\Big) \qquad \text{p.p.}$$

On en déduit que:
$$\hat{f}\Big(x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(t)\Big) \in \mathrm{Hal}\Big({}^{co}\Gamma({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)))\Big) \qquad \text{p.p.}$$

d'autre part, pour tout $t$ standard, l'ensemble ${}^{co}\Gamma({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)))$ est un fermé standard, donc:
$$\hat{f}\Big(x(t,\mathcal{U}(\cdot)),\mathcal{U}(t)\Big) \in {}^{co}\Gamma({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot)))$$

Enfin, en appliquant le principe de Transfert, ceci reste vrai presque partout sur $[0,{}^0T_{\mathcal{U}}]$, d'où le résultat:
$$\frac{d\,{}^0x}{dt}(t,\mathcal{U}(\cdot)) \in {}^{co}\Gamma\Big({}^0x(t,\mathcal{U}(\cdot))\Big) \qquad \text{p.p.} \quad \square$$

## 3. Contrôles quasi-optimaux

Soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle $x_0x_1$-admissible, $T_{\mathcal{U}}$ sa durée. Notre problème consiste à trouver parmi les contrôles $x_0x_1$-admissibles celui dont la durée est minimale (s'il existe). Un tel contrôle est dit optimal.

DÉFINITION 3.1. Le contrôle $\mathcal{U}^*(\cdot)$ est **optimal** s'il est $x_0x_1$-admissible et si pour tout contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ $x_0x_1$-admissible, on a:
$$T_{\mathcal{U}^*} \leq T_{\mathcal{U}}.$$

L'ensemble $\mathcal{U}_{x_0x_1}$ étant standard, on remarque que la borne inférieure de l'ensemble $\{T_{\mathcal{U}}\ ;\ \mathcal{U}(\cdot) \in U_{x_0x_1}\}$ existe toujours et est égale à un standard $T^*$ strictement positif. On dit que $T^*$ **est le temps optimal.** Par définition, si $\mathcal{U}^*(\cdot)$ est un contrôle optimal alors $T_{\mathcal{U}^*}$ est égal à $T^*$. Néanmoins, l'existence de la borne inférieure $T^*$ n'implique pas qu'il soit toujours possible de trouver un contrôle $\mathcal{U}^*(\cdot)$ $x_0x_1$-admissible qui l'atteigne, nous pouvons nous en rendre compte avec l'exemple suivant.

EXEMPLE 3.2: Nous reprenons l'exemple 2.2. On voit facilement que le temps optimal $T^*$ est égal à 1 (il suffit de prendre le contrôle de l'exemple 2.2 dont la durée est infiniment proche de 1). Cependant, il n'existe pas de contrôle optimal pour ce problème même dans la classe des contrôles mesurables. En effet, supposons qu'il existe un contrôle optimal $\mathcal{U}^*(\cdot)$ qui transfère le point $(0,0)$ au point $(1,0)$ en un temps égal à 1, on aurait alors:

$$x^*(1) = 1 - \int_0^1 y^{*2}(s)\,ds = 1$$

d'où:

$$y^*(s) = 0 \qquad \text{presque partout sur } [0,1]$$

or $y^*(t)$ est égal a $\int_0^t \mathcal{U}^*(s)\,ds$ donc:

$$\int_0^t \mathcal{U}^*(s)\,ds = 0 \qquad \text{presque partout sur } [0,1].$$

Ceci nous amène à une contradiction; en effet, $\mathcal{U}^*(\cdot)$ étant mesurable sur $[0,1]$, l'ensemble $\mathcal{U}^{*-1}\{1\}$ est aussi mesurable. Supposons que $\mathcal{U}^{*-1}\{1\}$ soit de mesure non nulle (dans le cas contraire, on prendrait $\mathcal{U}^{*-1}\{-1\}$). D'après le théorème de densité de Lebesgue [11], presque tout point de l'ensemble mesurable $\mathcal{U}^{*-1}\{1\}$ est un point de densité de $\mathcal{U}^{*-1}\{1\}$ c'est à dire que presque partout $t \in \mathcal{U}^{*-1}\{1\}$:

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathcal{U}^*(s)\,ds \simeq 1 \qquad \text{avec } h \simeq 0$$

d'où la contradiction car l'intégrale $\int_t^{t+h} \mathcal{U}^*(s)\,ds$ est égale presque partout à zéro.

Toutefois, par définition de la borne inférieure $T^*$, il existe toujours des contrôles $x_0x_1$-admissibles dont les durées sont infiniment proches de $T^*$. Nous appelons de tels contrôles des contrôles quasi-optimaux.

DÉFINITION 3.3. Le contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ est **quasi-optimal** s'il est $x_0x_1$-admissible et si sa durée $T_{\mathcal{U}}$ est équivalente à $T^*$.

**Théorèm 3.4**

*Il existe toujours un contrôle quasi-optimal.*

*Démonstration.* Cela découle immédiatement de la définition de la borne inférieure.
□

Remarquons qu'un contrôle quasi-optimal n'est généralement pas standard; le contrôle $\mathcal{U}_h(\cdot)$ défini dans l'exemple 2.2 est quasi-optimal si $h$ est infiniment petit et il est non standard. D'autre part, la définition de la quasi-optimalité est externe, les contrôles quasi-optimaux ne constituent pas, à priori, un ensemble (interne).

Nous pouvons remarquer également qu'un contrôle quasi-optimal n'est pas unique. Reprenons l'exemple 2.2, soit $\mathcal{U}_h(\cdot)$ (avec $H$ infiniment petit), un contrôle quasi-optimal, alors les contrôles $\mathcal{U}_{h/2}(\cdot)$, $\mathcal{U}_{h/4}(\cdot)$, ..., $\mathcal{U}_{h/2^p}(\cdot)$, ... sont également quasi-optimaux.

**Proposition 3.5**

*Si $\mathcal{U}^*(\cdot)$ est un contrôle quasi-optimal standard alors il est optimal.*

*Démonstration.* Le contrôle $\mathcal{U}^*(\cdot)$ étant standard, sa durée $T_{\mathcal{U}^*}$ est standard; par définition, $T_{\mathcal{U}^*}$ est équivalente à $T^*$ qui est également standard, on obtient alors leur égalité. □

Il est clair que si $\mathcal{U}(\cdot)$ est un contrôle quasi-optimal, sa durée $T_{\mathcal{U}}$ est limitée puisqu'elle est infiniment proche du temps optimal $T^*$ qui est standard.

**Proposition 3.6**

*Soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle quasi-optimal. Si $\mathcal{U}(\cdot)$ est S-continue alors ${}^0\mathcal{U}(\cdot)$ est un contrôle optimal.*

*Démonstration.* D'après la proposition 2.4, on sait que le contrôle ${}^0\mathcal{U}(\cdot)$ est $x_0x_1$-admissible de durée ${}^0T_{\mathcal{U}}$; la durée $T_{\mathcal{U}}$ étant équivalente à $T^*$, on obtient l'égalité de $T_{{}^0\mathcal{U}}$ et de $T^*$. □

Notre problème était de trouver un contrôle $x_0x_1$-admissible dont la durée est égale au temps minimum $T^*$; si ce problème n'a pas de solution, nous pouvons nous contenter de prendre comme solution, un contrôle quasi-optimal quelconque; sa durée n'est pas, bien sûr, égale au temps minimum $T^*$ mais elle en est infiniment proche.

## 4. Théorème d'existence

Nous allons nous servir ici de la définition de contrôle quasi-optimal pour démontrer le théorème classique d'existence du contrôle optimal.

Rappelons d'abord notre problème de contrôle; il a été défini par le système différentiel suivant:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), \mathcal{U}(t)\big) \\ x(0) = x_0 \\ x(T_{\mathcal{U}}) = x_1 \\ \text{Minimiser } T_{\mathcal{U}} \end{cases} \qquad 0 \le t \le T_{\mathcal{U}}.$$

Nous avons désigné par $\Gamma(x)$ l'ensemble $\{f(x,u) \ : \ u \in \Omega\}$ où $x$ est fixé dans $\mathbb{R}^n$ et par ${}^{co}\Gamma(x)$ son enveloppe convexe. Pour démontrer le théorème d'existence du contrôle optimal, mous utiliserons comme dans les théories classiques un théorème dû à Filippov-Castaing (dit théorème de sélection) [16, p.153].

**Théorèm 4.1**

*Si pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\Gamma(x)$ est convexe, alors il existe un contrôle optimal $\mathcal{U}^*(\cdot)$ pour le problème $(P_1)$.*

*Démonstration.* Soit $T^*$ le temps optimal du problème $(P_1)$. Soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle quasi-optimal de $(P_1)$. On sait d'après le théorème 2.5 que:

$$\frac{d\,{}^0x}{dt}(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) \in {}^{co}\Gamma\Big({}^0x\big(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)\big)\Big) \qquad \text{p.p. sur } [0, T^*].$$

Comme par hypothèse, $\Gamma(x)$ est convexe pour tout $x$, on a:

$${}^{co}\Gamma\Big({}^0x\big(t, x_o, \mathcal{U}(\cdot)\big)\Big) = \Gamma\Big({}^0x\big(t, x_o, \mathcal{U}(\cdot)\big)\Big)$$

donc:

$$\frac{d\,{}^0x}{dt}(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) \in \Gamma\Big({}^0x\big(t, x_o, \mathcal{U}(\cdot)\big)\Big) \qquad \text{p.p. sur } [0, T^*].$$

D'après le théorème de Filippov-Castaing, il existe une "sélection"mesurable de $\Gamma$, c'est à dire une application $t \longmapsto \mathcal{V}(t)$ à valeurs dans $\Omega$ telle que:

$$\frac{d\,{}^0x}{dt}(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) = f\Big({}^0x\big(t, x_o, \mathcal{U}(\cdot)\big), \mathcal{V}(t)\Big) \qquad \text{p.p. sur } [0, T^*].$$

D'après l'unicité des solution d'une équation différentielle, on obtient:

$$^{0}x\big(t,x_0,\mathcal{U}(\cdot)\big) = x\big(t,x_0,\mathcal{V}(\cdot)\big)$$

D'autre part, il est facile de vérifier que $\mathcal{V}(\cdot)$ est bien $x_0x_1$-admissible, c'est à dire que:

$$\begin{cases} x\big(0,x_0,\mathcal{V}(\cdot)\big) & = x_0 \\ x\big(T^*,x_0,\mathcal{V}(\cdot)\big) & = x_1 \end{cases}.$$

On a alors démontré l'existence d'un contrôle $\mathcal{V}(\cdot)$ $x_0x_1$-admissible de durée $T^*$: c'est donc un contrôle optimal. □

L'hypothèse de convexité de l'ensemble $\Gamma(x)$ était nécessaire afin de satisfaire à une des hypothèses du théorème de Filippov-Castaing. Dans le cas où l'ensemble n'est plus convexe, nous n'aurions plus la conclusion du théorème 4.1. Une méthode classique est de "convexifier"le problème $(P_1)$: C'est le but du paragraphe suivant.

## 5. Problème relaxé

Nous considérons le cas où l'ensemble $\Gamma(x)$ n'est pas convexe; nous allons associer au problème $(P_1)$ un autre problème noté $(R)$ dont l'ensemble des vitesses possibles est convexe, donc en utilisant le théorème précédent 4.1, nous obtiendrons une solution optimale pour le problème $(R)$ et nous construisons à partit de cette solution optimale une solution quasi-optimale pour le problème $(P_1)$. Le problème $(R)$ associé au problème $(P_1)$ est le suivant:

$$(R) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) \in {}^{co}\Gamma\big(x(t)\big) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_1 \\ \text{Minimiser } T \end{cases} \qquad t \in [0,T].$$

On appelle le problème $(R)$, le **problème relaxé**. Il est connu [6] [16] qu'en général, en présence de contraintes sur l'état, le coût minimum du problème $(P_1)$ peut être strictement supérieur au coût du problème relaxé $(R)$. Toutefois, nous n'avons pas trouvé explicitement de contre-exemple dans la littérature pour le problème du temps minimum. pour la logique de l'exposé, il était nécessaire d'en trouver un, ou bien de montrer que $T_1{}^*$ est égal à $T_R{}^*$ dans le cas particulier du temps minimum. C'est un contre-exemple qui a été trouvé.

Commençons par donner une définition précise de nos deux problèmes. Soit le problème de contrôle en temps minimum:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, \mathcal{U}(\cdot)) \\ x(0) = x_0 \\ x(T_{\mathcal{U}}) = x_1 \\ \text{Minimiser } T_{\mathcal{U}} \end{cases} \qquad t \in [0, T_{\mathcal{U}}].$$

On suppose que l'ensemble $\Gamma(x)$ (que nous notons ici $\Gamma_1(x)$) n'est pas convexe. Il n'existe donc pas nécessairement de solution optimale pour ce problème.

Nous définissons le problème relaxé comme suit:

$$(R) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f(x, \mathcal{U}_i(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x(T_{\mathcal{U}}) = x_1 \\ \text{Minimiser } T_{\mathcal{U}} \end{cases} \qquad t \in [0, T_{\mathcal{U}}]$$

où $\mathcal{U}(t) = \big(\mathcal{U}_1(t), \dots, \mathcal{U}_{n+1}(t)\big)$ appartient à $\Omega^{n+1}$ et $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n+1}(t)\big)$ se trouve dans le simplex $\Lambda_{n+1}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par:

$$\Lambda_{n+1} = \Big\{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \alpha_i \geq 0 \ \forall i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1\Big\}.$$

Nous pouvons remarquer, qu'avec cette définition, l'ensemble $\Gamma_R(x)$ (correspondant au problème $(R)$) est égal à l'enveloppe convexe de $\Gamma_1(x)$. En effet, rappelons-nous le théorème de Carathéodory [13] qui nous dit que pour décrire l'enveloppe convexe d'un sous ensemble $S$ de $\mathbb{R}^n$, il suffit d'écrire chaque point de cette enveloppe convexe comme combinaison linéaire d'au plus $n+1$ points de $S$. Nous nous retrouvons donc dans la situation du théorème 4.1, ce qui nous permet de dire que le problème relaxé $(R)$ possède au moins une solution optimale.

Nous désignerons par $T_1{}^*$ le temps optimal du problème originel $(P_1)$, par $T_R{}^*$ celui du problème $(R)$ et par $\big(\alpha(\cdot), \mathcal{U}_R{}^*(\cdot)\big)$ un contrôle optimal du problème relaxé.

De manière évidente, on remarque que:

$$T_R{}^* \leq T_1{}^*.$$

En effet, les contrôles originels sont des cas particuliers des contrôles relaxés, il suffit de prendre tous les $\alpha_i(t)$ nuls sauf un qui sera égal à 1. Par contre, on n'a pas toujours l'égalité de $T_R{}^*$ et de $T_1{}^*$, le contre-exemple ci-dessous nous le prouve. L'idée de ce contre-exemple est de fabriquer un système pour lequel les états accessibles en un temps inférieur ou égal à 0.5 ne soit pas fermé, mais le soit pour un temps supérieur à 1.

CONTRE-EXEMPLE 5.1: Soit le système différentiel:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1-y^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} + (1-v) \begin{pmatrix} h_1(x,z) \\ 0 \\ h_2(x,z) \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Les contrôles sont $u$ et $v$:

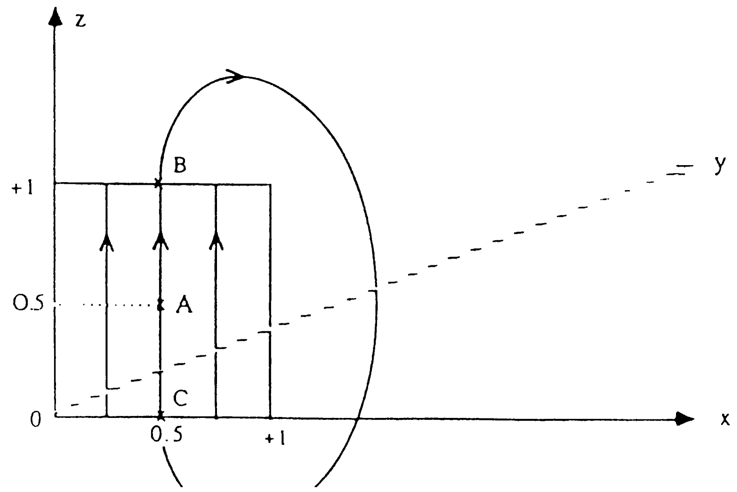
$$u \in \{-1, 1\}$$
$$v \in \{0, 1\}.$$

Les fonctions $h_1$ et $h_2$ ne dépendent pas de $y$ et sont choisies de telle manière que d'une part:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} h_1(x,z) = 0 \\ h_2(x,z) = 1 \end{cases}$$

d'autre part la trajectoire issue du point $B = (0.5; 0; 1)$ retourne au point $C = (0.5; 0; 0)$ comme indiqué sur la figure suivante:

Figure 3



Considérons maintenant le problème de contrôle "Aller de l'origine au point $A$ de coordonnées $(0.5; 0; 0.5)$ en temps minimum". Si l'on fait $v = 0$, la vitesse en $x$ est nulle. Faisons donc $v = 1$, nous avons:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y^2 \\ \dot{y} = u \\ \dot{z} = 1 \end{cases}$$

Nous reconnaissons dans les deux premières équations le système 2.2; nous savons construire un contrôle $\mathcal{U}_h(\cdot)$ (exemple 3.2) qui atteint le point $(0.5; 0)$ en un temps infiniment proche de 0.5 mais **strictement supérieur à** 0.5 et nous savons qu'il n'existe pas de contrôle atteignant le point $(0.5; 0)$ en un temps égal à 0.5. Ceci entraîne pour le système (5.1) que les trajectoires correspondant à $v = 1$ peuvent passer à l'instant 0.5 infiniment près du point $A$ mais pas l'atteindre.

Pour le problème relaxé, les contrôles $v = 1$ et $u = 0$ nous donnent la vitesse maximale en $x$ et $z$. La trajectoire correspondante passe par le point $A$ à l'instant 0.5. Le temps $T_R{}^*$ est donc dans ce cas 0.5.

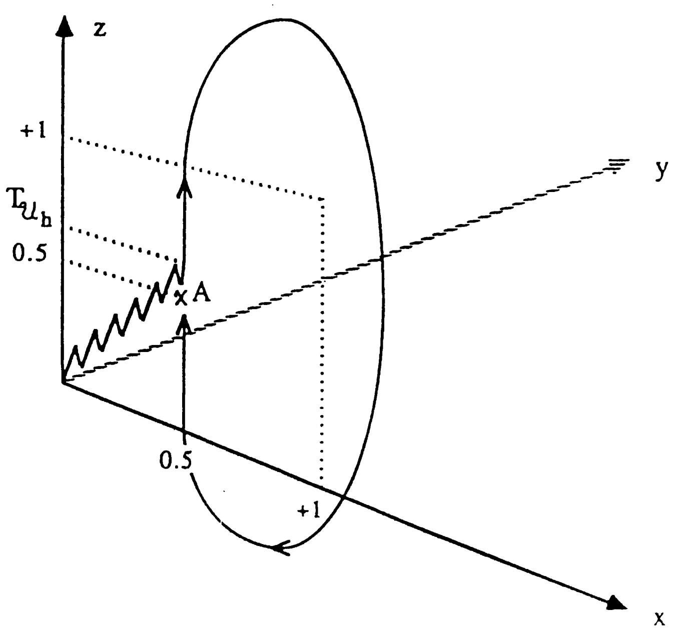
Montrons que $T_1{}^*$ est bien défini (c'est à dire que le point $A$ de coordonnées $(0.5; 0; 0.5)$ est accessible à partit de l'origine) et qu'il est strictement supérieur à 0.5. Il est évident que pour tout contrôle, toute trajectoire issue de l'origine ne peut quitter la "boite"$[0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$ avant l'instant $t = 1$; tant que nous sommes dans la "boite", la meilleure vitesse en $x$ est obtenue pour $v = 1$ car pour $v = 0$, par choix de $h_1$, elle est nulle. Un contrôle de la forme $\mathcal{U}_h(\cdot)$ comme ci-dessus est donc la meilleure politique pour atteindre le point $A$, mais nous venons de voir que c'est impossible pour $t$ inférieur ou égal à 0.5 et donc pour $t$ inférieur à 1 car $z(t)$ est égal à $t$ tant que nous n'avons pas quitté la "boite". Si le point $A$ est accessible, ce sera donc en un temps supérieur à 1.

Le point $A$ est effectivement accessible, nous pouvons le voir de la manière suivante: prenons le contrôle $(\mathcal{U}_h(\cdot), 1)$ pour commencer; à l'instant $T_{\mathcal{U}_h}$ infiniment proche de 0.5 ($T_{\mathcal{U}_h} > 0.5$), nous sommes au point $(0.5; 0; T_{\mathcal{U}_h})$. A partir de là, faisons

$$u = +1 \quad (\text{ou } -1) \quad \text{et} \quad v = 0,$$

jusqu'à ce que la trajectoire, après avoir tourné autour de la "boite"repasse par le point $(0.5; 0; 0)$ puis remonte jusqu'au point désiré (c'est à dire que l'on utilise les trajectoires du champ $(h_1(x, z), h_2(x, z))$.

Figure 4




*Remarque:* Nous n'avons pas su construire de contre-exemple en dimension 2.

La seule possibilité pour obtenir l'egalité entre $T_1{}^*$ et $T_R{}^*$ est donc de modifier la définition du problème ($P_1$) en remplaçant la définition de $x_0x_1$-admissibilité par celle de $x_0x_1$-**macroadmissibilité.** Au lieu d'exiger qu'une trajectoire admissible atteigne la cible exactement, nous nous contenterons d'exiger qu'elle arrive dans un voisinage de celle-ci, ce qui semble assez raisonnable dans bien des cas pratiques. Ceci nous permettra de définir un nouveau problème et son temps optimal sera égal à celui du problème relaxé.

DÉFINITION 5.2. On dit que le contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ est $x_0x_1$-**macroadmissible** si:
i) $T_{\mathcal{U}}$ est limité
ii) $t \lnsim T_{\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \quad {}^0x(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) \neq x_1$
iii) $x(T_{\mathcal{U}}, x_0, \mathcal{U}(\cdot)) \simeq x_1$

DÉFINITION 5.3. On dit que le point $x_1$ est $x_0$-**macroaccessible** s'il existe un contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ $x_0x_1$-macroadmissible c'est à dire qui transfère $x_0$ dans le halo de $x_1$ en un temps limité.

Le halo du point $x_1$ idéalise bien le voisinage "assez petit"de la cible $x_1$ sur lequel on veut arriver. Notons que l'on s'intéresse uniquement aux contrôles dont les durées sont limitées; ceci est raisonnable car nous étudions ici le problème du temps minimum.

On désignera par $\mathcal{A}$ l'ensemble standard des points $x_0$-accessibles et par $\mathcal{M}$ l'ensemble des points $x_0$-macroaccessibles. Remarquons que l'ensemble $\mathcal{M}$ est un ensemble externe; il a été défini à l'aide de "formules externes".

Avec ces définitions, nous pouvons introduire notre nouveau problème de contrôle:

$$(P_2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) \in \mathrm{hal}(x_1) \\ \text{Minimiser } T \end{cases} \qquad t \in [0,T].$$

Comme l'ensemble des contrôles $x_0x_1$-macroadmissibles est externe, nous devons préciser le sens formel qu'il faut attribuer à $(P_2)$.

Nous noterons $\bar{U}_{x_0x_1}$ l'ensemble externe des contrôles $x_0x_1$-macroadmissibles. Nous appelerons $\Phi$ l'ensemble externe constitué des durées $T_{\mathcal{U}}$ de tous les contrôles $x_0x_1$-macroadmissibles:

$$\Phi = \{T_{\mathcal{U}} \ ; \ \mathcal{U}(\cdot) \in \bar{U}_{x_0x_1}\}.$$

Ceci nous permet de définir le **temps optimal** $T_2{}^*$ comme étant la borne inférieure de l'ombre de $\Phi$:

$$T_2{}^* = \inf({}^0\Phi)$$

*Remarque 5.4.* Comme la borne inférieure de l'ombre d'un ensemble externe est une "notion externe", il serait sage de vérifier qu'elle correspond bien dans le cas qui nous occupe, à ce que nous souhaitons. En effet, prenons comme ensemble externe $E$, l'ensemble des réels strictement positifs qui sont appréciables; son ombre est l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$, 0 en est sa borne inférieure, mais il n'existe évidemment pas de point de $E$ qui soit infiniment proche de 0. Donc dans cet exemple, la borne inférieure de l'ombre est "trop petite". Mais heureusement, il se trouve que l'ensemble externe qui nous intéresse n'est pas de ce type (nous avons affaire à des halos et non pas à des galaxies). Donc la proposition 5.5 ci-dessous qui serait simplement la définition de la borne inférieure si l'ensemble $\Phi$ était interne nécessite une (petite!) démonstration.

**Proposition 5.5**

*i) Pour tout contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ $x_0x_1$-macroadmissible, l'ombre de la durée ${}^0T_{\mathcal{U}}$ est toujours supérieure ou égale au temps optimal $T_2^*$.*

*i)) Il existe un contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ $x_0x_1$-macroadmissible dont l'ombre de la durée est égale à $T_2{}^*$.*

*Démonstration.*

i) Soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle $x_0x_1$-macroadmissible, on a:

$$T_{\mathcal{U}} \in \Phi \quad \text{donc} \quad {}^0T_{\mathcal{U}} \in {}^0\Phi$$

or $\inf({}^0\Phi)$ est égal à $T_2{}^*$ d'où ${}^0T_{\mathcal{U}} \geq T_2{}^*$.

ii) Par définition de la $x_0x_1$-macroadmissibilité et de la borne inférieure $T_2{}^*$, on a:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathcal{U}(\cdot)\ \Big( \big\| x\big(T_{\mathcal{U}}, x_0, \mathcal{U}(\cdot)\big) - x_1 \big\| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad T_2{}^* - \epsilon < T_{\mathcal{U}} \leq T_2{}^* + \epsilon \Big).$$

Donc en particulier pour un $\epsilon$ infiniment petit on a:

$$T_{\mathcal{U}} \simeq T_2{}^* \quad \text{d'où} \quad {}^0T_{\mathcal{U}} = T_2{}^*. \qquad \square$$

DÉFINITION 5.6. Un contrôle $x_0x_1$-macroadmissible vérifiant *ii*) est dit **presque-optimal** (on a déjà utilisé "quasi"pour une autre notion).

Maintenant que nous avons formulé ces définitions, il nous reste à montrer que le temps optimal $T_2{}^*$ du problème $(P_2)$ est égal au temps optimal $T_R{}^*$ du probleme relaxé $(R)$.

Pour commencer, on a toujours:

$$T_R{}^* \leq T_2{}^*.$$

En effet, soit $\mathcal{U}(\cdot)$ un contrôle $x_0x_1$-macroadmissible presque-optimal et

$$t \longmapsto x\big(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)\big)$$

sa réponse; l'ombre $T \mapsto {}^0x\big(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)\big)$ passe par $x_1$ à l'instant ${}^0T_{\mathcal{U}}$ et d'après le théorème 2.5 et le théorème de Filippov-Castaing [16], nous pouvons sélectionner un contrôle $\big(\alpha(\cdot), \tilde{\mathcal{U}}(\cdot)\big)$ (dit"relaxé"), de manière à ce que:

$${}^0x\big(t, x_0, \mathcal{U}(\cdot)\big) = x\Big(t, x_0, \big(\alpha(\cdot), \tilde{\mathcal{U}}(\cdot)\big)\Big)$$

(où naturellement $x(t, x_0, (\alpha(\cdot), \tilde{\mathcal{U}}(\cdot)))$ est la réponse au problème $(R)$). Il reste à montrer l'inégalité $T_2{}^* \leq T_R{}^*$; pour cela, nous allons construire un contrôle presque-optimal (pour le problème $(P_2)$) à partir d'un contrôle optimal du problème relaxé $(R)$.

De manière à abréger, le problème $(R)$ pourra s'écrire:

$$(R) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, u) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_1 \\ \text{Minimiset } T \end{cases} \qquad t \in [0, T].$$

*Remarque.* La fonction $F$ hérite de certaines propriétés de $f$. En particulier, $f$ étant localement lipschitzienne en $x$ uniformément en $u$, $F$ l'est également. En effet, pour tout $y$ et pour tout $z$ appartenant à une boule $B(x_0, \rho)$, pour tout $u$:

$$\|F(y,u) - F(z,u)\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i| \, \|f(t,u_i) - f(z,u_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i| \, K_\rho \, \|y - z\|$$

d'où:

$$\|F(y,u) - F(z,u)\| \leq K_\rho \, \|y - z\| \qquad \left(\text{car } \sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i| = 1\right).$$

### 5.7 Notations et définitions

Soit $\mathcal{V}(\cdot)$ un contrôle standard $x_0x_1$-admissible pour le problème $(R)$ et $T_{\mathcal{V}}$ sa durée; soit $N$ un entier infiniment grand, on pose $\delta \simeq T_{\mathcal{V}}/N$. On sait que:

$$\frac{1}{\delta} \int_{p\delta}^{(p+1)\delta} F(x_p, \mathcal{V}(s)) \, ds \in \Gamma_R(x_p)$$

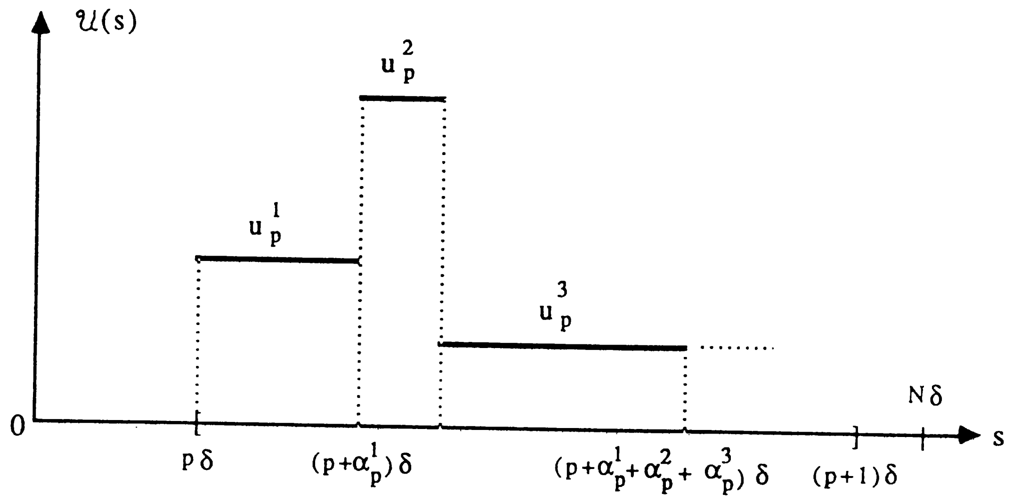
où $p$ est un entier inférieur à $N$ et $x_p$ est égal à $x_R(p\delta, x_0, \mathcal{V}(\cdot))$. Il existe donc un élément $V_p = (\alpha_p^1, \alpha_p^2, \ldots \alpha_p^{n+1}, u_p^1, \ldots, u_p^{n+1})$ de $\Lambda_{n+1} \times \Omega^{n+1}$ tel que:

$$F(x_p, V_p) = \frac{1}{\delta} \int_{p\delta}^{(p+1)\delta} F(x_p, \mathcal{V}(s)) \, ds.$$

On définit un contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$, constant par morceaux, dont la restriction sur l'intervalle $[p\delta, (p+1)\delta[$ est construite à partir de $V_p$ de la manière suivante: pour $i$ fixé dans $[1, n+1]$,

$$\mathcal{U}(s) = u_p^i \qquad \text{pour } s \in \left[\delta(p + \alpha_p^1 + \ldots + \alpha_p^{i-1}), \delta(p + \alpha_p^1 + \ldots + \alpha_p^{i-1} + \alpha_p^i)\right[.$$

Nous appelerons $\mathcal{U}(\cdot)$, **contrôle éclaté.**




**Proposition 5.8**

*Soit $\mathcal{V}(\cdot)$ un contrôle standard $x_0x_1$-admissible pour le problème $(R)$; alors le contrôle éclaté $\mathcal{U}(\cdot)$, défini ci-dessus, est $x_0x_1$-macroadmissible pour le problème $(P_2)$ et on a $T_\mathcal{V} \simeq T_\mathcal{U}$ par construction.*

*Démonstration.* Nous noterons $t \mapsto x_R(t)$ la réponse au contrôle $\mathcal{V}(\cdot)$ pour le problème relaxé $(R)$ et $t \mapsto x_2(t)$ la réponse au contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ pour le problème $(P_2)$. Pour mieux suivre, nous allons donner les trois étapes de la démonstration:

i) Posons $x_p = x_R(p\delta)$. Soit la suite définie par

$$\begin{cases} \xi_0 = x_0 \\ \xi_{p+1} = \xi_p + \delta F(x_p, V_p) \end{cases}$$

nous montrons que la suite $\xi_p$ a pour ombre la trajectoire $t \mapsto x_R(t)$; pour cela, il suffit de montrer que $\xi_p \simeq x_p$ pour tout $p$.

ii) Posons $y_p = x_2(p\delta)$. Soit la suite définie par:

$$\begin{cases} \sigma_0 = x_0 \\ \sigma_{p+1} = \sigma_p + \delta \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_p^i f(y_p, u_p^i) \end{cases}$$

nous montrons que la suite $\sigma_p$ a pour ombre, l'ombre de la trajectoire $t \mapsto x_2(t)$; pour cela, il suffut de montrer que $\sigma_p \simeq y_p$ pour tout $p$.

iii) Enfin, nous démontrerons l'équivalence des suites $\xi_p$ et $\sigma_p$, ce qui montrera que les deux trajectoires $t \mapsto x_R(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ sont infiniment proches l'une de l'autre; cela prouvera donc la $x_0x_1$-macroadmissibilité de $\mathcal{U}(\cdot)$.

i) On a:

$$\begin{aligned}
x_{p+1} &= x_p + \int_{p\delta}^{(p+1)\delta} F\big(x_R(s), \mathcal{V}(s)\big)\, ds \\
x_{p+1} &= x_p + \delta\frac{1}{\delta}\int_{p\delta}^{(p+1)\delta} F\big(x_p, \mathcal{V}(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_{p\delta}^{(p+1)\delta}\Big[F\big(x_R(s), \mathcal{V}(s)\big) - F\big(x_p, \mathcal{V}(s)\big)\Big]\, ds \\
x_{p+1} &= x_p + \delta F(x_p, V_p) + \int_{p\delta}^{(p+1)\delta}\Big[F\big(x_R(s), \mathcal{V}(s)\big) - F\big(x_p, \mathcal{V}(s)\big)\Big]\, ds
\end{aligned}$$

le terme $\big[F\big(x_R(s), \mathcal{V}(s)\big) - F\big(x_p, \mathcal{V}(s)\big)\big]$ est de norme infiniment petite pour $s \in [p\delta, (p+1)\delta[$ car $F$ est $S$-continue, donc on peut majorer l'intégrale de sa norme par un $\delta\alpha$, pour tout $p$, avec $\alpha$ infiniment petit strictement positif; on a donc:

$$\big\|x_{p+1} - \xi_{p+1}\big\| \leq \big\|x_p - \xi_p\big\| + \delta\alpha.$$

Ce qui entraîne pour tout $p$:

$$\big\|x_p - \xi_p\big\| \leq p\delta\alpha.$$

Comme $p\delta$ est inférieur ou égal à $T_{\mathcal{V}}$, le réel $p\delta$ est limité donc $p\delta\alpha \simeq 0$. On obtient l'équivalence des deux suites $x_p$ et $\xi_p$.

ii) On a:

$$\begin{aligned}
y_{p+1} &= y_p + \int_{p\delta}^{(p+1)\delta} f\big(x_2(s), \mathcal{U}(s)\big)\, ds \\
y_{p+1} &= y_p + \int_{p\delta}^{(p+\alpha_p^1)\delta} f\big(x_2(s), u_p^1\big)\, ds + \int_{(p+\alpha_p^1)\delta}^{(p+\alpha_p^1+\alpha_p^2)\delta} f\big(x_2(s,), u_p^2\big)\, ds + \dots \\
&\quad + \int_{(p+\alpha_p^1+\dots+\alpha_p^n)\delta}^{(p+1)\delta} f\big(x_2(s), u_p^{n+1}\big)\, ds
\end{aligned}$$

$$y_{p+1} = y_p + \int_{p\delta}^{(p+\alpha_p^1)\delta} f(y_p, u_p^1)\, ds + \int_{(p+\alpha_p^1)\delta}^{(p+\alpha_p^1+\alpha_p^2)\delta} \Big[ f(x_2(s), u_p^1) - f(y_p, u_p^1) \Big]\, ds$$

$$+ \ldots + \int_{(p+\alpha_p^1+\ldots+\alpha_p^n)\delta}^{(p+1)\delta} f(y_p, u_p^{n+1})\, ds$$

$$+ \int_{(p+\alpha_p^1+\ldots+\alpha_p^n)\delta}^{(p+1)\delta} \Big[ f(x_2(s), u_p^{n+1}) - f(y_p, u_p^{n+1}) \Big]\, ds$$

$$y_{p+1} = y_p + \delta\alpha_p^1 f(y_p, up^1) + \int_{p\delta}^{(p+\alpha_p^1)\delta} \Big[ f(x_2(s), u_p^1) - f(y_p, u_p^1) \Big]\, ds + \ldots$$

$$+ \delta\alpha_p^{n+1} f(y_p, u_p^{n+1}) + \int_{(p+\alpha_p^1+\ldots+\alpha_p^n)\delta}^{(p+1)\delta} \Big[ f(x_2(s), u_p^{n+1}) - f(y_p, u_p^{n+1}) \Big]\, ds.$$

Pour $i$ variant de 1 à $n+1$, le terme $\big[f(x_2(s), u_p^i) - f(y_p, u_p^i)\big]$ est de norme infiniment petite, on peut majorer sa norme par un réel $\beta$ infiniment petit, pour tout $p$ et pour tout $i$. On a donc:

$$\|y_{p+1} - \sigma_{p+1}\| \leq \|y_p - \sigma_p\| + \delta\beta \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_p^i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_p^i = 1$$

d'où pour tout $p$:

$$\|y_p - \sigma_p\| \leq p\delta\beta.$$

Pour la même raison que dans i) ($p\delta$ est limité), on en déduit que pour tout $p$:

$$\sigma_p \simeq y_p.$$

iii) Nous pouvons reécrire les deux suites $\xi_p$ et $\sigma_p$ de la manière suivante:

$$\begin{cases} \xi_0 = x_0 \\ \xi_{p+1} = \xi_p + \delta[F(\xi_p, V_p) + \varepsilon_p] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_0 = x_0 \\ \sigma_{p+1} = \sigma_p + \delta[F(\sigma_p, V_p) + \varepsilon'_p] \end{cases}.$$

On a:

$$\|\xi_{p+1} - \sigma_{p+1}\| \leq \|\xi_p - \sigma_p\| + \delta\|F(\xi_p, V_p) - F(\sigma_p, V_p)\| + \delta\|\varepsilon_p - \varepsilon'_p\|$$

On remarque que les trajectoires $t \mapsto x_R(t)$ et $t \mapsto x_2(t)$ sont limitées, alors il existe une boule standard $B$ contenant $\xi_p$ et $\sigma_p$, pour tout $p$. $F$ est lipschitzienne en $x$ sur $B$ uniformément en $v$ de constante de lipschitz $K_B$:

$$\begin{aligned} \|\xi_{p+1} - \sigma_{p+1}\| &\leq \|\xi_p - \sigma_p\| + \delta K_B\|\xi_p - \sigma_p\| + \delta\|\varepsilon_p - \varepsilon'_p\| \\ &\leq (1 + \delta K_B)\|\xi_p - \sigma_p\| + \delta\varepsilon \qquad \text{où } \varepsilon = \max\|\varepsilon_p - \varepsilon'_p\|. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall discrete:

$$\|\xi_p - \sigma_p\| \leq \frac{\varepsilon}{K_B}[(1+\delta K_B)^p - 1]$$

or on a:

$$(1+\delta K_B)^p = \left(1 + \frac{\delta p K_B}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{T_{\mathcal{V}} K_B}{p}\right)^p$$

et tout pour $p$ inifiniment grand:

$$\left(1 + \frac{T_{\mathcal{V}} K_B}{p}\right)^p \simeq e^{T_{\mathcal{V}} K_B} \qquad \text{(qui est limité)}$$

donc pour tout $p$, $\xi_p \simeq \sigma_p$.

Tout cela prouve que l'on a $x_R(t) \simeq x_2(t)$ pour tout $t \in [0, \min(T_{\mathcal{V}}, N\delta)]$. On prend $T_{\mathcal{U}} = N\delta$ donc $T_{\mathcal{U}} \simeq T_{\mathcal{V}}$. On en déduit que le contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ est $x_0x_1$-macroadmissible. □

Cette proposition nous dit que que si $\mathcal{V}^*(\cdot) = (\alpha_R^*(\cdot), \mathcal{U}_R^*(\cdot))$ est un **contrôle optimal** pour le problème relaxé $(R)$, alors le **contrôle éclaté** $\mathcal{U}_2^*(\cdot)$ correspondant est **presque optimal** pour le problème $(P_2)$.

## 6. Conclusion

Nous venons de présenter une méthode de relaxation pour le problème de contrôle en temps minimum. Une méthode classique de relaxation a été développée par J. Warga dans [16]. Nous allons retracer ici les différentes étapes établies par Warga et les comparer au travail qui a été fait dans cet article.

Rappelons brièvement le problème de contrôle étudié par Warga. On designe par $Y$ l'espace des états dont les éléments sont des applications continues sur un intervalle compact $T = [0, t_1]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, puis par $U$ l'ensemble des contrôles mesurables sur $T$ à valeurs dans un compact $\Omega$ de $\mathbb{R}^p$.

L'état obéit au système différentiel:

$$(W_1)\dot{y} = f(t, y(t), u) \qquad t \in T, u \in \Omega.$$

Une fois choisis le contrôle $\mathcal{U}(\cdot)$ et une condition initiale $y^0$ de $\mathbb{R}^n$, $(W_1)$ peut s'écrire sous la forme équivalente:

$$(W_2)y(t) = y^0 + \int_0^t f(s, y(s), \mathcal{U}(s))\, ds \qquad t \in T.$$

Soient $C_1$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $g$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que le triplet $(y,\mathcal{U}(\cdot),y^0)$ est **admissible** s'il vérifie $(W_2)$ et si le poinr $y(t_1)$ appartient à $C_1$. Le triplet admissible $(\bar{y},\bar{\mathcal{U}}(\cdot),\bar{y}^0)$ est **optimal** si pour tout triplet admissible $(y,\mathcal{U}(\cdot),y^0)$, on a:

$$g(\bar{y}(t_1)) \leq g(y(t_1)).$$

En plus des triplets admissibles, il a été défini une certaine notion de suite de triplets $(y_j,\mathcal{U}_j(\cdot),y_j^0)$ vérifiant $(W_2)$ dont les $y_j(t_1)$ correspondant n'atteignent qu'un voisinage de la cible $C_1$ à partir d'un rang $J$. Warga les a appelés "approximate $U$-solution"qu'il convient de traduire par solution admissible approchée, puis il a introduit la notion de suite minimissante de triplets admissibles approchés.

On dit qu'une suite de triplets admissibles approchés $(\bar{y}_j,\bar{\mathcal{U}}_j(\cdot),\bar{y}_j^0)$ est minimissante si pout toute suite de triplets admissibles approchés $(y_j,\mathcal{U}(\cdot),y_j^0)$ on a:

$$\lim_j g(\bar{y}_j(t_1)) \leq \liminf_j g(y_j(t_1)).$$

Remarquons qu'en introduisant ses "approximate $U$-solutions", Warga a élargi les contraintes du problème. Il n'existe plus de réponses qu'elles atteignent la cible exactement, mais un voisinage de celle-ci. Warga se justifie en disant que les hypothèses du genre $y(t_1) \in C_1$ ne sont pas concrètement réalisables à cause des erreurs de mesures dues aux hommes et aux machines; il a precisé, à l'aide d'exemples, que les résultats donnés par les solutions admissibles approchées minimisantes sont aussi bons que ceux donnés par des solutions admissibles minimisantes.

Notre définition d'un contrôle macroadmissible remplace celle d'une suite de contrôles admissibles approchés introduite par Warga; nous avons idéalisé par le halo de la cible $C_1$ le voisinage de $C_1$ sur lequel la suite de réponses $y_j(t_1)$ devrait arriver à partir d'un certain rang. Nous avons fait cela sans faire appel à aucune suite de contrôles; le halo de $C_1$ est un "voisinage"fixe commun où toute réponse correspondant à une contrôle macro-admissible devrait aboutir. Quant à la suite minimisante de contrôles admissibles approchés, elle a été remplacée par la notion de contrôle macro-admissible presque optimal.

D'après Warga, si on admet comme "solution optimale"du problème de contrôle posé une solution admissible approchée minimisante, alors il sera nécessaire de prouver l'existence d'une telle solution. Nous notons $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des applications continues sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $L^1(T,\mathcal{C}(\omega))$ l'ensemble des applications intégrables (au sense de Lebesgue) sur $T$ à valeurs dans $\mathcal{C}(\Omega)$. La manière indiquée par Warga pour prouver l'existence d'une solution admissible approchée minimisante a été d'élargir d'abord l'ensemble $U$ des contrôles mesurables. Il s'agit de considérer chaque élément de $U$ comme une fonctionnelle linéaire continue définie sur un espace fonctionnel beaucoup plus grand. Warga a pris l'espace $U$ comme étant un sous-espace du dual de $L^1(T,\mathcal{C}(\Omega))$ muni de la topologie *-faible, il a défini l'ensemble des contrôles relaxés comme étant la fermeture de l'ensemble $U$ dans cette topologie.

Cette façon d'étudier un espace fonctionnel en l'élargissant en un espace beaucoup plus grand dont les éléments ne sont plus forcément définis dans la même domaine est classique. L. Schwartz [14] l'a utilisée pour élaborer la théorie des distributions; dans le contexte du calcul des variations, Young a été le premier à introduire cette méthode pour étudier les trajectoires généralisées ("generalized curves") [19]; dans le cadre de la théorie du contrôle optimal des équations différentielles ordinaires, certains auteurs s'y sont penchés tels que Filippov ("sliding regimes") [7], Warga ("relaxed curves") [17], Mc Shane ("relaxed controls") [10], Ghouila-Houri ("commandes limites") [8], Castaing [2], Ekeland [6]. Nous pensons que notre article correspond en tout point au programme que Warga a tracé.

## Annexe

### Théorie de la moyennisation

Pour la commodité du lecteur, nous résumons ici les résultats de C. Reder parus dans [12].

Soit $\varphi$ une fonction interne, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, localement intégrable, à valeurs limitées dans $\mathbb{R}$.

Définition A.1. Soit $t$ limité dans $\mathbb{R}$. On dit que $\phi$ est **moyennisable de moyenne** $a$ au point $t$ si $a$ est un réel standard et s'il existe un réel infiniment petit positif $h$ tel que l'on ait:

$$\forall h_1, H_2 \quad (h_1 \simeq 0, h_2 \simeq 0, h_1 \geq h, h_2 \geq h) \quad \Longrightarrow \quad a \simeq \frac{1}{h_1 + h_2} \int_{t-h_1}^{t+h_2} \phi(s)\, ds.$$

Définition A.2. Soit $t$ limité dans $\mathbb{R}$ On dit que $\phi$ est **fortement moyennisable de moyenne** $a$ au point $t$ si $a$ est un réel infiniment petit positif $h$ tel que l'on ait:

$$\forall h_1, \forall t' \quad (t \simeq t', h_1 \simeq 0, h_1 \geq h) \quad \Longrightarrow \quad a \simeq \frac{1}{h_1} \int_{t'}^{t'+h_1} \phi(s)\, ds.$$

*Remarque A.3.* Dans ceux définitions, on montre que la moyenne de $\phi$ au point $t$ si elle existe est unique. La définition A.2 entraîne la définition A.1, ce qui justifie le vocabulaire utilisé. On peut montrer aussi que si $\phi$ est moyennisable en un point limité alors $\phi$ est aussi moyennisable en tout point du halo de ce point.

EXEMPLE A.4:

1) Si $\phi$ est $S$-continue au point $t$, alors $\phi$ est fortement moyennisable de moyenne $^0(\phi(t))$ au point $t$. En effet, soit $t'$ équivalent à $t$ et $h$ infiniment petit:

$$\forall s \in \mathrm{hal}(t) \qquad \phi(s) - \phi(t) \simeq 0$$

alors:

$$\frac{1}{h} \int_{t'}^{t'+h} [\phi(s) - \phi(t)]\, ds \simeq 0$$

donc:

$$\phi(t) \simeq \frac{1}{h} \int_{t'}^{t'+h} \phi(s)\, ds.$$

2) Soit la fonction $\phi$ définie de la manière suivante:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction $\phi$ n'est pas moyennisable en 0; en effet, on remarque que pour tous $h_1, h_2$ infiniment petits, on a:

$$\frac{1}{h_1 + h_2} \int_{-h_1}^{h_2} \phi(s)\, ds = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Soit $h$ infiniment petit quelconque, si l'on choisit:

$$\begin{array}{lll} h_1 = h \text{ et } \ h_2 = \sqrt{h} & \text{alors} & \dfrac{h_2}{h_1 + h_2} \simeq 1 \\ h_1 = \sqrt{h} \text{ et } \ h_2 = h & \text{alors} & \dfrac{h_2}{h_1 + h_2} \simeq 0. \end{array}$$

Maintenant, nous allons adapter les définitions ci-dessus au cas où la fonction $\phi$ est à valeurs vectorielles; pour simplifier les écritures, nous prendrons $\phi$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dans toute la suite. Nous notons:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t)). \end{aligned}$$

DÉFINITION A.5. Soit $t$ limité dans $\mathbb{R}$. On dit que $\phi$ est moyennisable au point $t$ de moyenne $a = (a_1, a_2)$ si et seulement si $a$ est un point standard et $\phi_1$ et $\phi_2$ sont moyennisables au point $t$ de moyennes respectives $a_1$ et $a_2$.

### A.6. La fonction moyennisée

Si $\phi$ est une fonction moyennisable en tout point limité de $\mathbb{R}$, nous pouvons lui associer l'unique fonction standard $\hat{\phi}$ dont la valeur en tout point standard est la moyenne de $\phi$ en ce point. Nous irons que $\hat{\phi}$ est la **fonction moyennisée de** $\phi$. Nous venons de définir la moyennisée $\hat{\phi}$ en supposant que la fonction $\phi$ est moyennisable en tout point standard de $\mathbb{R}$, or il peut exister des points en lesquels $\phi$ n'est pas moyennisable mais le théorème suivant nous permet de pouvoir parler de cette fonction moyennisée dans le cas général.

**Théorèm A.7**

*[12] Soit $A$ le standardisé de l'ensemble des points où $\phi$ est moyennisable. Le complémentaire de $A$ dans $\mathbb{R}$ est de mesure nulle (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) et coïncide avec l'ombre de l'ensemble des points où $\phi$ n'est pas moyennisable.*

D'où la définition suivante.

A.8 DÉFINITION DE LA FONCTION MOYENNISÉE. Soit $A$ le standardisé de l'ensemble des points où $\phi$ est moyennisable. La fonction moyennisée de $\phi$ est l'unique application standard $\hat{\phi}$ définie sur $A$ dont la valeur en tout point standard de $A$ est égale à la moyenne de $\phi$ en ce point standard.

La fonction moyennisée $\hat{\phi}$ de $\phi$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$ mais nous appelerons encore fonction moyennisée de $\phi$ un prolongement de $\hat{\phi}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**Proposition A.9**

*[12] Il existe un réel $h_0$ infiniment petit strictement positif tel que, quelque soit $t$ presque standard, quelque soit $h$ presque standard supérieur en module à $h_0$, on ait:*

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \hat{\phi}(s)\,ds \simeq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \phi(s)\,ds.$$

Nous en déduisons le

**Corollaire A.10**

*Pour tout $t$ appréciable, on a:*

$$\int_0^t \hat{\phi}(s)\,ds \simeq \int_0^t \phi(s)\,ds.$$

**Corollaire A.11**

*Soit $t$ un réel standard*

*1) $\phi$ est moyennisable en $t$ si et seulement si $\hat{\phi}$ l'est, et la moyenne de $\hat{\phi}$ en $t$ est $\hat{\phi}(t)$.*

*2) $\phi$ est fortement moyennisable en $t$ si $\hat{\phi}$ l'est aussi.*

Remarquons que ce résultat exprime le fait que $\phi$ et sa fonction moyennisée $\hat{\phi}$ ont le même comportement macroscopique et $\hat{\phi}$ et "plus simple"que $\phi$ car elle coïncide avec sa propre fonction moyennisée.

**Corollaire A.12**

*Soit $\phi$ une application moyennisable sur $\mathbb{R}$ de moyennisée $\hat{\phi}$ et soit $\lambda$ une application standard continue; alors pour tout $t$ appréciable positif, on a:*

$$\int_0^t \phi(s)\lambda(s)\,ds \simeq \int_0^t \hat{\phi}(s)\lambda(s)\,ds.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que:

$$\hat{\phi}(s)\lambda(s) = (\widehat{\phi\lambda})(s)$$

presque partout sur $\mathbb{R}$ et d'utiliser le corollaire A.10. Soit $s_0$ un point standard où $\phi$ et $\lambda$ sont moyennisables:

$$\exists\delta \gtrsim 0 \qquad (\widehat{\phi\lambda})(s_0) \simeq \frac{1}{\delta}\int_{s_0}^{s_0+\delta} \phi(s)\lambda(s)\,ds \simeq \lambda(s_0)\frac{1}{\delta}\int_{s_0}^{s_0+\delta} \phi(s)\,ds$$

donc

$$(\widehat{\phi\lambda})(s_0) \simeq \lambda(s_0)\hat{\phi}(s_0)$$

d'où l'égalité:

$$\phi(s_0)\hat{\lambda}(s_0) = \lambda(s_0)\hat{\phi}(s_0) \qquad \text{pour presque tout standard } s_0$$

et par transfert

$$\widehat{\phi(s_0)\lambda}(s_0) = \lambda(s_0)\hat{\phi}(s_0) \qquad \text{presque partout sur } \mathbb{R}. \ \square$$

## Une propriété de la moyennisée

Soit $\gamma$ une application absolument continue sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; on sait que $t \longmapsto d\gamma(t)\,/\,dt$ est intégrable sur $[a,b]$ et on peut définir sa moyennisée $\widehat{d\gamma}(t)\,/\,dt$ sur $[a,b]$.

**Proposition A.13**

*S'il existe un standard $M$ tel que pout tout $t$ appartenant à $[a,b]$, on ait:*

$$\left\| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right\| \leq M$$

*alors $t \longmapsto \gamma(t)$ est de classe $S^0$ et son ombre ${}^0\gamma(t)$ est dérivable presque partout sur $[a,b]$, de dérivée $\widehat{d\gamma}(t)\,/\,dt$.*

*Démonstration.*

1) $t \longmapsto \gamma(t)$ est de classe $S^0$; en effet:

$$\gamma(t) = \int_0^t \frac{d\gamma}{ds}(s)\,ds$$

est limité pour $t$ limité; $t \longmapsto \gamma(t)$ est $S$-continue. Tout ceci est évident car la dérivée $d\gamma(t)\,/\,dt$ est bornée par un standard par hypothèse.

2) Pour démontrer que l'ombre ${}^0\gamma(t)$ est dérivable presque partout sur $[a,b]$, on utilise le corollaire A.10; on a:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{d\gamma}{ds}(s)\,ds \simeq \int_0^t \frac{\widehat{d\gamma}}{ds}(s)\,ds \\ \gamma(t) \simeq {}^0\gamma(t) \end{cases}$$

pour presque tout $t$ standard. Par transfert, on en déduit que:

$$^0\gamma(t) = \int_0^t \frac{\widehat{d\gamma}}{ds}(s)\,ds$$

d'où le résultat. □

## Bibliographie


1. M. Athans et P. L. Falb, *Optimal Control – An Introduction to the theory and its applications*, New York – St. Louis – San Francisco, McGraw-Hill Book Co., 1966.
2. C. Castaing, Sur les multi-applications mesurables, *Revue d'Informatique et de Recherche Operationnelle* **1** (1967), 91–126.
3. N. J. Cutland, Internal controls and relaxed controls, *Journal of London Mathematical Society* **27** (1983), 130–140.
4. F. Diener, *Cours d'Analyse Non Standard*, OPU Alger 1983 et livre paraître.
5. M. Diener, *Une initiation aux outils Non Standard fondamentaux dans Analyse Non Standard et répresentation du réel*, Edition CNRS (Paris), OPU (Alger), 1985.
6. I. Ekeland, Existence de solution optimale pour des problèmes de contrôles de systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires, *IRIA Cahier* **4** (1971).
7. A. F. Filippov, On certain questions in the theory of Optimal Control, *SIAM on Control* **1** (1962), 76–84.
8. Ghouila-Houri, Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable, *Revue Franqise - Informatique Recherche Operationelle* **4** (1967) , 7–32.
9. E. B. Lee et L. Marcus, *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley and Son, Inc., New York – London –Sydney, 1967.
10. Mc Shane, Relaxed controls on Variationnal problems, *SIAM J. Control* **5** (1967), 438–485.
11. Mc Shane, *Integration*, Princeton University Press, 1944.
12. C. Reder, Observations macroscopiques de phénomènes microscopiques dans Analyse Non Standars et Répresentations de Réel, *Edition CNRS* (Paris), *OPU* (Alger), 1985.
13. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1970.
14. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
15. P. Spinelli et G. Solay Rakotonirainy, *Un coup d'œil non standard sur un problème de Zermelo*, Thèse (1986), Université des Sciences de Nice.
16. J. Warga, *Optimal Control of differential and functional equations*, Academic Press, New York – London, 1972.
17. J. Warga, Relaxed variational problems, *J. Maths Anal. Appl.* **4** (1962), 111–128.
18. L. C. Young, *Calculus of variations and Optimal control theory*, W. B. Saunders Company, 1969.
19. L. C. Young, Generalised curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations, *C. R. SCI Letters Varsovie* **30** (1937), 212–234.