Collect. Math. **42**, 1 (1991), 75–93

Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique

Abdelbaki Boutabaa

Université de Paris , U.F.R. de Mathématiques,

Tour 45–55, 5$^{\text{è}}$ étage, Place Jussieu 2, 75251 Paris cedex 05, France

Received 6/JUN/90

Abstract

Let p be a prime number. We note $\mathbb{C}_p$ the completion of $\mathbb{Q}_p$ and $M(\mathbb{C}_p)$ the space of meromorphic functions in all $\mathbb{C}_p$. Let $P(x,y,y',\dots,y^{(n)})$ be a differential polynomial with coefficients in $\mathbb{C}_p(x)$ and let be $R(x,y) \in \mathbb{C}_p(x,y)$.

We prove the following: If the differential equation :

$$P(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = R(x,y)$$

has a meromorphic solution $y = f(x) \notin \mathbb{C}_p(x)$, then $R(x,y)$ is a polynomial in y with coefficients in $\mathbb{C}_p(x)$.

1. Introduction

Soit p un nombre premier. On note dans la suite $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, $M(\mathbb{C}_p)$ l'espace des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$ tout entier et n un entier positif.

Dans [1] on a montré le résultat suivant:

1.1. Théorème

Soit $R(x,y) \in \mathbb{C}_p(x,y)$. Si l'équation différentielle:

$$(y')^n = R(x,y) \tag{1.1.1}$$

admet une solution $y \in M(\mathbb{C}_p)$, $y \notin \mathbb{C}_p(x)$, alors $R(x,y)$ est un polynôme en y de degré $\leq 2n$.

Ici nous obtenons une généralisation de ce théorème consistant à remplacer $(y')^n$ par un polynôme différentiel $P(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ en y et ses dérivées.

1.2. Théorème

Soient $R(x, y) \in \mathbb{C}_p(x, y)$ et

$$P(y) = P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \sum a_{i_0 i_1 \ldots i_n}(x)(y)^{i_0}(y')^{i_1} \cdots (y^{(n)})^{i_n}$$

où les $a_{i_0 i_1 \ldots i_n}(x)$ sont des éléments de $\mathbb{C}_p(x)$ tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Posons

$$d = d(P) = \max\{i_0 + 2i_1 + \cdots + (n+1)i_n : a_{i_0 i_1 \ldots i_n} \not\equiv 0\}.$$

Si l'équation différentielle

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = R(x, y) \tag{1.2.1}$$

admet une solution $y = f(x) \in M(\mathbb{C}_p)$, $y \notin \mathbb{C}_p(x)$, alors $R(x, y)$ est un polynôme en y de degré $\leq d = d(P)$.

Il est clair que le théorème 1.1 est le cas particulier du théorème 1.2 où

$$P(y) = (y')^n.$$

Nous démontrons aussi le résultat suivant:

Soit g une fonction entire p-adique. Soient

$$f_1 \not\equiv 0, \ldots, f_n \not\equiv 0, \qquad h_1 \not\equiv 0, \ldots, h_n \not\equiv 0$$

des fonctions méromorphes dans tout $\mathbb{C}_p$. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} T(r, h_i) = O(\log |g|(r)) \qquad \text{quand } r \longrightarrow +\infty$$

(cf. partie II pour les notations).

On a alors:

1.3. Théorème

Supposons que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(g)\, h_i(x) = 0, \tag{1.3.1}$$

alors il existe n polynômes $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ *non tous nuls tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(g)\, h_i(x) = 0. \tag{1.3.2}$$

La méthode utilisée pour démontrer ces résultats est encore la *théorie de Nevanlinna p-adique* développée dans [1] et suit d'assez près des techniques dues à Gross et Osgood [2] et Steinmetz [3, 4] dans le cas complêxe.

Dans ce qui suit nous rappelons quelques notions de la théorie de Nevanlinna p-adique. Pour les démonstrations et plus de détails nous renvoyons à [1].

2. Rappels

2.1. Pour $\rho > 0$, on pose

$$D^+(0,\rho) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x| \leq \rho\}$$

et

$$D^-(0,\rho) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x| < \rho\}.$$

On désigne par $A(D^-(0,\rho))$ (resp. $M(D^-(0,\rho))$) l'espace des fonctions analytiques (resp. méromorphes) dans $D^-(0,\rho)$. Si $\rho = +\infty$, nous noterons aussi $A(\mathbb{C}_p)$ (resp. $M(\mathbb{C}_p)$) pour les fonctions analytiques (resp. méromorphes) sur tout $\mathbb{C}_p$. Pour $r \in]0,\rho[$, $\phi \in A(D^-(0,\rho))$, et

$$\phi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

nous posons:

$$|\phi|(r) = \max_{n\geq 0} \{|a_n| r^n\}.$$

Cette notation est prolongée à $M(D^-(0,\rho))$ de la façon suivante: si $\phi \in M(D^-(0,\rho))$ est donnée par $\phi = f/g$, avec $f, g \in A(D^-(0,\rho))$, on écrit

$$|\phi|(r) = \frac{|f|(r)}{|g|(r)}.$$

2.2. Pour $\phi \in M(D^-(0,\rho))$ et $r \in \left]0,\rho\right[$, on pose

$$z(r,\phi) = \sum_{|x|=r} \max\left(0, \mathrm{ord}_x \phi\right)$$

et

$$p(r,\phi) = -\sum_{|x|=r} \min\left(0, \mathrm{ord}_x \phi\right).$$

Donc $z(r,\phi)$ (resp. $p(r,\phi)$) est le nombre de zéros (resp. pôles) de ϕ sur le cercle $|x| = r$, comptés avec leurs multiplicités.

2.3. Formule de Jensen: *Soient* $r \in]0,\rho[$ *et* $\phi \in M(D^-(0,\rho))$ *telle que* $\phi(0) \neq 0$ *et* $\phi(0) \neq \infty$. *On a:*

$$\left|\phi(0)\right| = |\phi|(r) \prod_{t\leq r} \left(\frac{t}{r}\right)^{z(t,\phi)-p(t,\phi)} \tag{2.3.1}$$

Si ϕ a un zéro ou un pôle d'ordre λ en $x = 0$, de façon que $\phi(x) = a_\lambda x^\lambda + \cdots$, alors la fonction $\psi(x) = x^{-\lambda}\phi(x)$ n'a ni zéro ni pôle à l'origine et a les mêmes zéros et les mêmes pôles que $\phi(x)$ ailleurs. La formule (2.3.1) appliquée à $\psi(x)$ donne:

$$|a_\lambda| = r^{-\lambda}\left|\phi(0)\right| = |\phi|(r) \prod_{t\leq r} \left(\frac{t}{r}\right)^{z(t,\phi)-p(t,\phi)} \tag{2.3.2}$$

On peut donc supposer dans la suite que toutes nos fonctions vérifient les conditions requises par la relation (2.3.1), tout en sachant que le cas particulier cité ci-dessus peut être traité si besoin est.

2.4. Utilisant la notation $\log^+(x) = \max(0, \log(x))$, on pose pour $r \in]0,\rho[$,

$$m(r,\phi) = \log^+\left(|\phi|(r)\right), \tag{2.4.1}$$

$$N(r,\phi) = \sum_{t\leq r} p(t,\phi) \log\left(\frac{r}{t}\right), \tag{2.4.2}$$

$$T(r,\phi) = m(r,\phi) + N(r,\phi). \tag{2.4.3}$$

La fonction $r \to T(r, \phi)$ est appelée *fonction caractéristique de* ϕ.

Avec ces notations, la formule (2.3.1) s'écrit:

$$T(r, 1/\phi) = T(r, \phi) - \log|\phi(0)|. \tag{2.4.4}$$

2.5. Proposition

Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in M(D^-(0, \rho))$. *On suppose que les fonctions* φ_i $(1 \leq i \leq k)$ *ainsi que les fonctions* $\varphi_1 + \cdots + \varphi_k$ *et* $\varphi_1 \cdots \varphi_k$ *n'ont ni zéro ni pôle à l'origine. On a:*

$$m(r, \varphi_1 \cdots \varphi_k) \leq m(r, \varphi_1) + \cdots + m(r, \varphi_k) \tag{2.5.1}$$

et

$$m(r, \varphi_1 + \cdots + \varphi_k) \leq m(r, \varphi_1) + \cdots + m(r, \varphi_k);$$

$$N(r, \varphi_1 \cdots \varphi_k) \leq N(r, \varphi_1) + \cdots + N(r, \varphi_k) \tag{2.5.2}$$

et

$$N(r, \varphi_1 + \cdots + \varphi_k) \leq N(r, \varphi_1) + \cdots + N(r, \varphi_k);$$

$$T(r, \varphi_1 \cdots \varphi_k) \leq T(r, \varphi_1) + \cdots + T(r, \varphi_k) \tag{2.5.3}$$

et

$$T(r, \varphi_1 + \cdots + \varphi_k) \leq T(r, \varphi_1) + \cdots + T(r, \varphi_k).$$

2.6. Proposition

Soient $\varphi \in M(D^-(0, \rho))$ *et* $a \in \mathbb{C}_p$, $a \neq 0$, *tels que* $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq a$ *et* $\varphi(0) \neq \infty$. *On a:*

$$T(r, a\varphi) = T(r, \varphi) + O(1), \qquad r, \underset{<}{\longrightarrow}, \rho, \tag{2.6.1}$$

$$T(r, \varphi - a) = T(r, \varphi) + O(1), \qquad r, \underset{<}{\longrightarrow}, \rho, \tag{2.6.2}$$

Des formules (2.4.4) et (2.6.2) découle le:

2.7. Théorème (premier théorème fondamental de Nevanlinna)

Soient $\varphi \in M(D^-(0,\rho))$ *et* $a \in \mathbb{C}_p$ *tels que* $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(0) \neq \infty$ *et* $\varphi(0) \neq a$. *On a:*

$$T\left(r, \frac{1}{\varphi - a}\right) = T(r, \varphi) + O(1), \qquad r \underset{<}{\longrightarrow} \rho. \tag{2.7.1}$$

On a aussi:

2.8. Proposition

Soit $\varphi \in M(\mathbb{C}_p)$ *telle que* $\varphi(0) \neq 0$ *et* $\varphi(0) \neq \infty$. *On a les équivalences suivantes:*
i) φ *est une constante* $\Longleftrightarrow$ $T(r, \varphi) = o(\log r)$, $r \to +\infty$,
ii) $\varphi \in \mathbb{C}_p(x)$ $\Longrightarrow$ $T(r, \varphi) = O(\log r)$, $r \to +\infty$,
iii) φ *est non constante* $\Longleftrightarrow$ *il existe* $c \in \mathbb{R}$ *et* $A > 0$ *tels que*

$$T(r, \varphi) \geq \log r + c$$

pour $r > A$.

On a aussi:

2.9. Théorème (deuxième théorème fondamental de Nevanlinna)

Soit $f \in M(\mathbb{C}_p)$, f *non constante. Soient* $a_1, \ldots, a_q$ *des éléments distincts de* $\mathbb{C}_p$ *et* $\delta > 0$ *tels que* $|a_i - a_j| \geq \delta$ *pour* $1 \leq i \neq j \leq q$. *On suppose que* $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$ *et* $f(0) \neq a_i$ *pour tout* i, $1 \leq i \leq q$.

Posons pour $i = 1, \ldots, q$*:*

$$m^*(r, a_i) = m\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right)$$

et

$$N^*(r, a_i) = N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right).$$

Posons aussi

$$m^*(r, \infty) = m(r, f)$$

et

$$N^*(r, \infty) = N(r, f).$$

On a

$$m^*(r,\infty)+\sum_{i=1}^{q} m^*(r,a_i)\leq 2T(r,f)-N_1(r,f)+S(r,f), \tag{2.9.1}$$

avec

$$N_1(r,f)=2N^*(r,\infty)+N(r,1/f')-N(r,f') \tag{2.9.2}$$

et

$$S(r,f)=m(r,f'/f)+m\left(r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\right)+q\log^+\left(\frac{1}{\delta}\right)+\log\left|\frac{1}{f'(0)}\right|. \tag{2.9.3}$$

Remarque. La quantité $S(r,f)$ du théorème (2.9) vérifie

$$S(r,f)=O(1) \qquad \text{quand } r\to+\infty.$$

Nous montrons maintenant une autre formulation du théorème (2.9) plus commode à utiliser dans la suite de ce travail. Posons

$$\bar{p}(r,\phi)=\sum_{\substack{|x|=r\\ \operatorname{ord}_x\phi<0}} 1 = \text{ le nombre de pôles distincts de } \phi \text{ sur le cercle } |x|=r.$$

Posons

$$\bar{N}(r,\phi)=\sum_{t\leq r}\bar{p}(t,\phi)\log\left(\frac{r}{t}\right).$$

2.10. Théorème (une autre version du deuxième théorème fondamental)

Avec les mêmes notations et hypothèses du Théorème 2.9, on a

$$\begin{aligned} m^*(r,\infty)+\sum_{i=1}^{q} m^*(r,a_i)+\sum_{i=1}^{q}\left\{N^*(r,a_i)\bar{N}^*(r,a_i)\right\}&\\ +\left\{N(r,f)-\bar{N}(r,f)\right\}\leq 2T(r,f)+S(r,f),& \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

où

$$\bar{N}^*(r,a)=\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right) \qquad \textit{pour } a\in\mathbb{C}_p.$$

On a besoin des lemmes suivants.

2.11. Lemme [1, Proposition I.5]

Pour toute fonction $f \in M(\mathbb{C}_p)$, on a

$$N(r, f^{(n)}) = N(r, f) + n\bar{N}(r, f). \tag{2.11.1}$$

2.12. Lemme

Soit $f \in M(\mathbb{C}_p)$, f non constante. On a, pour toute partie finie A de $\mathbb{C}_p$

$$\sum_{a\in A}\left\{N^*(r,a) - \bar{N}^*(r,a)\right\} \le N\left(r, \frac{1}{f'}\right). \tag{2.12.1}$$

Démonstration. C'est une conséquence du fait que, pour tout $a \in \mathbb{C}_p$, tout zéro de $f - a$ d'ordre $ka \geq 2$ est un zéro de f' d'ordre $k - 1$. □

Démonstration du Théorème 2.10. D'après la relation (2.9.1), il suffit de montrer que le premier membre de l'ingalité (2.10.1) est inférieur à

$$m^*(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} m^*(r, a_i) + N_1(r, f).$$

C'est à dire que

$$\sum_{i=1}^{q}\left\{N^*(r,a_i) - \bar{N}^*(r,a_i)\right\} + \left\{N(r,f) - \bar{N}(r,f)\right\} \le N_1(r,f). \tag{2.12.2}$$

Or d'après la relation (2.12.1), on a

$$\sum_{i=1}^{q}\left\{N^*(r,a_i) - \bar{N}^*(r,a_i)\right\} + \left\{N(r,f) - \bar{N}(r,f)\right\}$$
$$\le N(r, 1/f') + \left\{N(r,f) - \bar{N}(r,f)\right\}.$$

D'où d'après la relation (2.12.1)

$$\sum_{i=1}^{q}\left\{N^*(r,a_i) - \bar{N}^*(r,a_i)\right\} + \left\{N(r,f) - \bar{N}(r,f)\right\}$$
$$\le N(r, 1/f') + 2N(r,f) - N(r,f').$$

Enfin la relation (2.9.2) donne

$$\sum_{i=1}^{q}\left\{N^*(r,a_i) - \bar{N}^*(r,a_i)\right\} + \left\{N(r,f) - \bar{N}(r,f)\right\} \le N_1(r,f). \; \square$$

3. Démonstration du Théorème 1.2

Commençons par démontrer le lemme suivant

3.1. Lemme

Soient $a \in \mathbb{C}_p$, $a \neq 0$ et f, g deux fonctions de $M(\mathbb{C}_p)$ n'ayant ni zéro ni pôle l'origine et telles que $g(0) \neq a$. On a

i) $m(r, g'/g) = 0$ pour $r \geq 1$,

ii) $m(r, g/(g-a)) = m(r, 1/(g-a)) + O(1)$ lorsque $r \to +\infty$,

iii) $m(r, g+h) \leq \max\{m(r,g), m(r,h)\}$.

Démonstration.

i) [1, Lemme (I.7)].

ii) Les conditions pour appliquer la proposition (2.6) sont réunies et on a

$$T\left(r, \frac{g}{g-a}\right) = T\left(r, 1 + \frac{a}{g-a}\right) = T\left(r, \frac{1}{g-a}\right) + O(1) \qquad (*)$$

quand $r \longrightarrow +\infty$.

D'autre part il est clair que les pôles de $g/(g-a)$ sont les zéros $g-a$ et par suite on a

$$N\left(r, \frac{g}{g-a}\right) = N\left(r, \frac{1}{g-a}\right). \qquad (**)$$

La différence des relations $(*)$ et $(**)$ nous donne la relation demandée.

iii) C'est une conséquence de l'inégalité ultramétrique. □

Démonstration du Théorème 1.2. Supposons que $y = f(x) \in M(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p(x)$ est une solution de l'équation différentielle (1.1.1). Posons

$$\mathrm{r}(x) = P\big(x, f(x), \ldots, f^{(n)}(x)\big).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{C}_p$ tel que $\tau = f(x_0) \in \mathbb{C}_p$ et $R(x,\tau)$ n'ait pas de pôle en x_0. Alors tout zéro d'ordre k de la fonction $f(x) - \tau$ est un pôle d'ordre au plus $k-1$ de la fonction

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{r}(x) - R(x,\tau)}{f(x) - \tau}. \qquad (3.2.1)$$

Maintenant pour $\sigma, \tau \in \mathbb{C}_p$, $\sigma \neq \tau$ et vérifiant les conditions ci dessus, on pose:

$$\Phi(x, \sigma, \tau) = \frac{\Phi(x,\sigma) - \Phi(x,\tau)}{\sigma - \tau},$$

d'où

$$\Phi(x,\sigma,\tau) = \frac{\mathrm{r}(x) - Q_2(x,f(x),\sigma,\tau)}{(f(x)-\sigma)(f(x)-\tau)}$$

avec

$$Q_2(x,y,\sigma,\tau) = \frac{\tau}{\sigma-\tau} R(x,\sigma) - \frac{\sigma}{\sigma-\tau} R(x,\tau) + \frac{1}{\sigma-\tau}\left[R(x,\tau) - R(x,\sigma)\right] y.$$

Plus généralement pour $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{\mathrm{s}} \in \mathbb{C}_p$, distincts deux à deux et vérifiant les conditions ci dessus, si $\Phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{s}-1})$ est déjà construite, on écrit

$$\Phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{s}}) = \frac{\Phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{s}-2},\tau_{\mathrm{s}-1}) - \Phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{s}-2},\tau_{\mathrm{s}})}{\tau_{\mathrm{s}-1}-\tau_{\mathrm{s}}}, \tag{3.2.2}$$

et on vérifie que

$$\Phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{s}}) = \frac{\mathrm{r}(x) - Q_{\mathrm{s}}(x,f(x),\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{s}})}{(f(x)-\tau_1)\cdots(f(x)-\tau_{\mathrm{s}})}, \tag{3.2.3}$$

où $Q_{\mathrm{s}}(x,y,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{s}})$ est un polynôme en y de degré $\leq \mathrm{s}-1$ et coefficients expressions linéaires en les $R(x,\tau_i)$, pour $i = 1,\ldots,\mathrm{s}$ $(Q_1(x,\tau) = R(x,\tau))$.

Considérons la fonction $\Phi(x) = \Phi(x,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{d}+1})$. On a donc

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{r}(x) - Q_{\mathrm{d}+1}(x,f(x),\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{d}+1})}{(f(x)-\tau_1)\cdots(f(x)-\tau_{\mathrm{d}+1})}, \tag{3.2.4}$$

où $Q_{\mathrm{d}+1}(x,y,\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{d}+1})$ est un polynôme en y de degré $\leq \mathbf{d}$ et coefficients expressions linéaires en les $R(x,\tau_i)$, pour $i = 1,\ldots,\mathbf{d}+1$. Montrons qu'il existe $\tau_1,\ldots,\tau_{\mathrm{d}+1}$ tels que

$$\Phi \equiv 0. \tag{3.2.5}$$

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc $\Phi(x) \not\equiv 0$ et posons $\Psi = (f-\tau_{\mathrm{d}+1})\Phi$.

L'application successive des relations (2.6.2), (2.5.3) et (2.7.1) donne

$$T(r,f) \leq T(r,\Phi) + T(r,\Psi) + O(1) \qquad \text{quand } r \longrightarrow +\infty. \tag{3.2.6}$$

D'autre part un calcul simple, en tenant compte du lemme (3.1), montre que

$$m\left(r, \frac{\mathrm{r}(x)}{(f(x)-\tau_1)\cdots(f(x)-\tau_{\mathrm{d}+1})}\right) \leq \sum_{i=1}^{\mathrm{d}+1} m\left(r, \frac{1}{f-\tau_i}\right) + O(\log r), \tag{3.2.7}$$

et

$$m\left(r, \frac{Q_{d+1}(x, f(x), \tau_1, \dots, \tau_{d+1})}{(f(x)-\tau_1)\cdots(f(x)-\tau_{d+1})}\right) \\ \leq \sum_{i=1}^{d+1}\left\{m\left(r, \frac{1}{f-\tau_i}\right) + m(r, R(x,\tau_i))\right\} + O(1).$$

Comme $R(x,\tau_i) \in \mathbb{C}_p(x)$, on a par la proposition (2.8):

$$m(r, R(x,\tau_i)) \leq O(\log(r)) \qquad \text{quand } r \longrightarrow +\infty;$$

d'où:

$$\text{(3.2.8)} \quad m\left(r, \frac{Q_{d+1}(x, f(x), \tau_1, \dots, \tau_{d+1})}{(f(x)-\tau_1)\cdots(f(x)-\tau_{d+1})}\right) \leq \sum_{i=1}^{d+1} m\left(r, \frac{1}{f-\tau_i}\right) + O(\log(r)).$$

Des relations (3.2.7) et (3.2.8), on obtient:

$$m(r,\Phi) \leq \sum_{i=1}^{d+1} m\left(r, \frac{1}{f-\tau_i}\right) + O(\log(r))$$

et

$$m(r,\Psi) \leq \sum_{i=1}^{d+1} m\left(r, \frac{1}{f-\tau_i}\right) + O(\log(r));$$

d'où:

$$\text{(3.2.9)} \qquad m(r,\Phi) + m(r,\Psi) \leq 2\sum_{i=1}^{d+1} m\left(r, \frac{1}{f-\tau_i}\right) + O(\log(r)).$$

Maintenant montrons que, pour tout $s \geq 1$ et tout i, $(1 \leq i \leq s)$, tout zéro d'ordre k de $f-\tau_i$ est un pôle d'ordre $\leq k-1$ de $\Phi(x,\tau_1,\dots,\tau_s)$. On a vu au début de la démonstration que cette propriété est vraie pour $s = 1$. Supposons-la, vraie au rang $s-1$ et montrons-la au rang s.

$\Phi(x,\tau_1,\dots,\tau_s)$ est donne par la relation (3.2.3), avec

$$\begin{aligned} Q_s(x, f(x), \tau_1, \dots, \tau_s) = \frac{1}{\tau_{s-1}-\tau_s}\Big\{ &\tau_s Q_{s-1}(x, f(x), \tau_1, \dots, \tau_{s-2}, \tau_{s-1}) \\ &- \tau_{s-1} Q_{s-1}(x, f(x), \tau_1, \dots, \tau_{s-2}, \tau_s) \\ &+ \Big(Q_{s-1}(x, f(x), \tau_1, \dots, \tau_{s-2}, \tau_s) \\ &- Q_{s-1}(x, f(x), \tau_1, \dots, \tau_{s-2}, \tau_{s-1})\Big) f(x)\Big\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\Phi(x,\tau_1,\dots,\tau_s) = \frac{f(x)-\tau_s}{\tau_{s-1}-\tau_s}\,\frac{\mathbf{r}(x)-Q_{s-1}(x,f(x),\tau_1,\dots,\tau_{s-2},\tau_{s-1})}{(f(x)-\tau_1)\cdots(f(x)-\tau_s)} - \frac{f(x)-\tau_{s-1}}{\tau_{s-1}-\tau_s}\,\frac{\mathbf{r}(x)-Q_{s-1}(x,f(x),\tau_1,\dots,\tau_{s-2},\tau_s)}{(f(x)-\tau_1)\cdots(f(x)-\tau_s)}.$$

Le reste est clair.

Les pôles de $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ proviennent des zéros des $f-\tau_i$, des pôles des $R(x,\tau_i)$ et des pôles des $a_{i_0 i_1 \dots i_n}(x)$. Comme les $R(x,\tau_i)$ et les $a_{i_0 i_1 \dots i_n}(x)$ sont des éléments de $\mathbb{C}_p(x)$, on a

$$N(r,\Phi)+N(r,\Psi) \le 2\sum_{i=1}^{\mathbf{d}+1}\left\{N\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)-\bar N\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)\right\}+O(\log r). \tag{3.2.10}$$

Des relations (3.2.6), (3.2.9) et (3.2.10), on a

(3.2.11)

$$T(r,f)\le 2\sum_{i=1}^{\mathbf{d}+1}\left\{m\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)-\bar N\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)\right\}+O(\log r).$$

Donnons nous maintenant q $(\mathbf{d}+1)$-uplets d'éléments distincts deux à deux de $\mathbb{C}_p$. En construisant les fonctions $\Phi(x)$ associées à chacun de ces $(\mathbf{d}+1)$-uplets et en additionnant les inégalités obtenues, il vient, si aucune des fonctions Φ n'est identiquement nulle

(3.2.12)

$$qT(r,f)\le 2\sum_{i=1}^{q(\mathbf{d}+1)}\left\{m\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)-\bar N\left(r,\frac{1}{f-\tau_i}\right)\right\}+O(\log r).$$

D'où, d'après le théorème (2.10)

$$qT(r,f)\le 4T(r,f)+o(T(r,f)), \qquad \text{pour tout } q\in\mathbb{N}. \tag{3.2.13}$$

Ce qui est absurde.

Donc il existe $\tau_1,\dots,\tau_{\mathbf{d}+1}$ tels que $\Phi(x)=\Phi(x,\tau_1,\dots,\tau_{\mathbf{d}+1})\equiv 0$. Par suite $y=f(x)$ vérifie, à côté de l'équation (1.2.1), l'équation différentielle

$$P(x,y,y',\dots,y^{(n)})=Q(x,y), \tag{3.2.14}$$

avec $Q(x,y)=Q_{\mathbf{d}+1}(x,y,\tau_1,\dots,\tau_{\mathbf{d}+1})$, qui est un polynôme en y de degré $\le \mathbf{d}$ à coefficients des expressions linéaires en les $R(x,\tau_i)$, donc à coefficients dans $\mathbb{C}_p(x)$. Donc pour terminer il suffit de montrer $R(x,y)\equiv Q(x,y)$. Or c'est le cas car si on suppose que $R(x,y)\not\equiv Q(x,y)$, la fonction $f(x)$ serait solution de l'équation algébrique $R(x,y)-Q(x,y)=0$. Et il en découlerait que $f(x)\in\mathbb{C}_p(x)$ contrairement à l'hypothèse. □

4. Démonstration du Théorème 1.3

Dans cette partie nous donnons une démonstration du Théorème 1.3 ainsi que deux applications de ce résultat.

On a besoin du lemme suivant:

4.1. Lemme

Soient $a \in \mathbb{C}_p$, $m \in \mathbb{N}$ et $F_1(x) \not\equiv 0, \dots, F_m(x) \not\equiv 0$ des séries formelles en $x - a$. Alors il existe une suite infinie de $(m+1)$-uplets de polynômes en x, $(Q_k(x), P_{1k}(x), \dots, P_{mk}(x))_{k \geq 1}$ satisfaisant, pour tout $k \geq 1$, aux conditions suivantes:

i) $Q_k(x) \not\equiv 0$,

ii) $\max\Big\{\deg Q_k(x), \deg P_{1k}(x), \dots, \deg P_{mk}(x)\Big\} \leq mk$,

iii) a est un zéro d'ordre $\geq (m+1)k$ de chacune des séries formelles

$$Q_k(x)F_1(x) - P_{1k}(x), \dots, Q_k(x)F_m(x) - P_{mk}(x).$$

Démonstration. La condition ii) du lemme indique que pour construire les polynômes $Q_k(x)$, $P_{1k}(x), \dots, P_{mk}(x)$ on doit déterminer $(m+1)(1+mk)$ coefficients et la condition iii) montre qu'il y a $m(m+1)k$ relations entre ces coefficients. Comme

$$(m+1)(1+mk) \geq m(m+1)k,$$

on voit que de tels coefficients existent et qu'ils ne sont pas tous nuls.

Enfin on a $Q_k(x) \not\equiv 0$. Car sinon pour tout i, $1 \leq i \leq m$, a est un zéro d'ordre $(m+1)k$ de $P_{ik}(x)$ qui est de degré $\leq mk$. Ce qui est absurde. □

4.2. Démonstration du Théorème

Quitte à multiplier la relation (1.3.1) par une fonction entière convenable, on peut supposer que les $h_i(x)$ sont des fonctions entières. On a alors par hypothèse:

$$\sum_{i=1}^{n} \log |h_i|(r) = O\big(\log |g|(r)\big), \qquad \text{quand } r \longrightarrow +\infty.$$

Si g est constante, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que g est non constante. Soient $a \in \mathbb{C}_p$ et $\rho > 0$ tels que chacune des fonctions $f_{i+1}(x)/f_1(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, soit analytique dans $|x - a| < \rho$ et donc développable en série entière en $x - a$. Soit, pour $i = 1, \ldots, n-1$, $F_i(x)$ la série formelle correspondant à $f_{i+1}(x)/f_1(x)$. Soit alors, pour tout $k \geq 0$, $Q_k(x)$, $P_{1k}(x), \ldots, P_{mk}$ les polynômes dont l'existence est assurée par le lemme (3.2).

Pour tout $k \geq 1$, posons:

$$G_k(x) = Q_k(g)h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_{ik}(g)h_{i+1}(x), \qquad x \in \mathbb{C}_p. \tag{4.2.1}$$

Donc $G_k(x)$ est une fonction entière. On a, par hypothèse:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(g)h_i(x) = 0.$$

Ce qui entraine, pour $x \in P = \{x \in \mathbb{C}_p : |g(x) - a| < \rho\}$:

$$h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} F_i(g)\, h_{i+1}(x) = 0. \tag{4.2.2}$$

Des relations (4.2.1) et (4.2.2), on a, pour $x \in P$:

$$G_k(x) = Q_k(x)h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_{ik}(g)h_{i+1}(x) - Q_k(g)h_1(x) - \sum_{i=1}^{n-1} Q_k(g)F_i(g)h_{i+1}(x);$$

d'où, pour $x \in P$:

$$G_k = \sum_{i=1}^{n-1} \Big\{ P_{ik}(g) - Q_k(g)F_i(g) \Big\} h_{i+1}(x). \tag{4.2.3}$$

Donc par le lemme (4.1), on a, pour $x \in P$:

$$\frac{G_k(x)}{(g-a)^{nk}} = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ik}(g)\, h_{i+1}(x); \tag{4.2.4}$$

où les $\theta_{ik}(x)$ sont des fonctions analytiques dans $|x - a| < \rho$.

Ceci signifie que

$$\frac{G_k(x)}{(g-a)^{nk}}$$

est analytique dans P. Comme, sur $\mathbb{C}_p \setminus P$, $g - a$ nes'annule pas, il suit que, pour tout $k \geq 1$, $G_k(x)/(g-a)^{nk}$ est une fonction entière.

En utilisant le ii) du lemme 4.1, on a:

$$
\begin{aligned}
m\left(r, \frac{G_k(x)}{(g-a)^{nk}}\right) &= m\left(r, \frac{1}{(g-a)^{nk}}\left\{Q_k(g)h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_{ik}(g)\, h_{i+1}(x)\right\}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \log |h_i|(r) + A_k,
\end{aligned}
$$

où A_k est une constante dpendant de k.

Ceci s'écrit encore (les $G_k(x)/(g-a)^{nk}$ étant des fonctions entières):

$$
T\left(r, \frac{G_k(x)}{(g-a)^{nk}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log |h_i|(r) + A_k. \tag{4.2.5}
$$

Or on a:

$$
m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) \leq T\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right),
$$

d'où, d'aprés le théorème 2.7:

$$
\begin{aligned}
m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) &\leq T\left(r, \frac{G_k(x)}{(g-a)^{nk}}\right) + O(1) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \log |h_i|(r) + A_k + O(1).
\end{aligned}
$$

D'où:

$$
m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) \leq O\big(\log |g|(r)\big) + B_k.
$$

Relation qu'on écrit encore:

$$
m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) \leq K \log |g|(r) + B_k, \tag{4.2.6}
$$

avec $K > 0$.

D'autre part, on a

$$
m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) = \max\left\{0, \log\left|\frac{(g-a)^{nk}}{G_k}\right|(r)\right\};
$$

d'où:

$$m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) \geq \log\left|\frac{(g-a)^{nk}}{G_k}\right|(r) \tag{1}$$
$$= k\log|g-a|(r) - \log\left|\frac{G_k}{(g-a)^{(n-1)k}}\right|(r).$$

Evaluons $\log|G_k/(g-a)^{(n-1)k}|(r)$:

$$\log\left|\frac{G_k}{(g-a)^{(n-1)k}}\right|(r)$$
$$= \log\left|\frac{1}{(g-a)^{(n-1)k}}\left\{Q_k(g)h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_{ik}(g)h_{i+1}(x)\right\}\right|(r)$$
$$\leq m\left(r, \frac{1}{(g-a)^{(n-1)k}}\left\{Q_k(g)h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_{ik}(g)h_{i+1}(x)\right\}\right).$$

Comme, d'après le lemme 4.1, on a

$$\deg Q_k(X) \leq (n-1)k,$$

$$\deg P_{1k}(X) \leq (n-1)k, \ldots, \deg P_{(n-1)k}(X) \leq (n-1)k,$$

il vient que:

$$\log\left|\frac{G_k}{(g-a)^{(n-1)k}}\right|(r) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, h_i) + C_k = \sum_{i=1}^{n} T(r, h_i) + C_k. \tag{2}$$

De (1) et (2), on a:

$$m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) \geq k\log|g-a|(r) - \sum_{i=1}^{n} T(r, h_i) - C_k.$$

C'est à dire que:

$$m\left(r, \frac{(g-a)^{nk}}{G_k(x)}\right) \geq (k-K)\log|g|(r) - C_k. \tag{4.2.7}$$

Ceci est, pour k et r assez grands, en contradiction avec (4.2.6), si l'on suppose que $G_k \not\equiv 0$ pour une infinité de k. Donc $G_k \equiv 0$ pour k assez grand. □

4.3. Corollaire

Sous les mêmes conditions que celles du théorème 1.3, il existe des polynômes $Q_0(X), \ldots, Q_n(X)$ non tous nuls tels que:

$$f_0(g)\, Q_0(x) + \cdots + f_n(g)\, Q_n(x) = 0. \tag{4.3.1}$$

Démonstration. Supposons n minimal dans la relation (1.3.1). D'après le théorème 1.3, on a (cf. relation 1.3.2):

$$P_0(g)\, h_0 + \cdots + P_n(g)\, h_n = 0,$$

les $P_i(X)$ tant des polynômes non tous nuls. Supposant $P_n(X) \neq 0$ et divisant par $P_n(g)$, on a

$$R_0(g)\, h_0 + \cdots + R_{n-1}(g)\, h_{n-1} + h_n = 0. \tag{4.3.2}$$

Multipliant par $f_n(g)$, on obtient:

$$\big(R_0 f_n(g)\big) h_0 + \cdots + \big(R_{n-1} f_n(g)\big) h_{n-1} + f_n(g) h_n = 0. \tag{4.3.3}$$

Des relations (4.1.1) et (4.3.3), on a:

$$\big(R_0 f_n - f_0\big)(g) h_0(x) + \cdots + \big(R_{n-1} f_n - f_{n-1}\big)(g) h_{n-1}(x) = 0. \tag{4.3.4}$$

Comme n est minimal, une au moins des fonctions

$$\big(R_0 f_n - f_0\big)(g), \ldots, \big(R_{n-1} f_n - f_{n-1}\big)(g)$$

est nulle. Ce qui termine la démonstration. □

4.4. Corollaire

Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in M(\mathbb{C}_p)$. On suppose que $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$. Alors si $g \in A(\mathbb{C}_p)$, $g \notin \mathbb{C}_p$, les fonctions $\varphi_1 \circ g, \ldots, \varphi_s \circ g$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}_p(x)$.

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc $\varphi_1 \circ g$, $\ldots, \varphi_s \circ g$ algébriquement dépendantes sur $\mathbb{C}_p(x)$ et donnons nous un polynôme $P(X_0, X_1, \ldots, X_s)$ non nul de $\mathbb{C}_p[X_0, X_1, \ldots, X_s]$ tel que:

$$P\big(x, \varphi_1 \circ g(x), \ldots, \varphi_s \circ g(x)\big) = 0.$$

Cette égalité s'écrit:

$$\sum a_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(x)\big(\varphi_1 \circ g(x)\big)^{\nu_1} \cdots \big(\varphi_s \circ g(x)\big)^{\nu_s}, \tag{4.4.1}$$

où les $a_{\nu_1,\ldots\nu_s}(x)$ sont des éléments non tous nuls de $\mathbb{C}_p[X]$. Supposons que les $a_{\nu_1,\ldots\nu_s}(x)$ non nuls soient au nombre de n et notons les: $h_1(x), \ldots, h_n(x)$. Désignons les $\big(\varphi_1(x)\big)^{\nu_1}, \ldots, \big(\varphi_s(x)\big)^{\nu_s}$ correspondant par $f_1(x), \ldots, f_n(x)$. On a donc:

$$\sum_{i=1}^{n} T(r, h_i) = O\big(\log |g|(r)\big), \qquad r \longrightarrow +\infty; \tag{4.4.2}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(g)\, h_i(x) = 0.$$

Donc, d'aprés le théorème 1.3, pour tout k assez grand, il existe des polynômes $Q_k(x)$, $P_{1k}(x), \ldots, P_{(n-1)k}(x)$ tels que:

$$Q_k(g)\, h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_{ik}(g)\, h_{i+1}(x) = 0. \tag{4.4.3}$$

Comme $g \notin \mathbb{C}_p[x]$, ceci entraîne:

$$Q_k(T)\, h_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_{ik}(T) h_{i+1}(x), \qquad \text{pour } k \text{ assez grand.} \tag{4.4.4}$$

Maintenant considérons la topologie $(T - a)$-adique définie par:

$$\|F(T)\|_{T-a} = p^{-\operatorname{ord}_{T-a}(F(T))},$$

pour $F(T) \in \mathbb{C}_p[[T]]$.

On a, en vertu du lemme 4.1:

$$\left\| \frac{P_{ik}(T)}{Q_k(T)} - \frac{f_{i+1}(T)}{f_1(T)} \right\|_{T-a} \leq p^{-k},$$

pour tout i et tout $k \geq 1$. D'où, pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{P_{ik}}{Q_k(T)} = \frac{f_{i+1}(T)}{f_1(T)},$$

(dans la topologie $(T-a)$-adique).

Ceci avec la relation (4.4.4), montre que:

$$\sum h_i(x f_i(T) = 0.$$

Donc la relation (4.4.1) donne:

$$\sum a_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(x)\big(\varphi_1(T)\big)^{\nu_1} \ldots \big(\varphi_s(T)\big)^{\nu_s} = 0. \tag{4.4.5}$$

En choisissant un $x_0 \in \mathbb{C}_p$ tel que les $a_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(x_0)$ ne soient pas tous nuls, on voit que:

$$\sum a_{\nu_1,\ldots,\nu_s}(x_0)\big(\varphi_1(T)\big)^{\nu_1} \ldots \big(\varphi_s(T)\big)^{\nu_s} = 0$$

est une relation de dépendance algébrique non triviale pour les $\varphi_i(T)$ sur $\mathbb{C}_p$. Contradiction. □

Je tiens à remercier cordialement Monsieur Bezivin pour son aide et ses conseils très précieux tout au long de ce travail.

Bibliographie

1. A. Boutabaa, Théorie de Nevanlinna p-adique, *Manuscripta Math.* **67** (1990), 251–269.
2. F. Gross et C. F. Osgood, A simpler proof of a theorem of Steinmetz, *J. Math. Anal. Appl.* **143** (1989), 290–294.
3. N. Steinmetz, *Eigenschaften eindeutiger Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen in Komplexen*, Diss. Karlsruhe, 1978.
4. N. Steinmetz, Über die Faktorisierbaren Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Math. Z.* **170** (1980), 169–180.