Collect. Math. **41**, 3 (1990), 197–216

Fonctions analytiques de contractions topologiques dans les algèbres hermitiennes

A. Elkinani

École Normale Supérieure, Takaddoum-Rabat, B.P.: 5118, Morocco

Received 1/JUN/90

Abstract

In this paper we define a functional calculus, for harmonic vector valued functions, in Banach algebras with continuous involution. Using this calculus, we generalize in two settings the results of Shih and Tan on analytic functions of topological proper contractions to analytic vector valued functions in Hermitian Banach algebras. We also make an extension of other results such as Schwarz's lemma and Pick's theorem.

1. Introduction

Shih et Tan [8] ont établi une extension, aux contractions topologiques propres, de quelques résultats de Ky Fan [3] sur les fonctions analytiques de contractions propres. Pour les fonctions holomorphes sur le disque unité et à valeurs dans $L(H)$, Tao Zhiguang [9] a obtenu deux extensions. L'une pour les contractions propres quelconques. Quant à l'autre c'est une extension aux contractions normales. Pour établir ses résultats, Tao Zhiguang a utilisé la résolution spectrale de l'identité pour un opérateur. Cette dernière propriété n'existe pas dans les algèbres hermitiennes du fait que les fonctions continues n'opérent pas nécéssairement dans ces dernières [2]. Dans cet article, nous introduisons un calcul fonctionnel pour les fonctions harmoniques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans une algèbre de Banach à involution continue, ce qui est une extension de [1]. Une fois ce calcul défini, nous passons aux applications. Ainsi, nous obtenons dans les algèbres hermitiennes les analogues des théorèmes 2.1, 3.1 et 4.1 de [8]. Ensuite, nous établissons le lemme de Schwarz et le théorème du Pick. Enfin, nous considérons un èlèment normal de l'algèbre et prouvons les analogues des résultats précédents.

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Monsieur le Professeur M. Oudadess pour son aide précieuse.

II. Preliminaires

Soit A une algèbre de Banach complexe unitaire munie d'une involution $x \to x^*$. Pour $a \in A$, on définit la partie réelle de a notée $\Re a$, et la partie imaginaire de a notée $\Im a$, par:

$$\Re a = \frac{1}{2}(a + a^*) \qquad \Im a = \frac{1}{2i}(a - a^*).$$

Une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles x et y définie dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, et à valeurs dans A, est dite harmonique si elle est de classe $C^{(2)}$ sur U et satisfait à la condition:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

On désigne par $h(U, A)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur U, et à valeurs dans A, et par $H(U, A)$ celles des fonctions holomorphes et à valeurs dans A. Rappelons qu'on désigne par $h(U)$ (résp. $H(U)$) l'ensemble des fonctions harmoniques (résp. holomorphes) sur U et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Une fonction f de $h(U, A)$ est dite hermitienne si $f(Z) = f(Z)^*$, pour tout Z dans U, et on désigne par $\Re f$ (résp. $\Im f$) la partie réelle de f (résp. la partie imaginaire de f) définie par $\Re f(Z) = \Re(f(Z))$ (résp. $\Im f(Z) = \Im(f(Z))$) pour tout $Z \in U$.

Une fonction f définie sur U, à valeurs dans A, est dite faiblement harmonique si elle de classe $C^{(2)}$ sur U et vérifie: $\phi \circ f \in h(U)$, pour tout $\phi \in A'$, où A' est le dual topologique de A.

Du fait que A' sépare les points de A, on montre qu'une fonction de classe $C^{(2)}$ sur U, à valeurs dans A, est faiblement harmonique si, et seulement si, elle est harmonique. En utilisant le fait que les èlèments de $H(U, A)$ vérifient les conditions de Cauchy, on montre que $H(U, A) \subset h(U, A)$.

La proposition suivante est de démonstration classique.

Proposition II.1

Soit A une algèbre de Banach complèxe à involution continue et $f \in h(U, A)$ une fonction hermitienne. Alors f est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U et à valeurs dans A.

Une algèbre de Banach involutive est dite hermitienne si pour tout élèment hermitien son spectre est réel [5]. Pour deux élèments hermitiens h et k de A, nous noterons $h \geq k$ si $h - k$, est positif, i.e., $\mathrm{Sp}\,(h-k) \subset \mathbb{R}_+$. Si de plus $h - k$ est inversible, on écrira $h > k$.

Remarque II.2. Si l'involution de A est continue, on peut se ramener à $\|x^*\| = \|x\|$ pour tout $x \in A$ et dans ce cas, on a toujours $\rho\ (x^*x)^{1/2} \leq \|x\|$, pour tout $x \in A$, où ρ désigne le rayon spectral.

Dans toute la suite, Z est un abus de notation pour Ze où $Z \in \mathbb{C}$ et e est l'unité de A, et $|x|_*$ désignera la quantité $\rho\ (x^*x)^{1/2}$, pour $x \in A$, où ρ désigne le rayon spectral. V. Ptàk [5] a montré le résultat suivant: si A est hermitienne, alors $|\cdot|_*$ est une semi-norme d'algèbre sur A telle que $\rho(x) \leq |x|_*$, pour tout $x \in A$. On rappelle le résultat, de Shirali-Ford [7], suivant:

$$A \text{ hermitienne} \implies x^*x \geq 0, \text{ pour tout } x \in A. \tag{2}$$

III. Définitions et lemmes

DÉFINITION III.1. Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne et $x \in A$.

i) On dira que x est une Ptàk-contraction si $|x|_* \leq 1$. Si $|x|_* < 1$, on dit que x est une Ptàk-contraction propre.

ii) On dira que x est une contraction topologique si $\rho(x) \leq 1$.

Si $\rho(x) < 1$, on dit que x est une contraction tolopogique propre.

Une façon naturelle de définir un calcul fonctionnel harmonique est d'utiliser la formule de Poisson.

DÉFINITION III.2. Soit A une algèbre de Banach complexe unitaire à involution continue, U un ouvert de $\mathbb{C}$, $Z_0 \in U$ telque $\overline{D(Z_0, R)} \subset U$ $(R > 0)$, $x \in A$ avec $\mathrm{Sp}\, x \subset D\ (Z_0, R)$ et $f \in h(U, A)$. On pose, alors:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|Z-Z_0|=R} f(Z)\, \Re\left[(Z + x - 2Z_0)(Z - x)^{-1}\right] \frac{|dZ|}{R}. \tag{3}$$

Remarque III.3.

i) Si $f \in h(U)$, l'expression de $f(x)$ coincide avec celle donnée dans [1].

ii) Si f et $g \in h(U, A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et x un élèment de A vérifiant les conditions de la définition III.2, alors:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

iii) Si $f \in H(U, A)$, l'expression de $f(x)$ coincide avec celle donnée par le calcul fonctionnel holomorphe classique:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(Z)(Z-x)^{-1} dZ,$$

où Γ est un contour fermé contenu dans U et contenant Sp x dans son intérieur.

Lemme III.4 [6]

Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne h et k deux élèments hermitiens de A.

1) Si $h \geq 0$, $k \geq 0$, alors $h + k \geq 0$.

2) Si $h \geq 0$, $k > 0$, alors $h + k > 0$.

Lemme III.5

Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne et soit $x \in A$. Alors:

1) $|x|_* < 1 \Longleftrightarrow e - x^*x > 0$.

2) $|x|_* \leq 1 \Longleftrightarrow e - x^*x \geq 0$.

Preuve. 1) Supposons que $|x|_* < 1$. Il est clair que $e - x^*x$ est hermitien et inversible dans A car $\rho(x^*x) = |x|_*^2 < 1$. Ensuite, on a:

$$\mathrm{Sp}\,(e - x^*x) = \{1 - \lambda : \lambda \in \mathrm{Sp}\,(x^*x)\} \tag{4}$$

Par ailleurs, d'après (2), $\mathrm{Sp}\,(x^*x) \subset [0, r]$ où $r = |x|_*^2 < 1$. D'où $\beta > 0$ pour $\beta \in \mathrm{Sp}\,(e - x^*x)$. Réciproquement, par (4), on obtient $1 - \lambda > 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(x^*x)$. Par suite

$$\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(x^*x)} \lambda < 1.$$

D'où $|x|_* < 1$.

2) Elle se démontre de manière analogue à 1). $\square$

Lemme III.6

Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne et soit x un élèment hermitien de A. Alors

$$x \geq 0 \Longleftrightarrow \big||x|_* - x\big|_* \leq |x|_*.$$

Preuve. L'équivalence est triviale pour $x \in \mathrm{Rad}(A)$ puisque alors $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$. Supposons $x \notin \mathrm{Rad}(A)$. Alors, par homothetie, $|x|_* = 1$. Si $x \geq 0$ et $|x|_* = 1$, alors

$$\mathrm{Sp}\,(e - x) = \{1 - \lambda : \lambda \in \mathrm{Sp}\, x\} \subset [0,1]$$

Il s'ensuit que $|e - x|_* \leq 1$. Si maintenant x est un élèment hermitien de A tel que $|e - x|_* \leq 1$, on a $1 - \lambda \leq 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$. D'où $\lambda \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$ et alors $x \geq 0$. □

Remarque III.7. Le lemme précédent montre que l'ensemble P des élèments positifs de A est fermé pour $|\cdot|_*$. Si de plus l'involution de A est continue, la remarque II.2 montre que P est fermé pour la norme $\|\cdot\|$.

Nous établissons ensuite le lemme suivant qui est une extension d'un résultat de Fuglede, Putnam et Rosenblum [6] sur les opérateurs.

Lemme III.8

Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne semi-simple, x un élèment de A et y un élèment normal de A tels que $xy = yx$. Alors $xy^* = y^*x$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que si a et b son deux élèments de A tels que $b = a - a^*$, alors

$$c = \exp b = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} b^n$$

est un élèment unitaire de A, i.e., $cc^* = e$ car

$$c^* = \exp(b^*) = \exp(-b) = c^{-1}.$$

Ensuite, pour tout élèment c unitaire de A, on a $|c|_* = 1$.

Soit maintenant x un élèment de A et y un élèment normal de A tels que $xy = yx$. Alors, par induction sur n, on a

$$xy^n = y^n x, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'où

$$x(\exp y) = (\exp y)x.$$

Et par conséquent

$$x = \exp(-y)x\exp(y).$$

Soit $u = \exp(y^* - y)$. Comme y est normal, on a

$$\exp(y^*)x\exp(-y^*) = uxu^*.$$

Par ailleurs, $|u|_* = |u^*|_* = 1$, d'où

$$\left|\exp(y^*)x\exp(-y^*)\right|_* \leq |x|_*. \tag{5}$$

Soit f défine sur $\mathbb{C}$, et à valeurs dans A, par:

$$f(\lambda) = \exp(\lambda y^*)x\exp(-\lambda y^*), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

D'après (5), $|f(\lambda)|_* \leq |x|_*$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ car l'hypothèse du lemme est aussi valable pour $\bar{\lambda}x$ et $\bar{\lambda}y$. Finalement, f est une fonction entière bornée à valeurs dans $(A, |\cdot|_*)$ qui est une algèbre normée car A est semi-simple. Il s'ensuit, d'après le théorème de Liouville [6], que

$$f(\lambda) = f(0) = x, \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

D'où $\exp(\lambda y^*)x = x\exp(\lambda y^*)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Et par conséquent $xy^* = y^*x$. □

Lemme III.9

Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne, h et k deux élèments hermitiens de A tels que $0 \leq k \leq h$ et h est inversible. Alors $\rho(h^{-1}k) \leq 1$.

Preuve. Puisque h est positif et inversible, il existe un élément hermitien u de A tel que $h = u^2$. Ensuite, on a:

$$h - k = u^2 - k = u(e - u^{-1}ku^{-1})u \geq 0.$$

D'où $e - u^{-1}ku^{-1} \geq 0$ car u est inversible. Par suite $1 - \lambda \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u^{-1}ku^{-1})$. Donc

$$\rho(h^{-1}k) = \rho(u^{-2}k) = \rho(u^{-1}ku^{-1}) \leq 1. \ \square$$

Lemme III.10

Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne et $u \in A$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe une involution $^\#$, hermitienne sur A, telle que:

i) $|\cdot|_*$ est équivalente à $|\cdot|_\#$.

ii) $|u|_\# \leq \rho(u) + \varepsilon$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|u^m\|^{1/m} \leq \rho(u)+\varepsilon$. Posons $t = \rho(u)+\varepsilon$. Pour tout $x \in A$, on pose:

$$x^{\#} = q^{-1}x^*q,$$

où

$$q = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{u^{*j}u^j}{t^{2j}}.$$

Remarquons tout d'abord que

$$q = e + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{u^{*j}u^j}{t^{2j}},$$

et d'après (2) et le lemme III.4, $q > 0$. Ensuite, il est aisé de voir que $^{\#}$ est une involution sur A. De plus

$$e + x^{\#}x = e + q^{-1}x^*qx = q^{-1}(q + x^*qx).$$

Or $q + x^*qx$ est inversible car il existe q_0 hermitien de A tel que $q = q_0^2$ et

$$q + x^*qx = q + x^*q_0q_0x > 0$$

d'après (2) et le lemme III.4. D'où $e + x^{\#}x$ est inversible pour tout $x \in A$. Et par conséquent $\#$ est une involution hermitienne sur A [5]. On pose $|x|_{\#} = \rho(x^{\#}x)^{1/2}$; d'après [5], $|\cdot|_{\#}$ est une semi-norme d'algèbre sur A telle que $\rho(x) \leq |x|_{\#}$ pour tout $x \in A$. Ensuite on a pour tout $y \in A$

$$|y|_{\#} = \rho(y^{\#}y)^{1/2} \leq |y^{\#}y|_*^{1/2} = |q^{-1}y^*qy|_*^{1/2} \leq |y|_*\big(|q^{-1}|_*\,|q|_*\big)^{1/2}.$$

De même

$$|y|_* = \rho(y^*y)^{1/2} \leq |y^*y|_{\#}^{1/2} = |qy^{\#}q^{-1}y|_{\#}^{1/2} \leq |y|_{\#}\big(|q||_{\#}\,|q^{-1}|_{\#}\big)^{1/2}.$$

D'où

$$|\cdot|_* \qquad \text{est équivalente à} \qquad |\cdot|_{\#}.$$

Finalement:

$$
\begin{aligned}
|u|_{\#}^{2} &= \rho(q^{-1}u^{*}qu) \\
&= \rho\left[q^{-1}\left(u^{*}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{u^{*j}u^{j}}{t^{2j}}\,u\right)\right] \\
&= \rho\left[q^{-1}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{u^{*j+1}u^{j+1}}{t^{2j}}\right)\right] \\
&= t^{2}\,\rho\left[q^{-1}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{u^{*j+1}u^{j+1}}{t^{2j+2}}\right)\right] \\
&= t^{2}\,\rho\left[q^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{u^{*j}u^{j}}{t^{2j}}\right)\right] \\
&= t^{2}\,\rho\left[q^{-1}\left(q+\frac{u^{*m}u^{m}}{t^{2m}}-e\right)\right].
\end{aligned}
$$

Par ailleurs on a:

$$0 \leq q + \frac{u^{*m}u^{m}}{t^{2m}} - e \leq q,$$

car

$$e - \frac{u^{*m}u^{m}}{t^{2m}} \geq 0$$

d'après le lemme III.5, puisque

$$\left|\frac{u^{m}}{t^{m}}\right|_{*} \leq \left\|\frac{u^{m}}{t^{m}}\right\| \leq 1.$$

D'où, d'après le lemme III.9,

$$\rho\left[q^{-1}\left(q+\frac{u^{*m}u^{m}}{t^{2m}}-e\right)\right] \leq 1$$

et alors $|u|_{\#} \leq t$.

Remarque III.11. Soit $x \in A$ une contraction topologique propre. Alors il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que

i) $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_{*}$.

ii) x est une Ptàk-contraction propre de A muni de l'involution $^{\#}$, i.e., $|x|_{\#} < 1$.

Remarque III.12. Soit $x_1, x_2, \dots x_p$, p èlèments de A qui commutent entre eux deux à deux et soit $\varepsilon > 0$. On montre qu'il existe une involution $^\#$, hermitienne sur A, telle que

i) $|\cdot|_*$ est équivalente à $|\cdot|_\#$.

ii) $|x_k|_\# \leq \rho(x) + \varepsilon$ pour $k = 1, 2, \dots, p$.

Lemme III.13.

Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne, K un compact de $\mathbb{C}$ et soit f une application continue sur K et à valeurs dans A. Si en tout point Z de K, $f(Z) > 0$, il existe un nombre fixe $\delta > 0$ tel que, pour $Z \in K$, $f(Z) \geq \delta$.

Preuve. Soit g l'application définie sur K par $g(Z) = \rho(f(Z)^{-1})$. Il est clair que g est semi-continue supérieurement sur K. Par suite, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait, pour tout $Z \in K$,

$$\rho(f(Z)^{-1}) = g(Z) \leq \frac{1}{\delta}\,.$$

D'où $\rho(f(Z)) \geq \delta$ pour tout $Z \in K$. □

IV. Extension d'un théorème de Von-Neumann

Dans toute la suite, A désignera une algèbre de Banach unitaire hermitienne à involution * continue, $D = \{Z : |Z| < 1\}$ étant le disque unité de $\mathbb{C}$. On considère

$$\begin{aligned} N_A^*(D) = \{f \in H(D, A) : f(Z)f(w) = f(w)f(Z) \text{ et } f(Z)f(Z)^* \\ = f(Z)^*f(Z),\ \forall\, Z, w \in D\}, \end{aligned}$$

$$B_A^*(D) = \{f \in N_A^*(D) : |f(Z)|_* < 1\ \forall\, Z \in D\},$$

$$P_A^*(D = \{g \in N_A^*(D) : \Re g(Z) > 0\ \forall\, Z \in D\}.$$

On a alors le :

Théorème IV.1.

Soit x une contraction topologique propre de A. Alors il existe une involution $^\#$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_\#$ est équivalente à $|\cdot|_*$ et l'on a:

1) $|f(x)|_\# < 1$, pour tout $f \in B_A^\#(D)$ tel que $xf(Z) = f(Z)x$, pour tout $Z \in D$.

2)

$$\Re g(x) = \frac{g(x) + g(x)^\#}{2} > 0,$$

pour tout $g \in P_A^\#(D)$ tel que $xg(Z) = g(Z)x$ pour tout $Z \in D$.

Preuve. D'après la remarque III.11, il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_{*}$ et $|x|_{\#} < 1$. Montrons maintenant que les deux assertions du théorème sont équivalentes.

Quitte à remplacer A par $A/_{\mathrm{Rad}\,A}$, ce qui ne change pas le spectre, on peut supposer que A est semi-simple.

1) $\Longrightarrow$ 2). Soit $g \in P_A^{\#}(D)$. Alors $g(Z)+e$ est inversible, pour tout $Z \in D$. En effet, si B désigne la sous-algèbre pleine involutive fermée engendrée par $g(D)$, il est clair que B est hermitienne. De plus, d'après le lemme III.8, B est commutative et l'on a:

$$\mathrm{Sp}_B\big(e+g(Z)\big) = \big\{\chi(g(Z))+e : \chi \in M(B)\big\}$$

où $M(B)$ désigne l'ensemble des caractères non nuls de B. D'où $0 \notin \mathrm{Sp}_B\big(g(Z)+e\big)$, pour tout $Z \in D$.

On considère la fonction f définie, sur D, par:

$$f(Z) = \big(g(Z)-e\big)\big(g(Z)+e\big)^{-1}.$$

Il est clair que $f \in N_A^{\#}(D)$. De plus

$$g(Z) = \big(e+f(Z)\big)\big(e-f(Z)\big)^{-1}, \qquad \text{pour tout } Z \in D.$$

Et par suite

$$\Re g(Z) = \big(e-f(Z)^{\#}\big)^{-1}\big(e-f(Z)^{\#}f(Z)\big)\big(e-f(Z)\big)^{-1}, \qquad \forall\, Z \in D.$$

D'où

$$e-f(Z)^{\#}f(Z) = \big(e-f(Z)^{\#}\big)\,\Re g(Z)\,\big(e-f(Z)\big), \qquad Z \in D.$$

Par ailleurs, il existe un élèment hermitien $a(Z)$, pour tout $Z \in D$, tel que $a(Z)^2 = \Re g(Z)$. Ensuite, d'après (2),

$$e-f(Z)^{\#}f(Z) \geq 0, \qquad \text{pour tout } Z \in D.$$

Deplus, $e-f(Z)^{\#}f(Z)$ est inversible comme produit d'élèments inversibles. D'où

$$e-f(Z)^{\#}f(Z) > 0, \qquad \text{pour tout } Z \in D.$$

Par conséquent, d'après le lemme III.5, $|f(Z)|_{\#} < 1$ pour tout $Z \in D$, i.e., $f \in B_A^{\#}(D)$. Et puisque

$$xg(Z) = g(Z)x, \qquad \text{pour tout } Z \in D,$$

on a

$$xf(Z) = f(Z)x, \qquad \text{pour tout } Z \in D,$$

d'où $|f(x)|_\# < 1$. Ensuite, d'après le lemme III.5,

$$e - f(x)^\# f(x) > 0,$$

et soit $b(x)$ l'élèment hermitien tel que $e - f(x)^\# f(x) = b(x)^2$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \Re g(x) &= \big(e - f(x)^\#\big)^{-1}\big(e - f(x)^\# f(x)\big)\big(e - f(x)\big)^{-1} \\ &= \big(e - f(x)^\#\big)^{-1} b(x) b(x) \big(e - f(x)\big)^{-1} > 0. \end{aligned}$$

2) $\Longrightarrow$ 1). Soit $f \in B_A^\#(D)$. On considère la fonction g définie, sur D, par

$$g(Z) = \big(e + f(Z)\big)\big(e - f(Z)\big)^{-1}.$$

Alors $g \in N_A^\#(D)$ et l'on a:

$$\Re g(Z) = \big(e - f(Z)^\#\big)^{-1}\big(e - f(Z)^\# f(Z)\big)\big(e - f(Z)\big)^{-1}.$$

Et par le même calcul que précédement, on a:

$$\Re g(Z) > 0 \quad \text{pour tout} \quad Z \in D,$$

i.e., $g \in P_A^\#(D)$. De plus, si $xf(Z) = f(Z)x$, on a aussi $xg(Z) = g(Z)x$. D'où $\Re g(x) > 0$. Il en resulte alors que

$$e - f(x)^\# f(x) = \big(e - f(x)^\#\big)\Re g(x)\big(e - f(x)\big) > 0.$$

D'où, d'après le lemme III.5, $|f(x)|_\# < 1$.

Montrons maintenant 2). Soit $g \in P_A^\#(D)$. Alors $\Re g \in h(D, A)$. Soit $x \in A$, $|x|_\# < 1$ tel que $xg(Z) = g(Z)x$ pour tout $Z \in D$. Alors, d'après le lemme III. 8, $x\Re g(Z) = \Re g(Z)x$, pour tout $Z \in D$. Soit r et r' tels que $|x|_\# < r < r' < 1$. Il est clair que $\operatorname{Sp} x \subset D(0,r)$ et, d'après le lemme III.13, il exise $\delta > 0$ tel que $\Re g(Z) \geq \delta$, pour tout $Z \in \overline{D(0,r')}$. Soit h la fonction définie, sur $D(0,r')$, par:

$$h(Z) = \Re g(Z) - \delta.$$

Ensuite, d'après la définition III.2, on a :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{|Z|=r} h(Z)\Re\big[(Z+x)(Z-x)^{-1}\big]\,\frac{|dZ|}{r}. \tag{6}$$

Pour tout $Z \in C(0,r)$; $g(Z)x = xg(Z)$. D'où, d'après le lemme III.8, $xg(Z)^{\#} = g(Z)^{\#}x$ pour tout $Z \in C(0,r)$. Par suite $h(Z)$ et $\Re[(Z+x)(Z-x)^{-1}]$, sont deux élèments hermitiens qui commutent entre eux. De plus $h(Z) \geq 0$ sur $C(0,r)$ et pour $Z \in C(0,r)$ on a:

$$\Re\big[(Z+x)(Z-x)^{-1}\big] = \big(\bar{Z} - x^{\#}\big)^{-1}\big(r^2 - x^{\#}x\big)(Z-x)^{-1}.$$

Il s'ensuit, d'après le lemme III.5 et (2), que

$$\Re\big[(Z+x)(Z-x)^{-1}\big] \geq 0.$$

D'où

$$h(Z)\Re\big[(Z+x)(Z-x)^{-1}\big] \geq 0, \qquad \text{pour tout } Z \in C(0,r).$$

Par ailleurs, l'intégrale de droite dans (6) est la limite des sommes de la forme:

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi}\, h(re^{i\theta k})\, \Re\big[(re^{i\theta k} + x)(re^{i\theta k} - x)^{-1}\big](\theta_{k+1} - \theta_k)$$

où $\theta_k \in [0, 2\pi]$ pout tout $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ et $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < 2\pi$. Il est clair, d'après le lemme III.4, que $h_n(x) \geq 0$ pòur tout n et, par la remarque III.7,

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \geq 0.$$

Finalement, puisque $h(x) = \Re g(x) - \delta$, on a $\operatorname{Sp}\Re g(x) \subset [\delta, +\infty[$.

Remarque IV.2. Dans le théorème IV.1, x n'est pas nécéssairement normal.

Remarque IV.3. Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$, p élèments de A qui commutent entre eux deux à deux et tels que $\rho(x_i) < 1$ avec $i = 1,2,\dots,p$. D'après la remarque III.11, il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_*$ et $|x_i|_{\#} < 1$, $i = 1,2,\dots,p$. On a alors:

1) $|f(x)|_{\#} < 1$, pour tout $f \in B_A^{\#}(D)$ et tout $x \in \mathcal{S}$ tels que $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in D$, où $\mathcal{S}$ désigne le semi-groupe engendré par $\{x_1, x_2, \dots x_p\}$.

2) $\Re g(x) > 0$, pour tout $g \in P_A^{\#}(D)$ et tout $x \in \mathcal{S}$ tels que $xg(Z) = g(Z)x$ pour tout $Z \in D$. Ceci est une extension d'un résultat de Shih et Tan [8].

Le théorème 3.3 [8] est une extension aux contractions topologiques propres du théorème 1 [3] de Ky Fan sur les contractions propres. Pour les contraction topologiques, on montre que le théorème IV.1 est équivalent à l'extension suivante du théorème de von Neumann.

Théorème IV.4

Soit $x \in A$ une contraction topologique. Alors il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalent à $|\cdot|_*$ et l'on a: $|f(x)|_{\#} \leq 1$ pour tout $f \in N_A^{\#}(U)$ telle que $|f(Z)|_{\#} \leq 1$ et $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in \bar{D}$, où U est un voisinage quelconque de $\bar{D}$.

Preuve. Quitte à remplacer A par $A/_{\mathrm{Rad\,A}}$, ce qui ne change pas le spectre, on peut supposer que A est semi-simple. Montrons maintenant que le théorème IV.4 se déduit du théorème IV.1. D'après le lemme III.10, pour $\varepsilon > 0$, il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_*$ et $|x|_{\#} \leq 1+\varepsilon$. On pose $y = (1+\varepsilon)^{-1}x$. En excluant le cas trivial où f est une constante, on a $|f(Z)|_{\#} < 1$ sur D d'après le principe du maximum pour les fonctions analytiques vectorielles [4, p. 100]. Ensuite soit $r \in [0,1[$. Alors $|ry|_{\#} < 1$. D'où $|f(ry)|_{\#} < 1$ d'après le théorème IV.1. Soit maintenant $\alpha > 0$ tel que f est dans $N_A^{\#}(U_\alpha)$ avec $U_\alpha = D(0, 1+2\alpha)$. Quand $r \longrightarrow 1$, $f(rZ) \longrightarrow f(Z)$ uniformément sur $\bar{D}(0, 1+\alpha)$. De plus $\operatorname{Sp} y \subset D(0, 1+\alpha)$. Et par la continuité du calcul holomorphe, $f(ry) \longrightarrow f(y)$ uniformément pour $\|\cdot\|$, d'où $f(ry) \longrightarrow f(y)$ uniformément pour $|\cdot|_{\#}$ car $|\cdot|_{\#}$ est moins fine que $\|\cdot\|$ sur A d'après la remarque II.2. Ainsi $|f(y)|_{\#} \leq 1$, i.e.,

$$|f(1+\varepsilon)^{-1}x)|_{\#} \leq 1.$$

Ensuite, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $f((1+\varepsilon)^{-1}x) \longrightarrow f(Z)$ uniformément sur $D(0, 1+\alpha)$. Et par le même argument que précédement, $f((1+\varepsilon)^{-1}x) \longrightarrow f(Z)$ uniformément pour $|\cdot|_{\#}$. D'où $|f(x)|_{\#} \leq 1$. □

Avant d'établir que le théorème IV.1 se déduit du théorème IV.4 montrons d'abord le corollaire suivant qui découle directement du théorème IV.4.

Corollaire IV.5.

Soit $x \in A$ et $f \in N_A^{\#}(D)$ tels que $|x|_{\#} \leq 1$, $xf(Z) = f(Z)x$ et $f(Z) \in \mathrm{Rad}(A)$ pour tout $Z \in D$. Alors $f(x) \in \mathrm{Rad}(A)$

Preuve. D'après [5], $\mathrm{Rad}(A) = \{y : |y|_{\#} = 0\}$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, $|nf(Z)|_{\#} = 0$ pour tout $Z \in D$. D'où, d'après le théorème IV.2, $|nf(x)|_{\#} \leq 1$ pour tout $x \in A$ tel que $|x|_{\#} \leq 1$ et $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in D$. Par conséquent, $|f(x)|_{\#} = 0$. □

Le théorème IV.1 se réduit du théorème IV.4 du fait que du théorème IV.4 découle le résultat suivant qui implique clairement le théorème IV.1.

Théorème IV.6

Soit $f \in N_A^{\#}(D)$. *Pour* $0 < r < 1$, *on pose*

$$M(r) = \max\left\{|f(Z)|_{\#} : |Z| = r\right\}.$$

Alors

$$M(r) = \max\left\{|f(x)|_{\#} : |x|_{\#} \leq r \text{ et } xf(Z) = f(Z)x \; \forall\, Z \in D\right\}.$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que si $M(r) = 0$, alors $f(Z) \in \mathrm{Rad}(A)$ pour tout $Z \in D(0,r)$, d'après le principe du maximum [4, p. 100]. Par consèquent $|f(rZ)|_{\#} = 0$ pour tout $Z \in \bar{D}$. D'où, d'après le corollaire IV.5, $|f(rx)|_{\#} = 0$ pour tout $|x|_{\#} \leq 1$ et $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in D$, ceci est équivalent à $|f(x)|_{\#} = 0$ pour tout $|x|_{\#} \leq r$ et $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in D$. Soit maintenant r fixé tel que $0 < r < 1$ et $M(r) > 0$. Alors la fonction g définie, sur $D(0, 1/r)$, par:

$$g(Z) = \frac{f(rZ)}{M(r)}$$

est holomorphe sur $D(0, 1/r)$ et l'on a $|g(Z)|_{\#} \leq 1$ sur $\bar{D}$ car pour tout $Z \in C(0,1)$, $|f(rZ)|_{\#} \leq M(r)$.

Ensuite, par le théorème IV.4, $|g(x)|_{\#} \leq 1$ pour tout x tel que $|x|_{\#} \leq 1$ et tel que $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in D$. Ainsi $|f(x)|_{\#} \leq M(r)$ pour tout $x \in A$ tel que $|x|_{\#} \leq r$ et $f(Z)x = xf(Z)$ pour tout $Z \in D$. Finalement, si $|Z_0| = r$ et $|f(Z_0)|_{\#} = M(r)$, alors

$$|Z_0 e|_{\#} = |Z_0| = r$$

et l'on a:

$$|f(Z_0 e)|_{\#} = |f(Z_0)e|_{\#} = |f(Z_0)|_{\#} = M(r).$$

D'où le résultat. □

Remarque IV.7. Pour $f \in H(D)$, on obtient, en plus de la conclusion du théorème IV.6, que

$$M(r) = \max\left\{\rho(f(x)) : \rho(x) \leq r\right\}.$$

Ceci est une extension de [9, Théorème 4.1].

V. Extension du lemme de Schwarz

Soit f et g deux fonctions définies sur un domaine $U \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans A et soit $x \in A$. On dit que f et g commutent si:

$$f(Z)g(w) = g(w)f(Z), \qquad \forall\, Z, w \in U.$$

On dit que x commute avec f si:

$$xf(Z) = f(Z)x, \qquad \forall\; Z \in U.$$

Théorème V.1 (Analogue du lemme de Schwarz)

Soit x une contraction topologique propre de A. Alors il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_{*}$. De plus, pour f, g deux élèments de $H(D,A)$ et $h \in N_A^{\#}(D)$ vérifiant $f = gh$ avec $|h(Z)|_{\#} \leq 1$ sur D et $|h(Z)|_{\#} \not\equiv 1$ si elle n'est pas une constante, on a:

1) Si x commute avec h, alors:

$$g(x)g(x)^{\#} \geq f(x)f(x)^{\#}, \tag{7}$$

$$|g(x)|_{\#} \geq |f(x)|_{\#}. \tag{8}$$

En outre si h n'est pas de la forme $h(Z) = y$, y un élèment normal de A, pour $^{\#}$, avec $|y|_{\#} = 1$, l'inegalité (7) est stricte si, et seulement si, $g(x)g(x)^{\#} > 0$.

2) Si x commute avec h et si h et g commutent, alors on a:

$$g(x)^{\#}g(x) \geq f(x)^{\#}f(x), \tag{9}$$

en plus de (7) et (8).

L'inégalité (9) est stricte si, et seulement si, $g(x)^{\#}g(x) > 0$ et h n'est pas de la forme $h(Z) = y$ avec $|y|_{\#} = 1$.

3) Si l'égalité est réalisée dans (8) et $g(x) \notin \mathrm{Rad}(A)$, alors $h(Z) = y$ avec $|y|_{\#} = 1$.

Si $g(x) \in \mathrm{Rad}(A)$ où $h(Z) = y$ avec y unitaire dans A, pour $\#$, alors l'égalité est réalisée dans (8).

Remarque V.2. L'élèment x n'est pas nécéssairement normal et f n'est pas nécéssairement un élèment de $N_A^{\#}(D)$.

Preuve. D'après la remarque III.11, il existe une involution $\#$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_\#$ est équivalente à $|\cdot|_*$ et $|x|_\# < 1$. Soit maintenant f et g deux élèments de $H(D, A)$ tels que $f = gh$ avec $h \in N_A^\#(D)$. Alors:

$$\begin{aligned} g(x)g(x)^\# - f(x)f(x)^\# &= g(x)\big(e - h(x)h(x)^\#\big)g(x)^\# \\ &\geq \big(1 - |h(x)|_\#^2\big)g(x)g(x)^\#. \end{aligned}$$

Ainsi, si $h(Z) = y$ sur D avec $|y|_\# = 1$, alors $h(x) = y$ et l'on a:

$$1 - |h(x)|_\#^2 = 1 - |y|_\#^2 = 0.$$

Soit maintenant h une fonction qui n'est pas une constante y telle que $|y|_\# = 1$. Alors, d'après le principe du maximum [4, p. 100], $|h(Z)|_\# < 1$ sur D et l'on a $|h(x)|_\# < 1$ d'après le théorème IV.1. Ensuite $1 - |h(x)|_\#^2 > 0$, d'où

$$g(x)g(x)^\# \geq f(x)f(x)^\#$$

et

$$|g(x)|_\# \geq |f(x)|_\#.$$

Par ailleurs, (7) est stricte si, et seulement si, $g(x)\, g(x)^\# > 0$ car $1 - |h(x)|_\#^2 > 0$.

2) Elle se fait de manière analogue à 1).

3) On suppose que l'égalité est réalisée dans (8), si $|g(x)|_\# = 0$, i.e., $g(x) \in \mathrm{Rad}(A)$). Alors $h(Z) = y$, $|y|_\# = 1$ car si non, on aurait $|h(x)|_\# < 1$ et par suite $|f(x)|_\# < |g(x)|_\#$.

Finalement, si $g(x) \in \mathrm{Rad}(A)$), alors $|g(x)|_\# = 0$ et alors $|f(x)|_\# = 0$. De même si $h(Z) = y$ avec y unitaire sur A, pour $^\#$, on a l'inégalité dans (8). □

VI. Extension du théorème du Pick

En utilisant la remarque III.11, le lemme III.5, le théorème V.1 et la téchnique de [9], on montre le:

Théorème VI.1

Soit x une contraction topologique propre de A. Alors il existe une involution $^\#$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_\#$ est équivalente à $\cdot|_*$. De plus, pour $f \in B_A^\#(D)$ et y un élèment normal de A, pour $^\#$, qui commute avec x tel que $|y|_\# < 1$ et f commute avec x et y, on a:

$$(e - x^{\#}y)^{-1}(x^{\#} - y^{\#})(x - y)(e - y^{\#}x)^{-1}$$

$$\geq (e - f(x)^{\#}f(y))^{-1}(f(x)^{\#} - f(y)^{\#})(f(x) - f(y))(e - f(y)^{\#}f(x))^{-1}, \quad (10)$$

$$(x - y)(e - y^{\#}x)^{-1}(e - x^{\#}y)^{-1}(x^{\#} - y^{\#})$$

$$\geq \left(f(x) - f(y)\right)\left(e - f(y)^{\#}f(x)\right)^{-1}\left(e - f(x)^{\#}f(y)\right)^{-1}\left(f(x)^{\#} - f(y)^{\#}\right) \quad (11)$$

et

$$\left|(x - y)(e - y^{\#}x)^{-1}\right|_{\#} \geq \left|f(x) - f(y)(e - f(y)^{\#}f(x))^{-1}\right|_{\#}. \quad (12)$$

Remarque VI.2. x n'est pas nécéssairement normal.

VII. Autre extension

Dans toute la suite, nous désignerons par x un élèment normal de A et f un élèment de $H(D, A)$ qui commute avec x. On a alors le:

Théorème VII.1

Soit x une contraction topologique propre normale de A. Alors il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_{*}$ et l'on a:

1)

$$\Re g(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) + g(x)^{\#}\right) > 0$$

pour tout $g \in H(D, A)$ tel que

$$\Re g(Z) = \frac{1}{2}\left(g(Z) + g(Z)^{\#}\right) > 0$$

et g commute avec x.

2) $|f(x)|_{\#} < 1$ pour tout $f \in H(D, A)$ tel que $|f(Z)|_{\#} < 1$ et f commute avec x.

Preuve. D'après la remarque III.5, il existe une involution $\#$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_\#$ est équivalente à $|\cdot|_*$ et $|x|_\# < 1$. De plus, par construction de $\#$, on a: $xx^\# = x^\# x$. Soit maintenant r et r' tels que $|x|_\# < r < r' < 1$. Alors $\operatorname{Sp} x \subset D(0,r)$ et par la définition II.2 on a:

$$\Re g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|Z|=r} \Re g(Z) \Re \left[(Z+x)(Z-x^{-1})\right] \frac{|dZ|}{r}$$

où les parties réelles son prises pour l'involution $\#$.

Ensuite, pour tout $Z \in \overline{D(0,r)}$, $xg(Z) = g(Z)x$. D'où, d'après le lemme III.8, $xg(Z)^\# = g(Z)^\# x$ pour $Z \in \overline{D(0,r)}$. Par conséquent

$$\Re g(Z) \Re \left[(Z+x)(Z-x)^{-1}\right]$$

est un élèment hermitien de A pour $\#$. De plus, on a

$$\Re g(Z) \Re \left[(Z+x)(Z-x)^{-1}\right] > 0$$

pour tout $Z \in \overline{D(0,r)}$. Soit maintenant h défine, sur $\overline{D(0,r)}$, par

$$h(Z) = \Re g(Z).$$

Par hypothèse $h(Z) > 0$ pour $Z \in \overline{D(0,r)}$. Ensuite, d'après le lemme II.13, il existe $\delta > 0$ tel que $h(Z) \geq \delta$ pour tout $Z \in \overline{D(0,r)}$. Enfin, par le même calcul que dans le théorème IV.1, on montre que $h(x) \geq \delta$. D'où le résultat.

3) Soit $f \in H(D,A)$ tel que $|f(Z)|_\# < 1$. On considère la fonction g défine, sur D, par

$$g(Z) = \left(e + f(Z)\right)\left(e - f(Z)\right)^{-1}$$

on montre facilement que $\Re g(Z) > 0$ pour tout $Z \in D$. Et comme x commute avec f, il en est de même de x et de g. Par ailleurs,

$$2\Re g(Z) = \left(e - f(Z)^\#\right)^{-1}\left(e - f(Z)^\# f(Z)\right)\left(e - f(Z)\right)^{-1}, \qquad Z \in D.$$

Ensuite, d'après le lemme III.5, $\Re g(x) > 0$. D'où

$$e - f(x)^\# f(x) = \left(e - f(x)^\#\right)\Re g(x)\left(e - f(x)\right) > 0.$$

Enfin, d'après le lemme III.5, $|f(x)|_\# < 1$. $\square$

En appliquant le théorème VII.1 et les preuves précédentes, on montre les théorèmes suivants:

Théorème VII.2

Soit $x \in A$ une contraction topologique normale. Alors il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_{*}$. Et l'on a: $|f(x)|_{\#} \leq 1$ pour tout $f \in H(U,A)$ tel que $|f(Z)|_{\#} \leq 1$ pour tout $Z \in U$ et tel que x commute avec f, où U est un voisinage de $\bar{D}$.

Théorème VII.3

Soit $f \in H(D,A)$. Pour $0 < r < 1$, on pose

$$M(r) = \max\left\{|f(Z)|_{\#} : |Z| = r\right\}.$$

Alors

$$M(r) = \max\left\{|f(x)|_{\#} : |x|_{\#} \leq r \text{ et } x \text{ commute avec } f\right\}.$$

Théorème VII.4

Soit x une contraction topologique propre normale de A. Alors il existe une involution $^{\#}$, hermitienne sur A, telle que $|\cdot|_{\#}$ est équivalente à $|\cdot|_{*}$. De plus pour $f = gh$, pour $g, h \in H(D,A)$ tels que $|h(Z)|_{\#} \leq 1$ sur D, et $|h(Z)|_{\#} \not\equiv 1$ si h non constante, on a:

1) Si x commute avec h, alors:

$$g(xg(x)^{\#} \geq f(x)f(x)^{\#} \tag{13}$$

$$|g(x)|_{\#} \geq |f(x)|_{\#}. \tag{14}$$

Si h n'est pas de la forme $h(Z) = y$, y un élèment de A, normal pour $^{\#}$, avec $|y|_{\#} = 1$, l'inégalité (13) est stricte si, et seulement si, $g(x)g(x)^{\#} > 0$.

2) Si x commute avec h et g, et si

$$h(Z)g(w) = g(w)h(Z), \qquad h(Z)^{\#}g(w) = g(w)h(Z)^{\#}, \qquad \forall\, Z, w \in D.$$

alors on a :

$$g(x)^{\#}g(x) \geq f(x)^{\#}f(x) \tag{15}$$

en plus de (13) et (14).

L'inégalité est stricte dans (15) si, et seulement si, $g(x)^{\#}g(x) > 0$ et h n'est pas de la forme $h(Z) = y$ avec $|y|_{\#} = 1$.

3) Si l'égalité est réalisée dans (14) et $g(x) \notin \mathrm{Rad}(A)$, alors $h(Z) = y$ avec $|y|_{\#} = 1$.

Si $g(x) \in \mathrm{Rad}(A)$ où $h(Z) = y$ avec y unitaire dans A, pour $^{\#}$, alors l'égalité est réalisé dans (14).

References

1. Akkar, M., Elkinani, A., and Oudadess, M., Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel, *Ann. Sc. Math. Québec* **12** (1988), 151–169.
2. Akkar, M., Elkinani, A., and Oudadess, M., Caractérisations des C*-algèbres par le calcul fonctionnel, *Extracta Math.* **4** (1989), 142–144.
3. Fan, K., Analytic functions of a proper contraction, *Math. Z.* **160** (1978), 275–290.
4. Hille, E., and R. S. Philips, *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society, Providence, 1957.
5. Pták, V., Banach algebras with involution, *Manuscripta. Math.* **6** (1972), 247–290.
6. Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
7. Shirali, S., and Ford, J. W. M., Symmetry in complex involutory Banach algebras II, *Duke Math. J.* **37** (1970). 275–280.
8. Shih, M. H., and Tan, K-K., Analytic functions of topological proper contractions, *Math. Z.* **187** (1984), 317–323.
9. Zhiguang, T., Analytic operator functions *J. Math. Anal. Appl.* **103** (1984), 293–320 .