Collect. Math. **41**, 1 (1990), 59-69

El polinomio de Poincaré-Hodge de un producto simétrico de variedades kählerianas compactas

Josep Burillo

Departament d'Àlgebra i Geometria,

Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, 08007 Barcelona, Spain

Received 20/JUL/90

Abstract

In this paper we compute the Poincaré-Hodge polynomial of a symmetric product of a compact kähler manifold, following the method used by Macdonald, in the topological case, to compute the Poincaré polynomial of a compact polyhedron, and we give some applications, in particular to the case of curves.

Introducción

El objetivo de este artículo es el cálculo del polinomio de Poincaré-Hodge de un producto simétrico de una variedad kähleriana compacta, basándonos en el artículo de Macdonald [5], donde se calcula el polinomio de Poincaré de un producto simétrico de un poliedro compacto. Dado que la cohomología de un producto simétrico es isomorfa a la parte fija de la cohomología del producto cartesiano bajo la acción del grupo simétrico $\mathcal{S}_n$, el cálculo se obtiene aplicando la teoría de representaciones de dicho grupo. En general $X^{(n)}$ no es una variedad lisa, pero no obstante, la estructura de Hodge-Deligne canónica de $H^r(X^{(n)}, \mathbb{C})$ es pura de peso r (Deligne [1]), luego es posible hablar de descomposición de Hodge en el producto simétrico y por tanto extender los cálculos de Macdonald a las representaciones obtenidas en la pieza de tipo (p,q) de la descomposición. En la sección 1 se siguen los razonamientos de

Macdonald extendiéndolos al caso bigraduado, y en la sección 2 se da el resultado principal para el polinomio de Poincaré-Hodge en el Teorema 2.4. Por último, en la sección 3 se dan algunas aplicaciones, en particular al caso de curvas, donde se da una expresión para los números de Hodge de los productos simétricos de una curva de género g.

1. Preliminares

(1.1) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero, y sea

$$M = \bigoplus_{r,s\geq 0} M^{rs}$$

un $\mathbb{K}$-espacio vectorial bigraduado tal que la dimensión de cada M^{rs} es finita, y sea h^{rs} esta dimensión. Definimos el polinomio de Poincaré-Hodge del espacio bigraduado M por

$$P(M,x,y) = \sum_{r,s\geq 0} (-1)^{r+s} h^{rs} x^r y^s.$$

Con estas notaciones es inmediato comprobar que, si M y N son dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales bigraduados, y $M \otimes_{\mathbb{K}} N$ se dota de la bigraduación natural, se verifica

$$P(M \otimes_{\mathbb{K}} N, x, y) = P(M,x,y)P(N,x,y).$$

(1.2) Sea n un entero positivo, y sea $V = M^{\otimes n}$ la n-ésima potencia tensorial de M. Consideraremos en lo que sigue la representación ω de $\mathcal{S}_n$ sobre V definida por: dados $\alpha \in \mathcal{S}_n$ y $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in M^{\otimes n}$, con $x_i \in M^{r_i s_i}$,

$$\omega(\alpha)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^{\varepsilon} x_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha^{-1}(n)},$$

donde

$$\varepsilon = Q_\alpha(r_1 + s_1, \ldots, r_n + s_n),$$

y Q_α es la forma cuadrática definida por

$$Q_\alpha(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i<j} a_{ij} t_i t_j,$$

y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i-j)(\alpha(i)-\alpha(j)) < 0 \\ 0 & \text{si } (i-j)(\alpha(i)-\alpha(j)) > 0. \end{cases}$$

Como la acción de $\mathcal{S}_n$ es bihomogénea obtenemos, para cada par (r,s), una representación ω^{rs} del grupo simétrico $\mathcal{S}_n$.

Si H es un subgrupo de $\mathcal{S}_n$, notaremos

$$V^H = \bigoplus_{r,s\geq 0} V^{rs,H}$$

el subespacio de V de los elementos fijos por la acción de H.

(1.3) Proposición

Con las notaciones anteriores, se tiene

$$P(V^H,x,y) = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_n} \chi^H(\alpha)\, P(M,x^{\lambda_1},y^{\lambda_1})\cdots P(M,x^{\lambda_k},y^{\lambda_k}),$$

donde $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ es el tipo de ciclo de la permutación α, y χ^H es el carácter de $\mathcal{S}_n$ inducido por el carácter trivial de H.

Demostración. Sea ω_H^{rs} la representación de H inducida por ω^{rs}, y sea

$$\omega_H^{rs} = \sum_i a_i\rho_i, \qquad a_i \in \mathbb{N},$$

la descomposición de ω_H^{rs} en representaciones irreducibles. Si χ_H^{rs} es el carácter asociado a la representación ω_H^{rs}, y χ_i es el carácter asociado a ρ_i, tomando caracteres resulta

$$\chi_H^{rs} = \sum_i a_i\,\chi_i.$$

Si χ_1 es el carácter trivial de $\mathcal{S}_n$, se tiene

$$a_1 = \dim_{\mathbb{K}} V^{rs,H}$$

y por tanto, de las relaciones de ortogonalidad de los caracteres irreducibles, se obtiene

$$\dim_{\mathbb{K}} V^{rs,H} = \frac{1}{|H|}\sum_{\alpha\in H}\chi_H^{rs}(\alpha).$$

Como, por la fórmula de reciprocidad de Frobenius,

$$\frac{1}{|H|}\sum_{\alpha\in H}\chi_H^{rs}(\alpha)=\frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_n}\chi^{rs}(\alpha)\,\chi^H(\alpha),$$

si ponemos

$$\Phi(\alpha)=\sum_{r,s\geq 0}(-1)^{r+s}\,\chi^{rs}(\alpha)\,x^r y^s,$$

entonces

$$P(V^H,x,y)=\frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_n}\chi^H(\alpha)\,\Phi(\alpha),$$

y así la demostración de la proposición estará completa con el siguiente

(1.4) **Lema**

$$\Phi(\alpha)=P\big(M,x^{\lambda_1},y^{\lambda_1}\big)\cdots P\big(M,x^{\lambda_k},y^{\lambda_k}\big).$$

Demostración. Como, por definición, $\chi^{rs}(\alpha)$ es igual a la traza del endomorfismo $\omega^{rs}(\alpha)$, tenemos que probar que esta traza es igual a $(-1)^{r+s}$ veces el coeficiente de $x^r y^s$ en el producto de series formales, el cual es

$$\sum_{\substack{\lambda_1 r_1+\cdots+\lambda_k r_k=r\\ \lambda_1 s_1+\cdots+\lambda_k s_k=s}}(-1)^{r_1+\cdots+r_k+s_1+\cdots+s_k}\,h^{r_1 s_1}\ldots\,h^{r_k s_k}.$$

Si α tiene tipo de ciclo $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$, entonces α es conjugada a la permutación

$$\begin{aligned}&\big(1,2,3,\ldots,\lambda_1\big)\big(\lambda_1+1,\lambda_1+2,\ldots,\lambda_1+\lambda_2\big)\cdots\\ &\qquad\cdots\big(\lambda_1+\cdots+\lambda_{k-1}+1,\ldots,\lambda_1+\cdots+\lambda_k\big).\end{aligned}$$

Por tanto, podemos suponer que α es esta permutación.

Para calcular la traza de $\omega^{rs}(\alpha)$, tenemos que encontrar la dimensión de los subespacios de los vectores $\xi=x_1\otimes\cdots\otimes x_n$ tales que $\omega^{rs}(\alpha)\xi=\pm\xi$. Para que esto se verifique es necesario que

$$\begin{gathered}x_1=\ldots=x_{\lambda_1}\in M^{r_1 s_1},\\ \vdots\\ x_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{k+1}+1}=\ldots=x_{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}\in M^{r_k s_k},\end{gathered}$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_k r_k &= r,\\ \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k &= s.\end{aligned}$$

Un elemento de este tipo verifica $\omega^{rs}(\alpha)\xi = (-1)^{\varepsilon}\xi$, donde ε se determina por

$$\varepsilon = Q_\alpha\left(r_1 + s_1, \overbrace{\ldots}^{\lambda_1}, r_1 + s_1, \ldots, r_k + s_k, \overbrace{\ldots}^{\lambda_k}, r_k + s_k\right),$$

siendo ahora

$$\begin{aligned}Q_\alpha(t_1, \ldots, t_n) &= t_{\lambda_1}(t_1 + \cdots + t_{\lambda_1 - 1})\\ &\quad + \cdots + t_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}(t_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1} + \cdots + t_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k - 1})\end{aligned}$$

y entonces se tiene

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - 1)(r_i + s_i)^2\\ &\equiv \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + 1)(r_i + s_i) \qquad (\text{mod } 2)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^{k} r_i + \sum_{i=1}^{k} s_i\\ &= r + s + \sum_{i=1}^{k} r_i + \sum_{i=1}^{k} s_i.\end{aligned}$$

Por tanto, los elementos de tipo $(r_1, s_1), \ldots, (r_k, , s_k)$ aportan a la traza un término igual a

$$(-1)^{r+s+r_1+\cdots+r_k+s_1+\cdots+s_k} h^{r_1 s_1} \ldots h^{r_k s_k},$$

con lo que finaliza la demostración. □

2. El polinomio de Poincaré-Hodge de $X^{(n)}$

(2.1) Sea X una variedad kähleriana compacta. Se define el polinomio de Poincaré-Hodge de X por

$$h(X, x, y) = \sum_{r,s \geq 0} h^{rs} x^r y^s,$$

siendo $h^{rs} = \dim_{\mathbb{C}} H^{rs}(X, \mathbb{C})$, es decir, si se considera la bigraduación de $H^*(X, \mathbb{C})$ dada por la descomposición de Hodge

$$H^r(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{pq}(X),$$

entonces

$$h(X, x, y) = P\big(H^*(X, \mathbb{C}), -x, -y\big).$$

(2.2) Sea n un entero positivo. Si consideramos el producto cartesiano X^n, por la fórmula de Künneth, tenemos un isomorfismo bigraduado

$$H^*(X^n, \mathbb{C}) = H^*(X, \mathbb{C})^{\otimes n}.$$

El grupo simétrico $\mathcal{S}_n$ actúa sobre X^n por permutación de las componentes, y la acción inducida en la cohomología coincide con la descrita en la sección 1. Si entonces tenemos un subgrupo G de $\mathcal{S}_n$, según Grothendieck [4, Teorema 5.3.1, corolario a la Proposición 5.2.3] se tiene que la proyección canónica

$$f : X^n \longrightarrow X^n/G$$

induce un isomorfismo

$$f^* : H^*(X^n/G, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^n, \mathbb{C})^G \subset H^*(X^n, \mathbb{C}).$$

Dado que X^n/G es una variedad en cohomología racional (Steenbrink [6, Proposición 1.4]), la estructura de Hodge-Deligne canónica de $H^r(X^n/G, \mathbb{C})$ es pura de peso r (Deligne [1, Teorema 8.2.4]). Así se tiene,

$$H^r(X^n/G, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{pq}(X^n/G).$$

Y como G actúa con automorfismos analíticos, f^* induce un isomorfismo

$$f^* : H^{pq}(X^n/G) \xrightarrow{\sim} H^{pq}(X)^G.$$

Análogamente al caso de variedades kählerianas compactas, se define el polinomio de Poincaré-Hodge de X^n/G por

$$h(X^n/G, x, y) = \sum_{p,q \geq 0} (-1)^{p+q} h^{pq} x^p y^q,$$

donde $h^{pq} = \dim_{\mathbb{C}} H^{pq}(X^n/G, \mathbb{C})$.

(2.3) **Proposición**

Con las notaciones anteriores,

$$h(X^n/G,x,y) = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_n}\chi^G(\alpha)h\left(X,(-1)^{\lambda_1-1}x^{\lambda_1},(-1)^{\lambda_1-1}y^{\lambda_1}\right) \cdots h\left(X,(-1)^{\lambda_k-1}x^{\lambda_k},(-1)^{\lambda_k-1}y^{\lambda_k}\right).$$

Demostración. Resulta inmediatamente de la proposición 1.3. □

(2.4) **Teorema**

Sea X una variedad kähleriana compacta de números de Hodge h^{pq}. Entonces

$$\sum_{n\geq 0} h(X^{(n)},x,y)t^n = \prod_{p,q\geq 0}\left(1-(-1)^{p+q}x^py^qt\right)^{(-1)^{p+q+1}h^{pq}}.$$

Demostración. Llamemos $F(x,y,t)$ al desarrollo en serie de potencias de

$$\prod_{p,q\geq 0}\left(1-x^py^qt\right)^{(-1)^{p+q+1}h^{pq}} = \frac{(1-xt)^{h^{1,0}}(1-yt)^{h^{0,1}}(1-x^3t)^{h^{3,0}}(1-x^2yt)^{h^{2,1}}\cdots}{(1-t)^{h^{0,0}}(1-x^2t)^{h^{2,0}}(1-xyt)^{h^{1,1}}(1-y^2t)^{h^{0,2}}\cdots}.$$

Sea $M = H^*(X,\mathbb{C})$. Con las notaciones de la sección 1, tenemos que probar que el coeficiente de t^n en el desarrollo de $F(x,y,t)$ es $P(V^{\mathcal{S}_n},x,y)$.

Añadamos n elementos $z_1,\ldots,z_n$ a $\mathbb{Z}[[x,y]]$ tales que

$$s_r = z_1^r+\cdots+z_n^r = P\bigl(M,x^r,y^r\bigr), \qquad r=1,\ldots,n.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\log F(x,y,t) &= \sum_{p,q\geq 0}\frac{(-1)^{p+q}h^{pq}x^py^q}{1-x^py^qt} \\
&= \sum_{p,q\geq 0}(-1)^{p+q}h^{pq}x^py^q\sum_{r\geq 0}(x^py^qt)^r \\
&= \sum_{r\geq 1}P\bigl(M,x^r,y^r\bigr)t^{r-1} \\
&\equiv s_1+s_2t+\cdots+s_nt^{n-1} \qquad (\mathrm{mod}\ t^n) \\
&= z_1+\cdots+z_n+(z_1^2+\cdots+z_n^2)t+\cdots+(z_1^n+\cdots+z_n^n)t^{n-1} \\
&\equiv \frac{z_1}{1-z_1t}+\cdots+\frac{z_n}{1-z_nt} \qquad (\mathrm{mod}\ t^n) \\
&= \frac{d}{dt}\log\prod_{i=1}^n\frac{1}{1-z_it}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$F(x,y,t) \equiv \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-z_i t} \pmod{t^{n+1}}$$
$$\equiv 1 + h_1 t + \cdots + h_n t^n \pmod{t^{n+1}}$$

donde

$$h_i = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=i} z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Como

$$h_n = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_n} s_{\lambda_1}\cdots s_{\lambda_k},$$

se obtiene

$$h_n = \frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathcal{S}_n} P\big(V^{\mathcal{S}_n}, x^{\lambda_1}, y^{\lambda_1}\big)\cdots P\big(V^{\mathcal{S}_n}, x^{\lambda_k}, y^{\lambda_k}\big),$$

y por tanto, se deduce de la Proposición 2.3 que el coeficiente de t^n en el desarrollo de $F(x,y,t)$ es $P(V^{\mathcal{S}_n}, x, y)$. □

(2.5) Recordemos que si X es una variedad topológica, o más generalmente, una variedad en cohomología racional, orientada, y de dimensión $d = 4k$, se define el índice de X, $i(X)$, como la signatura de la forma cuadrática P definida en $H^{2k}(X,\mathbb{R})$ por

$$P(\xi,\eta) = \int_X \xi\wedge\eta.$$

Por convenio, si $d \neq 4k$, se toma $i(X) = 0$.

Si X es una variedad kähleriana compacta, el teorema del índice de Hodge asegura que

$$i(X) = \sum_{p,q\geq 0} (-1)^p h^{pq}.$$

Consideremos ahora el producto simétrico $X^{(n)}$ de una variedad kähleriana compacta X. Sea ω_X la 2-forma fundamental de X. Si llamamos π_i a la i-ésima proyección de X^n en X, resulta que

$$\omega_{X^n} = \omega_1 + \cdots + \omega_n, \qquad \omega_i = \pi_i^*\omega,$$

es la 2-forma fundamental de X^n. Notemos que ω_{X^n} es invariante por $\mathcal{S}_n$, luego el operador L de Lefschetz, definido sobre $H^*(X^n,\mathbb{R})$ por $L = \omega_{X^n}\wedge$, deja estable

$H^*(X^{(n)}, \mathbb{R})$, y por tanto el teorema de descomposición y el teorema difícil de Lefschetz son válidos para $X^{(n)}$. Finalmente, si introducimos la forma cuadrática

$$Q(\xi, \eta) = (-1)^{r(r+1)/2} \int_{X^{(n)}} L^{dn-r} \xi \wedge \eta, \qquad \xi, \eta \in P^r(X^{(n)}, \mathbb{R}),$$

como

$$\int_{X^{(n)}} L^{dn-r} \xi \wedge \eta = \frac{1}{n!} \int_{X^n} L^{dn-r} \xi \wedge \eta,$$

y

$$i^{-r}(-1)^q(-1)^{r(r+1)/2} \int_{X^n} L^{dn-r} \xi \wedge \bar{\xi} > 0, \qquad \xi \in P^{r-q,q}(X^n, \mathbb{R}),$$

es inmediato deducir que el teorema del índice de Hodge sigue siendo válido para $X^{(n)}$. Se deduce entonces el siguiente

Corolario

$$\sum_{n \geq 0} i(X^{(n)}) t^n = \frac{(1-t)^{(i(X)-e(X))/2}}{(1+t)^{(i(X)+e(X))/2}}.$$

3. Aplicaciones

(3.1) Observemos en primer lugar que el Teorema 2.4 extiende de forma natural el resultado obtenido por Macdonald [5]. En efecto, dado que el polinomio de Poincaré se obtiene a partir del polinomio de Poincaré-Hodge igualando x con y, se tiene, con las notaciones de [5],

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P(X, -x) t^n &= \sum_{n \geq 0} h(X, x, x) t^n \\ &= \prod_{p,q \geq 0} \left(1 - (-1)^{p+q} x^{p+q} t\right)^{(-1)^{p+q+1} h^{pq}} \\ &= \prod_{n \geq 0} \left(1 - (-1)^n x^n t\right)^{(-1)^{n+1} B_n}. \end{aligned}$$

(3.2) Sea S una superficie algebraica proyectiva y lisa, y sea $S^{[n]}$ el esquema de Hilbert de n-pletas en S. Puesto que el morfismo natural

$$S^{[n]} \longrightarrow S^{(n)}$$

es birracional (Fogarty [2, Corolario 2.6]), se sigue de [6, Teoremas 1.11 y 1.12] que

$$h^{p0}(S^{[n]}) = h^{p0}(S^{(n)})$$

y esto nos permite comprobar la Proposición 3.3 de Göttsche [3]:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\sum_{p\geq 0} h^{p0}\left(S^{[n]}\right) z^p t^n &= \sum_{n\geq 0} h(S^{[n]}, z, 0) t^n \\ &= \prod_{p\geq 0} \left(1-(-1)^p z^p t\right)^{(-1)^{p+1} h^{p0}(S)}.\end{aligned}$$

(3.3) En el caso particular de que X sea una curva algebraica proyectiva y lisa, entonces podemos obtener una expresión explícita de los números de Hodge:

Corolario

Si C es una curva proyectiva y lisa de género g, entonces los números de Hodge del producto simétrico $C^{(n)}$ son

$$h^{pq}(C^{(n)}) = \sum_{0\leq k\leq p} \binom{g}{p-k}\binom{g}{q-k}, \qquad 0\leq p\leq q,\ p+q\leq n.$$

Demostración. Según el Teorema 2.4, el número de Hodge $h^{pq}(C^{(n)})$ es el coeficiente de $x^p y^q t^n$ en el desarrollo en serie de potencias de

$$\frac{(1+xt)^g(1+yt)^g}{(1-t)(1-xyt)}.$$

Considerando los desarrollos en serie de los términos que aparecen en la fracción anterior, el término en $x^p y^q t^n$ es

$$\sum_{\substack{a+b+c+d=n\\ a+d=p\\ b+d=q}} \binom{g}{a}\binom{g}{b} x^{a+d} y^{b+d} t^{a+b+c+d}, \qquad a,b,c,d\geq 0.$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}h^{pq}(C^{(n)}) &= \sum_{\substack{a+b+c+d\leq n\\ a+d=p\\ b+d=q}} \binom{g}{a}\binom{g}{b} \\ &= \sum_{0\leq k\leq p} \binom{g}{p-k}\binom{g}{q-k}. \ \square\end{aligned}$$

Notemos finalmente que, en este caso, la fórmula del índice es

$$\sum_{n\geq 0} i\bigl(C^{(n)}\bigr)t^n = \bigl(1-t^2\bigr)^{g-1}.$$

References

1. P. Deligne, Théorie de Hodge III, *Publ. Math. IHES* **44** (1972), 5–77.
2. J. Fogarty, Algebraic families on an algebraic surface, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 511–521.
3. L. Göttsche, The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface, *Math. Ann.* **286** (1990), 193–207.
4. A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.
5. I. G. Macdonald, The Poincaré polynomial of a symmetric product, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **58** (1962), 563–568.
6. J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structures on the vanishing cohomology, in *Real and Complex Singularities*, pp. 525–565, Sijthoff & Nordhoff, Oslo 1976.