Collect. Math. **40**, 3 (1989), 277–287

Interpolación en espacios de funciones armónicas con desarrollos asintóticos

Gaspar Mora Martínez

Universidad Nacional de Educación a Distancia, Centro de Elche, Elche, Spain

Received 20/APR/90

Abstract

This article puts up the problem of finding harmonic functions on a domain D, which for simplicity is a disk with the origin as a boundary point, continuous on D, and with arbitrary asymptotic harmonic expansion.

To solve it, in the space $A_C(D)$ of harmonic functions on D, continuous on D and with asymptotic harmonic expansion at 0, we define the topology T_C for which it is a Fréchet space. There we define the linear functionals which map each function to the coefficients of its asymptotic harmonic expansion. Let L be the linear span of these functionals; if λ denotes the topology of uniform convergence on the compacts of $A_C(\bar{D})$, we have that L is a Silva space and λ coincides with the topology U, inductive limit of finite dimensional subspaces. These relations and the Hahn-Banach theorem lead us to solve the problem.

1. El espacio de las funciones harmónicas con desarrollo asintótico

Sea D el disco unidad abierto de $\mathbf{R}^2$ centrado en el punto $(1,0)$, que abreviadamente designaremos por 1.

Es sabido que dada una función $f \in C^2(D)$, se dice que f es armónica en D si

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 0$$

para todo $x \in D$.

DEFINICIÓN 1.1. Diremos que una función armónica f en D tiene desarrollo asintótico en 0 a través de D, si existe una sucesión $(P_n(x))$, $n = 0,1,2,\ldots$, de polinomios en dos variables $(x_1, x_2) = x$, tal que, para cada n;

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} P_m(x) + o(|x|^n)_D, \tag{1}$$

es decir,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} \left(f(x) - \sum_{m=0}^{n} P_m(x) \right) |x|^{-n} = 0. \tag{2}$$

Para cada n, llamaremos resto de orden n de la función f a la expresión

$$R_n(x) = \left(f(x) - \sum_{m=0}^{n} P_m(x) \right) |x|^{-n}.$$

Por (2) se tiene

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} R_n(x) = 0 \tag{3}$$

para cada $n = 0,1,2,\ldots$.

Si f tiene desarrollo asintótico en 0 a través de D, lo expresaremos formalmente por

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x).$$

Denotaremos por $A(D)$ el espacio de las funciones armónicas en D con desarrollo asintótico en 0 a través de D.

DEFINICIÓN 1.2. Diremos que una función f, armónica en D y continua en $\bar{D}$, tiene desarrollo asintótico armónico en 0 a través de $\bar{D}$ si:

(a) f tiene desarrollo asintótico en 0 a través de $\bar{D}$, i.e.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} R_n(x) = 0$$

para cada $n = 0,1,2,\ldots$.

(b)

$$P_n(x) = a_{n,1}\,\Re x^n + a_{n,2}\,\Im x^n, \qquad \text{para } n = 1,2,\ldots$$
$$P_0(x) = a_{0,0}.$$

Designaremos los armónicos $\Re x^n$ e $\Im x^n$ por $\phi_{n,1}$ y $\phi_{n,2}$, respectivamente.

Denotaremos por $A_C(\bar{D})$ el espacio de las funciones armónicas en D, continuas en D y con desarrollo armónico en 0 a través de D, y si f pertenece a $A_C(\bar{D})$, lo expresaremos formalmente por:

$$f(x) \approx a_{0,0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1}\phi_{n,1} + a_{n,2}\phi_{n,2}.$$

Proposición 1.1

El espacio $A_C(\bar{D})$ es un subespacio propio de $A(D)$ y del espacio $Hr(\bar{D})$ de las funciones armónicas en D y continuas en D.

Demostración. El espacio $A_C(D)$ es de forma obvia un subespacio de $A(D)$ sin más que considerar la solución fundamental de la ecuación de Laplace:

$$E(x) = -L\,|x-a|,$$

siendo $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $|a-1| = 1$, $a \neq 0$.

De forma menos evidente vamos a construir una función $u \in Hr(D)$ tal que $u \notin A_C(D)$. Sea γ la circunferencia frontera de D; dada la función

$$f(t) = f(t_1, t_2) = |t_2|, \qquad \text{para } t \in \gamma,$$

por la fórmula de Poisson existe una función:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{1-|x-1|^2}{|x-t|} f(t)\,dt \tag{1}$$

que es armónica en D, continua en $\bar{D}$ y coincide con f en γ.

Para nuestros propósitos basta con que evaluemos la función $u(x)$ en el caso particular en que $x = (x_1, 0) \in D$, con lo que la expresión (1) queda:

$$u(x_1, 0) = \frac{x-1(2-x_1)}{\pi(1-x_1)}\, L\left(\frac{2-x_1}{x_1}\right). \tag{2}$$

Si $u(x)$ tuviese desarrollo asintótico armónico en 0 a través de D, existirían $a_{0,0}$, $a_{1,1}$ y $a_{1,2}$ tales que:

$$u(x_1, x_2) = a_{0,0} + a_{1,1}\phi_{1,1} + a_{1,2}\phi_{1,2} + o(|x|)_{\bar{D}} \tag{3}$$

o bien

$$(4) \qquad \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\(x_1,x_2)\in\bar{D}}} \big(u(x_1,x_2) - a_{0,0} - a_{1,1}\phi_{1,1} - a_{1,2}\phi_{1,2}\big)\big(x_1^2 + x_2^2\big)^{-1/2} = 0,$$

pero

$$a_{0,0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in D}} u(x) = f(0,0) = 0,$$

y si $x_2 = 0$, la expresión (4) se convierte en:

$$\lim_{x_1\to 0} \big(u(x_1,0) - a_{1,1}x_1\big)x_1^{-1} = 0,$$

i.e.

$$(5) \qquad \lim_{x_1\to 0} \big(u(x_1,0)\big)x_1^{-1} = a_{1,1}.$$

De la expresión (2) deducimos que:

$$a_{1,1} = \lim_{x_1\to 0} \frac{x - 1(2-x_1)}{\pi(1-x_1)} L\left(\frac{2-x_1}{x_1}\right) = \infty,$$

lo que prueba que $u(x)$ no admite desarrollo asintótico armónico en 0 a través de $\bar{D}$.

□

Proposición 1.2

$A_C(\bar{D})$ es un subespacio denso de $A(D)$ para la topología TCU de la convergencia uniforme sobre los compactos de D.

Demostración. Para cada $n = 1, 2, \ldots$ definimos el disco

$$K_n = \{x \in D : |x-1| \le 1 - 2^{-n}\},$$

por lo que (K_n) forma una sucesión fundamental de compactos de D. Dados n entero positivo y $\epsilon > 0$, consideramos el TCU-entorno de 0

$$V_{n,\epsilon} = \left\{g \in A(D) : \sup_{x\in K_n} |g(x)| < \epsilon\right\}.$$

Sea $f \in A(D)$, entonces f es continua en K_{n+1} y armónica en $\overset{\circ}{K}_{n+1}$, por lo que aplicando la solución del problema de Dirichlet en el disco K_{n+1} [3, p. 282], se tiene:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x-1|^k \, r_{n+1}^{-k} \left(a_{k,1} \cos k\phi + a_{k,2} \sin k\phi\right), \qquad \text{para } x \in \overset{\circ}{K}_{n+1},$$

siendo r_{n+1} el radio del disco K_{n+1} y ϕ la coordenada angular de x.

La serie del segundo miembro de la expresión (1) converge uniformemente a la función f sobre los compactos de $\overset{\circ}{K}_{n+1}$, en particular sobre K_n, por tanto: dado $\epsilon > 0$, existe una suma parcial $S_N(x)$ de tal modo que

$$\sup_{x \in K_n} \left| f(x) - S_N(x) \right| < \epsilon.$$

Ahora bien, $S_N(x)$ es un polinomio armónico y su desarrollo asintótico armónico en 0 a través de $\bar{D}$ coincide con él. En consecuencia, dada $f \in A(D)$, para todo TCU-entorno de 0, $V_{n,\epsilon}$, existe $u = S_N \in A_C(D)$ tal que $f - u \in V_{n,\epsilon}$, con lo que la densidad queda establecida. □

2. Topologías sobre el espacio $A_C(D)$

Sobre el espacio $A_C(\bar{D})$ definimos una topología $\mathrm{T_C}$ mediante la familia numerable y creciente de seminormas (t_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, donde:

$$t_n(f) = \max \left\{ \sup_{x \in D} |f(x)| + |a_{0,0}| + \sum_{p=1}^{n} |a_{p,1}| + |a_{p,2}|; \ \sup_{\substack{x \in \bar{D} \\ 0 \le p \le n}} \left| R_p(x) \right| \right\}.$$

Proposición 2.1

El espacio $(A_C(D), \mathrm{T_C})$ es de Fréchet.

Demostración. Dado que el espacio es metrizable, procedemos a probar la completitud. Sea (f_m), $m = 1, 2, \ldots$, una sucesión de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$ y n natural, existe m_0 de modo que:

$$(1) \qquad t_n(f_m - f_{m'}) < \epsilon \qquad \text{si } m, m' > m_0.$$

De aquí deducimos que la sucesión (f_m) es de Cauchy en el espacio de Banach de las funciones continuas en $\bar{D}$, luego converge a una función f continua en $\bar{D}$ y armónica en D por el teorema de Harnack [4, p. 258].

Por otra parte, para cada m:

$$f_m(x) \approx a_{0,0}^{(m)} + \sum_{p=1}^{\infty} a_{p,1}^{(m)} \phi_{p,1} + a_{p,2}^{(m)} \phi_{p,21}. \tag{2}$$

Por (1) tenemos:

(a) La sucesión $(a_{0,0}^{(m)})$ es de Cauchy en $\mathbf{R}$, luego converge a un número real $a_{0,0}$.

(b) Las sucesiones $(a_{p,1}^{(m)})$ y $(a_{p,2}^{(m)})$ son de Cauchy en $\mathbf{R}$, para cada p fijo, por lo que convergen respectivamente a los números $a_{p,1}$ y $a_{p,2}$.

Para cada p fijo, $1 \leq p \leq n$, definimos en $\bar{D}$ la función

$$S_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \left[f(x) - \left(a_{0,0} + \sum_{p=1}^{\infty} a_{p,1}\phi_{p,1} + a_{p,2}\phi_{p,2} \right) \right] |x|^{-p} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Ahora bien, por (2) las funciones:

$$S_p^{(m)}(x) = \begin{cases} 0 \\ R_p(x) = \left[f_m(x) - \left(a_{0,0}^{(m)} + \sum_{k=1}^{p} a_{k,1}^{(m)} \phi_{k,1} + a_{k,2}^{(m)} \phi_{k,2} \right) \right] |x|^{-p} \end{cases}$$

son continuas en $\bar{D}$ y por (1) la sucesión $(S_p^{(m)})$, para cada $p = 1, 2, \ldots, n$, es de Cauchy en el espacio de Banach de las funciones continuas en $\bar{D}$, y converge a la función S_p, continua en $\bar{D}$ y por tanto:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \bar{D}}} S_p(x) = 0,$$

por lo que f tiene desarrollo asintótico armónico en 0 a través de $\bar{D}$, y $\lim f_m = f$.

3. Interpolación en $A_C(D)$

Dada una función $f \in A_C(\bar{D})$, su desarrollo asintótico armónico viene dado por

$$a_{0,0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1}\phi_{k,1} + a_{k,2}\phi_{k,2},$$

lo que permite definir los funcionales $\delta_{0,0}$, $\delta_{k,1}$ y $\delta_{k,2}$ para $k = 1, 2, \ldots$ de la forma siguiente:

$$\langle \delta_{0,0}, f \rangle = a_{0,0}$$

$$\langle \delta_{k,1}, f \rangle = a_{k,1}$$

$$\langle \delta_{k,2}, f \rangle = a_{k,2}.$$

Proposición 3.1

Los funcionales $\delta_{0,0}$, $\delta_{k,1}$ y $\delta_{k,2}$, para $k = 1, 2, \ldots$, son T_C-continuos.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, consideramos el T_C-entorno de 0

$$U_{1,\epsilon} = \{f \in A_C(\bar{D}) : t_1(f) < \epsilon\},$$

y se tiene que, para toda $f \in U_{1,\epsilon}$, es $|\langle \delta_{0,0}, f \rangle| < \epsilon$, con lo que $\delta_{0,0}$ es T_C-continuo.

Dado k fijo con $k \geq 1$, consideramos el T_C-entorno de 0

$$U_{k,\epsilon} = \{f \in A_C(\bar{D}) : t_k(f) < \epsilon\},$$

y se tiene que $|a_{k,1}| + |a_{k,2}| \leq t_k(f)$ por lo que $|\langle \delta_{k,1}, f \rangle| < \epsilon$ y $|\langle \delta_{k,2}, f \rangle| < \epsilon$, luego $\delta_{k,1}$ y $\delta_{k,2}$ son ambos T_C-continuos. □

De manera evidente, los funcionales $\delta_{0,0}$, $\delta_{k,1}$ y $\delta_{k,2}$, para $k = 1, 2, \ldots$, forman un sistema linealmente independiente y engendran un subespacio L en el espacio dual $(A_C(D))'$.

Por otra parte, si definimos los T_C-entornos

$$U_m = \{f \in A_C(\bar{D}) : t_m(f) \leq 1/m\},$$

para cada $m = 1, 2, \ldots$, y consideramos su conjunto polar U_m°, éstos engendran subespacios que denotaremos por E_m.

Proposición 3.2

Los subespacios $L \cap E_m$, para cada $m = 1, 2, \ldots$, son de dimensión finita.

Demostración. Probaremos que $L \cap E_m$ contiene, a lo sumo, el subespacio engendrado por los vectores $\{\delta_{0,0}, \delta_{p,1}, \delta_{p,2}\}$, $1 \leq p \leq 2m+1$. Supongamos que existiese un vector

$$\delta = b_{0,0}\delta_{0,0} + \sum_{j=1}^{n} b_{j,1}\delta_{j,1} + b_{j,2}\delta_{j,2},$$

con $n > 2m+1$ y $b_{n,1} \neq 0$, tal que $\delta \in E_m$.

Entonces existiría un número $h > 0$ de tal modo que $\delta \in hU_m^{\circ}$; sea a un número real con $0 < a < 1$ y A otro número verificando $a^{m+2} < A < a^{m+1}$. Determinamos un entero positivo r de forma que:

$$\left(\frac{A}{a^{m+2}}\right)^r > \left|b_{n,1}\right|^{-1} \left(mh2^{n-(m+1)} + \sum_{j=0}^{m} \left|b_{n-(m+1)+j,1}\right|\right). \tag{1}$$

Consideramos la función

$$f(x_1, x_2) = \Re\left[x^{n-(m+1)} \frac{A^r}{(x+a)^r}\right] \tag{2}$$

donde $x = x_1 + ix_2$. Obviamente $f \in A_C(\bar{D})$ y su desarrollo asintótico armónico viene dado por

$$f(x) \approx \frac{A^r}{a^r} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a^{-jr} \phi_{n-(m+1)+j,1}. \tag{3}$$

Recordando la definición de las seminormas t_m dada en la sección 2, tenemos:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} |f(x)| + |a_{0,0}| + \sum_{p=1}^{m} |a_{p,1}| + |a_{p,2}| &= \sup_{x \in \bar{D}} \left|\Re\left[x^{n-(m+1)} \frac{A^r}{(x+a)^r}\right]\right| \\ &\leq \sup_{x \in \bar{D}} |x|^{n-(m+1)} \left|\frac{A^r}{(x+a)^r}\right| \\ &\leq 2^{n-(m+1)} \end{aligned} \tag{4}$$

puesto que, en virtud de (3), $a_{0,0} = a_{p,1} = a_{p,2} = 0$ para $1 \leq p \leq m$ por ser $n-(m+1) > m$, y

$$\tag{5} \begin{aligned} \sup_{\substack{x\in\bar{D}\\ 0\leq p\leq m}} |R_p(x)| &= \sup_{\substack{x\in\bar{D}\\ 0\leq p\leq m}} \left|f(x)\,|x|^{-p}\right| \\ &\leq \max_{0\leq p\leq m} \left\{2^{n-(m+1)-p}\right\} \\ &= 2^{n-(m+1)}. \end{aligned}$$

De (4) y (5), obtenemos que $t_m(f) \leq 2^{n-(m+1)}$, o equivalentemente $f \in m2^{n-(m+1)}U_m$ y puesto que $\delta \in hU_m^{\circ}$, resulta

$$\tag{6} |\langle \delta, f\rangle| \leq mh2^{n-(m+1)}.$$

Por otra parte tenemos:

$$\tag{7} \begin{aligned} |\langle \delta, f\rangle| &= \left| \frac{A^r}{a^r} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j b_{n-(m+1)+j,1}\, a^{-jr} \right| \\ &\geq \frac{A^r}{a^r} \left[|b_{n,1}|\, a^{-r(m+1)} - \sum_{j=0}^{m} \left|(-1)^j b_{n-(m+1)+j,1} a^{-jr}\right| \right] \\ &= A^r a^{-r(m+2)} |b_{n,1}| - A^r a^{-r} \sum_{j=0}^{m} \left|b_{n-(m+1)+j,1} a^{-jr}\right| \\ &\geq A^r a^{-r(m+2)} |b_{n,1}| - A^r a^{-r} a^{-rm} \sum_{j=0}^{m} \left|b_{n-(m+1)+j,1}\right| \\ &\geq A^r a^{-r(m+2)} |b_{n,1}| - \sum_{j=0}^{m} \left|b_{n-(m+1)+j,1}\right| \\ &> mh2^{n-(m+1)} \end{aligned}$$

en virtud de (1).

Las desigualdades (6) y (7) son contradictorias. □

Proposición 3.3

La topología λ induce sobre el subespacio L una estructura de espacio de Silva.

Demostración. $A_C(D)$ es un espacio de Fréchet y por tanto tonelado, luego:

$$\cdots \supset U_m^\circ \supset \cdots \supset U_2^\circ \supset U_1^\circ$$

constituye un sistema fundamental de conjuntos fuertemente acotados que son además absolutamente convexos, cerrados y acotados para la topología λ.

Dotamos a L de la topología U, límite inductivo de los subespacios finito-dimensionales $L \cap E_m$, para $m = 1, 2, \ldots$, por lo que L es un LB-espacio y, para cada m, $L \cap U_m^\circ$ es compacto por ser cerrado y acotado en un espacio finito-dimensional, luego σ-cerrado. Aplicando el teorema de Krein-Smulian, L es σ-cerrado.

Sea ahora A un subconjunto de L, cerrado y acotado para la topología λ. Entonces existe m tal que $L \cap U_m^\circ \supset A$. Ahora bien

$$L \cap E_m \supset \left(A_C(\bar{D})\right)'_{L \cap U_m^\circ} = \langle L \cap U_m^\circ \rangle,$$

luego aplicando [6, Proposición 3], se tiene que L es un espacio de Silva para la topología λ y ésta coincide con U. □

Teorema 3.1

Dada una sucesión arbitraria $(a_{0,0}, a_{m,1}, a_{m,2})$, $m = 1, 2, \ldots$, *de números reales, existe una función* $f \in A_C(\bar{D})$ *tal que:*

$$f(x) \approx a_{0,0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,1}\phi_{m,1} + a_{m,2}\phi_{m,2}.$$

Demostración. La base algebraica $\{\delta_{0,0}, \delta_{m,1}, \delta_{m,2}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, y la sucesión dada permiten definir una forma lineal $u : L \to \mathbf{R}$ del siguiente modo:

$$\langle u, \delta_{0,0} \rangle = a_{0,0}, \qquad \langle u, \delta_{m,1} \rangle = a_{m,1}, \qquad \langle u, \delta_{m,2} \rangle = a_{m,2},$$

para $m = 1, 2, \ldots$.

Esta forma lineal u es continua para la topología límite inductivo U y en consecuencia para λ. Extendemos, por el teorema de Hahn-Banach, u a una forma lineal y λ-continua v. Ahora bien, como

$$\left((A_C(D))'(\lambda)\right)'_\beta = A_C(D)(\mathrm{T}_C),$$

tenemos que $v \in A_C(D)$. por lo que haciendo $v = f$ resulta $f_{|L} = u$, luego

$$\langle f, \delta_{0,0} \rangle = a_{0,0}, \qquad \langle f, \delta_{m,1} \rangle = a_{m,1}, \qquad \langle f, \delta_{m,2} \rangle = a_{m,2},$$

para $m = 1, 2, \ldots$, i.e. f tiene como coeficientes de su desarrollo asintótico armónico los números de la sucesión dada. □

Bibliografía

1. G. Chilov, *Analyse Mathématique*, Mir, Moscow, 1975.
2. V. P. Mijailov, *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Mir, Moscow, 1978.
3. S. G. Mikhlin, *Mathematical Physics: An Advanced Course*, North-Holland, Amsterdam, 1970.
4. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.
5. H. H. Schaefer, *Espacios Vectoriales Topológicos*, Teide, Barcelona, 1974.
6. M. Valdivia, Interpolation in certain spaces, *Proc. Royal Irish Academy* **80**A (1980), 173–189.
7. Vo-Khac Koan, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, Vol. 1, Vuibert, Paris, 1972.
8. Vo-Khac Koan, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, Vol. 2, Vuibert, Paris, 1972.