Collect. Math. **40**, 3 (1989), 241–275

Construcción de campos vectoriales en base a integrales parciales dadas

Rafael Ramírez

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis, Universidad de Barcelona, 08071 Barcelona, Spain

Natalia Sadovskaia

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad Politécnica de Cataluña, 08028 Barcelona, Spain

Received 10/JAN/90

Abstract

A mathematical model based in the principle of the less contractions is proposed for the construction of velocity vector fields and forces from given integrals. Necessary algebraic conditions for the solution of the problem are deduced. In addition, the velocity vector field is extended in a neighbourhood of the integrals. Applications and examples are given.

Introducción

En el transcurso del trabajo utilizaremos las siguientes notaciones.
X - variedad diferenciable de dimensión N,
$(x_1,\ldots,x_N)$ coordenadas locales en X,
$\chi(X)$ – álgebra de Lie de los campos vectoriales sobre X ,
$C^\infty(X)$ – anillo de las funciones infinitamente diferenciables en X,
$\Lambda(X)$ – álgebra de las 1-formas sobre X.

Designaremos por medio de G y ∇ respectivamente a un tensor simétrico y no degenerado de signatura arbitraria y a la aplicación

$$\begin{aligned}\nabla : \chi(X)\times\chi(X) &\longrightarrow \chi(X)\\ (U,V) &\longmapsto \nabla_U V\end{aligned}$$

que satisface las siguientes condiciones

(i) Es $\mathbf{R}$ lineal con respecto a V y $C^\infty(X)$ lineal con respecto a U.

(ii) $\nabla_U G(V,W) = 0$, para $U, V, W \in \chi(X)$.

Todas las afirmaciones futuras las haremos en la variedad riemanniana (o pseudoriemanniana) $(X, G) = V_N$.

1. Construcción de campos vectoriales por medio del método de minimización

Plantearemos y solucionaremos el siguiente

Problema 1. Sean

$$\xi_1, \ldots, \xi_M \in \chi(X) \text{ campos vectoriales:}$$

$$\begin{cases} G(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta, \end{cases} \\ \alpha, \beta = \overline{1, M}, \\ M < N. \end{cases}$$

Se pide construir el campo vectorial $v \in \chi(X)$ que genera las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = v(x) \tag{1.1}$$

y que cumple además la condición

$$\hat{\xi}_\alpha(v) \equiv G(v, \xi_\alpha) = 0, \qquad \alpha = \overline{1, M},$$

donde

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \qquad \hat{\xi}_\alpha \in \Lambda(X), \qquad \hat{\xi}_{\alpha k} = G_{kn}\xi_\alpha(x^n).$$

La solución de este problema se obtiene mediante las siguientes notas preliminares.

La construcción de $v \in \chi(X)$ se llevará al problema de la construcción de los campos $\xi_{M+1}, \ldots, \xi_N$:

$$G(\xi_i, \xi_n) = \delta_{in} = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i \neq n, \end{cases}$$

$$v = \sum_{i=M+1}^{n} \lambda_i \xi_i; \qquad \lambda_i \in C^\infty(X), \tag{1.2}$$

$$v^2 \equiv G(v,v) = \sum_{i=M+1}^{N} \lambda_i^2. \tag{1.3}$$

Estudiemos el campo $\nabla_v v \in \chi(X)$. De (1.2) deducimos que

$$\nabla_v(v) = \sum_{i=M+1}^{N} \Big(v(\lambda_i)\xi_i + \lambda_i \nabla_v \xi_i\Big),$$

lo cual en base a la condición (ii) se puede representar de la forma

$$\nabla_v v = \sum_{i=M+1}^{N} v(\lambda_i)\xi_i - \sum_{\alpha} p_\alpha(v,v)\xi_\alpha, \tag{1.4}$$

donde por medio de $p_\alpha(v,v)$ hemos designado la expresión

$$p_\alpha(v.v) = \nabla_v(\hat{\xi}_\alpha)(v). \tag{1.5}$$

Las ecuaciones (1.4) y (1.5) se pueden interpretar como las ecuaciones que describen el comportamiento de cierto "sistema mecánico" con energía cinética $v^2/2$, bajo la acción de fuerzas

$$F = \sum_{i=M+1}^{N} v(\lambda_i)\xi_i - \sum_{\alpha=1}^{M} p_\alpha(v,v)\xi_\alpha, \tag{1.6}$$

y con enlaces

$$G(v,\xi_\alpha) = \hat{\xi}_\alpha(v) = 0. \tag{1.7}$$

Por consiguiente es posible aplicar el principio de las reacciones mínimas de Gauss [22].

Problema 2. Encontrar el

$$\operatorname*{extremo}_{\tau}\big(p_\alpha(\tau,\tau)\big),$$

bajo las condiciones

$$\begin{cases} \tau^2 \equiv G(\tau,\tau) = 1 \\ \hat{\xi}_\alpha(\tau) \equiv G(\tau,\xi_\alpha) = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

donde

$$\tau = \frac{v}{|v|}, \qquad |v| = \sqrt{G(v,v)}.$$

Solución. Aplicando a los lagrangianos

$$\mathcal{L}_\alpha = p_\alpha(\tau,\tau) + \nu_\alpha \tau^2 + \lambda \hat{\xi}_\alpha(\tau),$$

los métodos conocidos, obtenemos las igualdades

$$\begin{cases} B_{\alpha,n,m}\tau^m + q\xi_\alpha = 0, \\ \hat{\xi}_{\alpha,m}\tau^m + 0 \cdot q = 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

o, lo que es lo mismo,

$$P_\alpha \eta = 0 \qquad \alpha = \overline{1,M}, \tag{1.10}$$

donde B_α, P_α, η son las siguientes matrices

$$\begin{cases} 2B_{\alpha,n,m} = \nabla_{\partial_n}\hat{\xi}_\alpha(\partial_m) + \nabla_{\partial_m}\hat{\xi}_\alpha(\partial_n) + 2\nu_\alpha G_{nm} \qquad (1.11) \\ \begin{cases} P_{\alpha,n,m} = 2B_{\alpha,n,m}, \qquad \text{si } n,m = \overline{1,N}, \\ P_{\alpha,N+1,m} = P_{\alpha,m,N+1} = \xi_{\alpha,m}, \\ P_{\alpha,N+1,N+1} = 0, \qquad P_\alpha = \left(P_{\alpha,n,m}\right)_{n,m=1}^{N+1}, \end{cases} \end{cases}$$

$\eta = \operatorname{col}(\tau_1,\ldots,\tau_N,q)$, $B_\alpha = (B_{\alpha,n,m})$.

Observación 1.1. Si las funciones $\xi_{\alpha,m} \in C^\infty(X)$ son tales que

$$\xi_{\alpha,m} = \frac{a_{\alpha,m}}{|a_\alpha|},$$

entonces la matriz B_α puede definirse como sigue

$$B_{\alpha,n,m} = \left[\nabla_{\partial_n} a_\alpha(\partial_m) + \nabla_{\partial_m} a_\alpha(\partial_n)\right]\frac{1}{|a_\alpha|} + 2\nu_\alpha G_{nm}.$$

Las ecuaciones algebraicas (1.10) tienen soluciones no triviales si y sólo si las matrices P_α son degeneradas, es decir,

$$\det(P_\alpha) = 0, \qquad \alpha = \overline{1,M}.$$

Por consiguiente las funciones ν_α tales que

$$\nu_\alpha = -p_\alpha(\tau,\tau), \tag{1.12}$$

deben ser raíces del polinomio [24]

$$\nu_\alpha^{N-1} + H_\alpha \nu_\alpha^{N-2} + \cdots + R_\alpha = 0, \tag{1.13}$$

donde

$$\begin{cases} H_\alpha = -\sum\limits_{i=1}^{N-1} \nu_{\alpha_i}, \\ R_\alpha = (-1)^{N-1}\prod_{i=1}^{N-1} \nu_{\alpha_i} = \det P_\alpha\big|_{\nu_\alpha=0}. \end{cases}$$

Consecuencia 1.1. Tienen lugar las igualdades [25]

$$H_\alpha = -\sum_{i=1}^{N-1} \nu_{\alpha_i} = -\nabla_k \xi_\alpha^k = -\frac{\partial_k\left(\sqrt{|G|}\,\xi_\alpha^k\right)}{\sqrt{|G|}}, \tag{1.14}$$

donde $|G| = \det(G)$.

Consecuencia 1.2. Sean τ_i y τ_j campos vectoriales tales que

$$\vec{a}_i = \mathrm{col}\left(\tau_i(x^1), \ldots, \tau_i(x^N)\right) \quad i = \overline{1, N-1}$$

son las direcciones principales que corresponden a las raíces ν_{α_i}. Entonces

$$G(\tau_i, \tau_j) \equiv \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$$

si $\nu_{\alpha_i} - \nu_{\alpha_j} \neq 0$.

Designaremos por medio de η_i a las matrices:

$$\eta_i = \mathrm{col}\left(\tau_i(x'), \ldots, \tau_i(x^N), q_i\right) \qquad i = \overline{1, N-1}.$$

Se puede demostrar el siguiente

Teorema 1.1

Si las raíces del polinomio (1.13) son tales que la matriz B_α es no degenerada, es decir

$$\det\left(B_{\alpha,n,m}\right) \neq 0, \tag{1.15}$$

entonces los campos τ_i, $i = \overline{1, N-1}$ tienen los componentes siguientes

$$\tau_i(x^k) = \sum_\alpha \frac{1}{|B_\alpha|} \tag{1.16}$$

$$\times \left| \begin{matrix} B_{\alpha,1,1} & \cdots & B_{\alpha,1,k-1} - q_i \xi_\alpha^k B_{\alpha,1,k+1} & \cdots & B_{\alpha,1,N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{\alpha,N,1} & \cdots & B_{\alpha,N,k-1} - q_i \xi_\alpha^k B_{\alpha,N,k+1} & \cdots & B_{\alpha,N,N} \end{matrix} \right|_{\nu_\alpha = \nu_{\alpha_i}}$$

donde q_i se determina de las igualdades

$$G\left(\tau_i, \tau_j\right) = \delta_{ij}; \qquad i, j = \overline{1, N-1}, \tag{1.17}$$

$$G\left(\tau_i, \xi_\alpha\right) = 0, \qquad \alpha = \overline{1, M}, \tag{1.18}$$

y el subíndice $_{\nu_\alpha = \nu_{\alpha_i}}$ significa que en la expresión dada es necesario colocar ν_{α_i} en lugar de ν_α.

Teorema 1.2 (Solución del problema 1)

Supongamos que existen $(N - M)$ raíces diferentes del polinomio (1.13) que satisfacen (1.15).

Entonces los campos vectoriales $\xi_{M+1}, \ldots, \xi_N$ se pueden definir de la forma

$$\xi_{M+1} = \tau_1, \ \ldots, \ \xi_N = \tau_{N-M}, \tag{1.19}$$

donde $\tau_i \in \chi(X)$ son campos con componentes dados por las fórmulas (1.16), (1.17) y (1.18).

Consecuencia 1.3. Si existen $(N - M)$ raíces diferentes del polinomio (1.13) y $(N - M - 1)$ que satisfacen la condición (1.15), entonces los campos $\xi_{M+1}, \ldots, \xi_{N-1}$ se construyen por medio de la fórmula (1.19), mientras que ξ_N se define de las igualdades

$$\begin{cases} G(\xi_i, \xi_N) = 0, & i = \overline{1, N-1}, \\ G(\xi_N, \xi_N) = 1. \end{cases}$$

Consecuencia 1.4. Si tiene lugar el teorema (1.2), entonces el campo (1.6) se expresa como sigue

$$F = \sum_{i=1}^{N-M} \left(v(\lambda_{i+M})\tau_i + \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{i+M}^2 \nu_{\alpha_i} \xi_\alpha \right). \tag{1.20}$$

En realidad, de (1.9) se tiene que

$$\nabla_{\partial_n} \xi_\alpha(\tau_i) + \nabla_{\tau_i} \xi_\alpha(\partial_n) \equiv K_{\alpha,n,m} \tau_i^m = -\nu_{\alpha_i} G_{nm} \tau_i^m - \frac{q_i}{2} \xi_\alpha^n.$$

Por tanto

$$\left[K_{\alpha,n,m} v^n \right] \tau_i^m = -\nu_{\alpha_i} (G_{mn} v^n) \tau_i^m - \frac{1}{2} q_i \xi_\alpha^m v^m,$$

o, lo que es lo mismo,

$$K_{\alpha,n,m} v^n \tau_i^m \equiv K_\alpha(v, \tau_i) = -\nu_{\alpha_i} G(v, \tau_i),$$

ya que

$$\xi_{\alpha,m} v^m = 0.$$

Por otro lado, como

$$v = \sum_{i=1}^{N-M} \lambda_{i+M} \tau_i,$$

obtenemos

$$p_\alpha(v,v) = K_\alpha(v,v) = -\sum_{j,i=1}^{N-M} (\lambda_{i+M}\lambda_{j+M}\nu_{\alpha_i})G(\tau_i,\tau_j) = -\sum_i \nu_{\alpha_i}\lambda_{i+m}^2$$

si $G(\tau_i,\tau_j) = \delta_{ij}$. Colocando esta expresión en (1.6) deducimos (1.20).

Designemos por medio de Q_i los siguientes campos

$$Q_i = v(\lambda_{i+M})\tau_i + \lambda_{i+M}^2 \sum_{\alpha=1}^{M} \nu_{\alpha_i}\xi_\alpha, \qquad i = \overline{1, N-M}. \tag{1.21}$$

De las igualdades

$$\begin{cases} v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N-M} \lambda_{i+M}\tau_i, \\ F = \displaystyle\sum_{i=1}^{N-M} Q_i, \end{cases}$$

podemos afirmar que si se tienen $(N-M)$ partículas que se mueven con una velocidad $v_i = \lambda_{i+M}\tau_i$ bajo la acción de fuerzas Q_i, entonces los desplazamientos del sistema formado por estas partículas se realizan con una velocidad $v = \sum_{i=1}^{N-M} v_i$ bajo la acción de la resultante F.

Consecuencia 1.5. Si $M = N-1$ (Problema de Suslov [30]), entonces el campo buscado ξ_N se puede construir como se indica en la consecuencia 1.3 sin necesidad de conocer las raíces de (1.13). Además se tiene que

$$\begin{cases} v = \lambda_N\tau_1 \\ F = Q_1 = v(\lambda_N)\tau_1 + \lambda_N^2 \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N-1} \nu_{\alpha_1}\xi_\alpha. \end{cases} \tag{1.22}$$

Como se puede observar de (1.2) y (1.20) los campos de velocidades y fuerzas se construyen a partir de los coeficientes λ_{i+M}, para los cuales se sabe que están relacionados con v por la fórmula $v^2 = \sum_i \lambda_{i+M}^2$.

En el problema de Suslov, si exigimos que

$$F = \operatorname{grad} U,$$

entonces

$$\begin{cases} v^2 = \lambda_N^2 = 2(U+h), & v(h) = 0, \\ \xi_\alpha(U) = 2\nu_{\alpha_1}(U+h), & \alpha = \overline{1, N-1}. \end{cases} \tag{1.23}$$

De aquí en adelante consideraremos que los campos $\xi_1,\ldots,\xi_M$ dados tienen componentes construidos en base al proceso de ortogonalización de Gramm, es decir, vamos a suponer que

$$\xi_\alpha^k = \xi_\alpha(x^k) = \begin{vmatrix} P_1^2 & G(P_1,P_2) & \ldots & G(P_1,P_{\alpha-1}) & P_1^k \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ G(P_\alpha,P_1) & & \ldots & G(P_\alpha,P_{\alpha-1}) & P_\alpha^k \\ P_1^k & & \ldots & P_\alpha^k & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_\alpha \Gamma_{\alpha-1}}}, \tag{1.24}$$

donde Γ_α es el determinante de Gramm construido en base a los campos $P_1,\ldots,P_\alpha$.

Consideraremos, además, que se cumple que

$$\begin{cases} P_\alpha = \operatorname{grad} f_\alpha, \\ P_\alpha^k = P_\alpha(x^k) = G^{kn}\partial_n f_\alpha, \end{cases} \tag{1.25}$$

donde $(f_1,\ldots,f_M)$ son funcionalmente independientes, las cuales, para mayor comodidad supondremos de clase $C^\infty(X)$ (aunque basta si son $C^r(X)$, $r \geq 2$).

Pasaremos al estudio de casos particulares de los resultados expuestos y a la ilustración de éstos en ejemplos concretos.

2. Construcción de campos v y F en el plano

Sea $X \subset E^2$. La única raíz de (1.13) en tal caso se define como sigue

$$\nu = \nu_1 = -\partial_x\left(\frac{f_x}{R}\right) - \partial_y\left(\frac{f_y}{R}\right) = (2f_xf_yf_{xy} - f_x^2f_{yy} - f_y^2f_{xx})\frac{1}{R^3}, \tag{2.1}$$

donde $R^2 = f_x^2 + f_y^2$.

La condición (1.15) toma la forma

$$r^2 \equiv \frac{\left[f_{xy}(f_x^2 - f_y^2) + f_xf_y(f_{yy} - f_{xx})\right]^2}{R^2} \neq 0. \tag{2.2}$$

Bajo estas restricciones el campo $\tau_1 = \xi_1$ se determina mediante la fórmula (1.16):

$$\begin{cases} \tau_1(x) = \left[f_yf_{xy} - f_x(f_{yy} + R\nu)\right] r^{-1} \\ \tau(y) = \left[f_xf_{xy} - f_y(f_{xx} + R\nu)\right] r^{-1}, \end{cases} \tag{2.3}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} \tau_1(x) = f_y\big(f_{xy}(f_y^2 - f_x^2) + f_x f_y(f_{yy} - f_{xx})\big)|R|^2\,|r| \\ \tau(y) = -f_x\big(f_{xy}(f_y^2 - f_x^2) + f_x f_y(f_{yy} - f_{xx})\big)|R|^2\,|r|\,. \end{cases}$$

Por tanto los campos v y F son tales que

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1(x,y) = \hat{\lambda}_1 f_y \\ \dot{y} = v_2(x,y) = -\hat{\lambda}_1 f_x, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} F_1(x,y) = \tau_1\left(\frac{\hat{\lambda}_1^2}{2}\right) R f_y + \hat{\lambda}_1^2(f_x f_{yy} - f_y f_{xy}) \\ F_2(x,y) = \tau_1\left(\frac{\hat{\lambda}_1^2}{2}\right) R f_x + \hat{\lambda}_1^2(f_y f_{xx} - f_x f_{xy}), \end{cases} \tag{2.6}$$

donde $F = F_1\partial_x + F_2\partial_y$, $v = v_1\partial_x + v_2\partial_y$, y se ha puesto $\hat{\lambda}_1^2 = \lambda_1^2 R^{-2}$.

Hacemos notar que en (2.5) en general se deben escribir dos signos. Para mayor sencillez hemos representado los componentes del campo τ omitiendo uno.

El campo F, con componentes (2.6), se obtuvo en [35] y representa la solución del problema de Danielli.

Aplicaremos estos resultados a los siguientes ejemplos:

i) $f = xy$,
ii) $f = 1/2(x^2 + ky^2)$,
iii) $f = \lambda/2(x^2 + ky^2) - \mu/3(3y^2 - x^2)x$.

Solución.

i) En este caso (2.1) y (2.2) toman la forma respectivamente

$$\begin{cases} \nu = (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2xy \\ (Rr)^2 = (x^2 - y^2)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Por tanto los campos τ_1, v y F son tales que

$$\begin{cases} \tau_1(x) = R^{-1}x \\ \tau_1(y) = -R^{-1}y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1(x,y) = x\hat{\lambda}_1, \\ \dot{y} = v_2(x,y) = -y\hat{\lambda}_1, \qquad \hat{\lambda}_1 = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} F_1(x,y) = \tau_1 \dfrac{\hat\lambda_1^2}{2}\sqrt{x^2+y^2}\,x + \hat\lambda_1^2(-x) \\ F_2(x,y) = -\tau_1 \dfrac{\hat\lambda_1^2}{2}\sqrt{x^2+y^2}\,y + \hat\lambda_1^2(-y). \end{cases}$$

Este campo se puede representar y en la forma (1.22)

$$\begin{cases} v^2 = \lambda_1^2 = (x^2+y^2)\hat\lambda_1^2 \\ F = Q_1 = v(\lambda_1)\tau_1 + \lambda_1^2 \cdot (x^2+y^2)^{-2} \cdot 2xy \operatorname{grad} f, \end{cases} \tag{2.8}$$

donde $\operatorname{grad} f = y\partial_x + x\partial_y$.

Se puede probar que si en (2.7)

$$\hat\lambda_1^2 = \alpha_1 + \alpha_2(x^2+y^2),$$

entonces las órbitas $\{xy = \text{const}\}$ son generadas por el potencial

$$U = \alpha_1 \frac{(x^2+y^2)}{2} + \alpha_2 \frac{(x^4+y^4)}{2},$$

si $h = \alpha_2(xy)^2 = \alpha_2 f^2$.

ii) En el caso $f = 1/2(x^2+ky^2)$, de (2.1) y (2.2) obtenemos

$$\nu = -\frac{kf}{(x^2+k^2y^2)^{3/2}},$$

$$r^2 = \frac{(xy)^2k^2(1-k)^2}{R} \neq 0.$$

Por consiguiente de (2.5) y (2.6) se deduce que

$$\begin{cases} v(x) = \hat\lambda_1 ky \\ v(y) = -\hat\lambda_1 x, \qquad \hat\lambda_1 = \lambda_1(x^2+y^2)^{-1/2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = \tau_1 \dfrac{\hat\lambda_1^2}{2} Rky + \hat\lambda_1^2 kx \\ F(y) = -\tau_1 \dfrac{\hat\lambda_1^2}{2} Rx + \hat\lambda_1^2 ky. \end{cases}$$

De aquí resulta que si $F = \operatorname{grad} U$ y

a) $\hat{\lambda}_1 = a = \text{const}$, entonces

$$h = (k+1)f, \qquad U = -\frac{k}{2}(x^2+y^2).$$

b) $\hat{\lambda}_1 = \dfrac{a}{xy}$, entonces

$$h = h_0, \qquad U = \frac{a(x^2+k^2y^2)}{(xy)^2} + U_0\,.$$

iii) Para este ejemplo, si se cumple (2.2), entonces las órbitas dadas corresponden al potencial [26]

$$U = -k\lambda^2(x^2+y^2) + \mu^2(x^2+y^2)^2 + 2\lambda\mu x\left(3(1-k)y^2 - \frac{7+k}{3}x^2\right) + U_0,$$

si la "constante de energía" h cumple:

$$h = (k+1)f + h_0.$$

El campo v en este caso tiene las siguientes componentes

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda k y - 2\mu x y = \partial_y f \\ \dot{y} = +\lambda x - \mu(x^2-y^2) = -\partial_x f. \end{cases}$$

3. Construcción de los campos v y F cuando $X \subseteq E^3$

Aplicaremos los resultados expuestos más arriba cuando $\dim X = 3$ y f es tal que

$$f(x,y,z) = \text{const}$$

es una superficie con curvatura gaussiana R y media H definidas por las fórmulas

$$\begin{cases} H = \operatorname{div}\dfrac{\operatorname{grad} f(x)}{\sqrt{(\operatorname{grad} f)^2}} = \dfrac{\Delta f}{q} + \operatorname{grad} f\left(\dfrac{1}{q}\right) \\ q^2 \equiv (\operatorname{grad} f)^2 = f_+^2 f_y^2 + f_z^2, \qquad \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}, \end{cases}$$

$$R = -\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_z \\ f & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\left(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)^2}.$$

Las raíces del polinomio (1.13), o lo, que es lo mismo,

$$\nu^2 + H\nu + R = 0,$$

son

$$\begin{cases} \nu_1 = -\dfrac{H}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{H^2 - 4R} \\ \nu_2 = -\frac{H}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{H^2 - 4R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Por consiguiente si f es tal que

$$r \equiv \begin{vmatrix} \partial_x \dfrac{f_x}{q} + \nu_i & \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_y}{q} + \partial_y \dfrac{f_x}{q}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_x}{q} + \partial_z \dfrac{f_x}{q}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_y}{q} + \partial_y \dfrac{f_x}{q}\right) & \partial_y \dfrac{f_y}{q} + \nu_i & \dfrac{1}{2}\left(\partial_y \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_y}{q}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_x}{q}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\partial_y \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_y}{q}\right) & \partial_z \dfrac{f_z}{q} + \nu_i \end{vmatrix} \neq 0$$

donde $i = 1, 2$, entonces, en base al Teorema 1.1, obtenemos que las componentes de los campos τ_1 y τ_2 son las siguientes

$$\tau_i(x) = -q_i \begin{vmatrix} \dfrac{f_x}{q} & \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_y}{q} + \partial_y \dfrac{f_x}{q}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_x}{q} + \partial_z \dfrac{f_x}{q}\right) \\ \dfrac{f_y}{q} & \partial_y \dfrac{f_y}{q} + \nu_i & \dfrac{1}{2}\left(\partial_y \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_y}{q}\right) \\ \dfrac{f_z}{q} & \dfrac{1}{2}\left(\partial_y \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_y}{q}\right) & \partial_z \dfrac{f_z}{q} + \nu_i \end{vmatrix},$$

$$\tau_i(y) = -q_i \begin{vmatrix} \partial_x \dfrac{f_x}{q} + \nu_i & \dfrac{f_x}{q} & \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_x}{q} + \partial_z \dfrac{f_x}{q}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_y}{q} + \partial_y \dfrac{f_x}{q}\right) & \dfrac{f_y}{q} & \dfrac{1}{2}\left(\partial_y \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_y}{q}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\partial_y \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_y}{q}\right) & \dfrac{f_z}{q} & \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_y}{q} + \nu_i\right) \end{vmatrix},$$

$$\tau_i(z) = -q_i \begin{vmatrix} \partial_x \dfrac{f_x}{q} + \nu_i & \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_y}{q} + \partial_y \dfrac{f_x}{q}\right) & \dfrac{f_x}{q} \\ \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_y}{q} + \partial_y \dfrac{f_x}{q}\right) & \partial_y \dfrac{f_y}{q} + \nu_i & \dfrac{f_y}{q} \\ \dfrac{1}{2}\left(\partial_x \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_x}{q}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\partial_y \dfrac{f_z}{q} + \partial_z \dfrac{f_y}{q}\right) & \dfrac{f_z}{q} \end{vmatrix},$$

donde q_i se determina imponiendo que se cumplan (1.17) y (1.18).

Como se puede observar, de estas expresiones se deduce que

$$f_x \tau_i(x) + f_y \tau_i(y) + f_z \tau_i(z) = -q_i \det P_\alpha, \qquad i = 1, 2,$$

la cual se anula en base a (1.13).

Cabe hacer notar que el cálculo de las raíces de (1.13) y la construcción de los campos τ_i, v, y F es, a veces, más cómodo aplicando la observación (1.1). En las siguientes afirmaciones utilizaremos este método. Para el caso que se analiza se tendrá, que si la matriz (B_1) definida de la forma

$$(B_1) = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} f_{xx} + \hat{\nu}_i & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} + \hat{\nu}_i & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} + \hat{\nu}_i \end{pmatrix}, \qquad \hat{\nu}_i = q\nu_i,$$

cumple

$$\det(B_1) \neq 0, \tag{3.2}$$

obtendremos que las componentes de los campos τ_1 y τ_2 se definen por medio de las fórmulas dadas más arriba, haciendo formalmente $q \equiv 1$.

Ilustraremos estas afirmaciones en los siguientes ejemplos.

i) $f = r + b_1 x + b_2 y + b_3 z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

ii) $f = \rho(x, y) - z$.

donde b_1, b_2, b_3 son parámetros.

i) Para este caso las raíces son las siguientes

$$\begin{cases} \hat{\nu}_1 = \dfrac{1}{r} \\ \hat{\nu}_2 = -\dfrac{f^2}{r^3 q}, \qquad q^2 \equiv (\operatorname{grad} f)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^3 - 1 + \dfrac{2f}{r} \end{cases} \tag{3.3}$$

Como se puede probar, la condición (3.2) se cumple sólo para $\hat{\nu}_2$. El campo τ_2 por tanto tiene los siguientes componentes

$$\begin{cases} \tau_2(x) = -\left[qx - fq^{-1}\left(\frac{x}{r} + b_1\right)\right] \frac{1}{\beta} \\ \tau_2(y) = \left[qy - fq^{-1}\left(\frac{y}{r} + b_2\right)\right] \frac{1}{\beta} \\ \tau_2(z) = \left[qz - \frac{f}{q}\left(\frac{z}{r} + b_3\right)\right] \frac{1}{\beta}, \qquad \beta = \sqrt{(qr)^2 - f^2} \end{cases} \tag{3.4}$$

Para construir el campo τ_1 aplicaremos los resultados de la consecuencia 1.3. Después de ciertos cálculos se obtiene que

$$\begin{cases} \tau_1(x) = (yb_3 - zb_2)\frac{1}{\beta} \\ \tau_1(y) = (zb_1 - xb_3)\frac{1}{\beta} \\ \tau_2(z) = (xb_2 - yb_1)\frac{1}{\beta}. \end{cases} \tag{3.5}$$

De (3.4) y (3.5) se deduce que

$$\begin{cases} \tau_2(f) = 0 \\ \beta\tau_2(Ax + By + Cz) = (Ax + By + Cz)\left(q - \frac{f}{r}\right) - f(Ab_1 + Bb_2 + Cb_3); \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \tau_1(r) = 0 \\ \tau_1(b_1x + b_2y + b_3z) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

donde A, B, y C son ciertos parámetros.

Los campos v y F por consiguiente son tales que

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) = \left[xq - \left(\frac{x}{r} + b_1\right) q^{-1} \cdot f\right] \frac{\lambda_3}{\beta} + (yb_3 - zb_2)\frac{\lambda_2}{\beta} \\ \dot{y} = v(y) = \left[yq - \left(\frac{y}{r} + b_2\right) q^{-1} \cdot f\right] \frac{\lambda_3}{\beta} + (zb_1 - xb_3)\frac{\lambda_2}{\beta} \\ \dot{z} = v(z) = \left[zq - \left(\frac{z}{r} + b_3\right) q^{-1} \cdot f\right] \frac{\lambda_3}{\beta} + (xb_2 - yb_1)\frac{\lambda_2}{\beta}, \end{cases} \tag{3.8}$$

donde $v = v_1\partial_x + v_2\partial_y + v_3\partial_z$,

$$F = Q_1 + Q_2,$$

donde

$$Q_1 = v(\lambda_2)\tau_1 - \frac{\lambda_2^2}{rq}\xi_1 , \tag{3.9}$$

$$Q_2 = v(\lambda_3)\tau_2 - \frac{(f\lambda_3)^2}{(rq)^3}\xi_1 , \tag{3.10}$$

$$\xi_1 = \frac{\operatorname{grad} f}{q} = \frac{(x/r + b_1)}{q}\partial_x + \frac{(y/r + b_2)}{q}\partial_y + \frac{(z/r + b_3)}{q}\partial_z .$$

Consecuencia 3.1. El campo Q_2 coincide con el campo de Kepler no perturbado si en (3.6) se cumple que

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

y además si se tiene que

$$\begin{cases} f\lambda_3 = q \\ \lambda_2 = 0, \qquad f \neq 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

En realidad, bajo dichas condiciones se cumple que el campo τ_2 tiene como invariantes

$$\begin{cases} f = r + b_1x + b_2y + b_3z \\ g = Ax + By + cz = 0. \end{cases}$$

Considerando (3.12) resulta que las componentes del campo (3.10) toman la forma

$$\begin{cases} Q_2(x) = -\dfrac{x}{r^3} \\ Q_2(y) = -\dfrac{y}{r^3} \\ Q_2(z) = -\dfrac{z}{r^3} . \end{cases}$$

Consecuencia 3.2. Si $\lambda_3 = 0$, entonces el campo v tiene los siguientes invariantes

$$\begin{cases} r = r_0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

El campo F, en tal caso, coincide con el campo Q_1.

Como se interpreta más arriba, en general, el campo F es la suma de los campos Q_1 y Q_2.

Con respecto a la superficie f como se desprende de (3.3) es una superficie convexa si $f \neq 0$ (ya que la curvatura gaussiana R es estrictamente positiva).

Si $f = 0$ entonces dicha superficie es un cono. El estudio del problema 1 en este caso se hace en base a lo expuesto colocando $f = 0$ en las fórmulas obtenidas.

Finalmente hacemos notar que el problema sobre la construcción de v y F en el movimiento de Kepler no perturbado se estudió en particular en [27].

Pasaremos al análisis del ejemplo ii)

ii) Si $f = \rho(x,y) - z$, entonces la condición (3.2) se escribe como sigue

$$\nu_i\left(\hat{\nu}_i^2 + \Delta\rho\hat{\nu}_i + \rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}^2\right) \neq 0. \tag{3.13}$$

Por tanto los componentes de τ_i, $i = 1,2$ son los siguientes, si se cumple (3.13),

$$\begin{cases} \tau_i(x) = \left[\hat{\nu}_i\left(\rho_y\rho_{xy} - \rho_x(\rho_{yy} + \hat{\nu}_i)\right)\right] \dfrac{1}{r_i} \\ \tau_i(y) = \left[\hat{\nu}_i\left(\rho_x\rho_{xy} - \rho_y(\rho_{xx} + \hat{\nu}_i)\right)\right] \dfrac{1}{r_i} \\ \tau_i(z) = \left[\hat{\nu}_i^2 + \Delta\rho\hat{\nu}_i + \rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}^2\right] \dfrac{1}{r_i}, \end{cases} \tag{3.14}$$

donde r_i son funciones tales que

$$\tau_i^2 \equiv G(\tau_i, \tau_i) = 1, \; i = 1,2, \qquad \hat{\nu}_i = \sqrt{1 + \rho_x^2 + \rho_y^2}\,\nu_i.$$

Analizaremos el caso particular

$$\rho = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

considerando que

$$\hat{\nu}_1 = -1, \qquad \hat{\nu}_2 = -\frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Entonces (3.13) toma la forma

$$\hat{\nu}_i\left(\hat{\nu}_i + 1\right)^2 \neq 0, \qquad i = 1,2.$$

Por tanto, es posible construir τ_1 y τ_2 en base a la consequencia 1.2

$$\begin{cases} \tau_2(x) = \dfrac{x}{r_2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2)} \\ \tau_2(y) = \dfrac{y}{r_2} \\ \tau_2(z) = \dfrac{(x^2 + y^2)}{r_2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_1(x) = -\dfrac{y}{r_1}, & r_1 = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tau_1(y) = \dfrac{x}{r_1} \\ \tau_1(z) = 0. \end{cases}$$

Los invariantes de estos campos son, respectivamente, los siguientes

$$1)\ f = \frac{x^2+y^2}{2} - z,\ g_1 = \frac{x}{y},\ \tau_2(f) = 0,\ \tau_2(g_1) = 0,$$

$$2)\ \rho = \frac{x^2+y^2}{2};\ g_2 = z,\ \tau_1(\rho) = 0,\ \tau(g_2) = 0.$$

Los campos v y F por consiguiente toman la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) = \dfrac{x}{r_2}\lambda_3 - \dfrac{y}{r_1}\lambda_2 \\ \dot{y} = v(y) = \dfrac{y}{r_2}\lambda_3 + \dfrac{x}{r_1}\lambda_2 \\ \dot{z} = v(z) = \dfrac{x^2+y^2}{r_2}\lambda_3 + 0\cdot\lambda_2, \end{cases} \tag{3.15}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\dot{y}_1 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{1+y_1^2}}, \qquad \dot{y}_2 = \frac{\lambda_3}{y_1}, \qquad \dot{y}_3 = 0, \tag{3.16}$$

donde $x = \cos y_2 \cdot y_1$, $y = \sin y_2 \cdot y_1$, $z = (y_1^2/2) + y_3$,

$$\begin{cases} F = Q_1 + Q_2 \\ Q_1 = v(\lambda_2)\tau_1 + \left(\dfrac{\lambda_2^2(-1)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)\cdot\xi_1 \\ Q_2 = v(\lambda_3)\tau_2 + \left(\dfrac{\lambda_2^2(-1)}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}\right)\cdot\xi_1, \end{cases} \tag{3.17}$$

donde $\xi_1 = \left(1+x^2+y^2\right)^{-1/2}\left(x\partial_x + y\partial_y - \partial_z\right)$.

Si en (3.17) hacemos tender $\lambda_2 \to 0$, entonces F coincide con Q_2, que es el campo que garantiza que los desplazamientos se realicen a lo largo de $\{\rho^2 = \text{const},\ z = \text{const}\}$.

De igual manera si $\lambda_3 \to 0$, entonces $F \to Q_2$, que es el campo que garantiza que las trayectorias sean $\{f = \text{const},\ x/y = \text{const}\}$. Se puede probar que si

$$\begin{cases} v^2 = \lambda_3^2 = 1 + x^2 + y^2 \\ h = 2f = x^2 + y^2 - 2z, \end{cases}$$

entonces el campo Q_2 es potencial, con función $U = 2z + 1$.

4. Construcción de los campos v y F cuando $\dim X > 3$ y $M < N - 1$

Este caso lo ilustraremos en el siguiente ejemplo.

Sea dada en E^N la hipersuperficie

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k x_k^2, \qquad a_1 < a_2 < \cdots < a_N. \tag{4.1}$$

Aplicando los resultados expuestos en el apartado 1, se exige construir los campos v y F.

Solución. El polinomio (1.13) en este caso toma la forma

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2 x_k^2}{\nu + a_k} = 0 \tag{4.2}$$

Introducimos la función de variable compleja

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2 x_k^2}{z + a_k},$$

la cual se puede representar como sigue [17]

$$f(z) = \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (z - \nu_i)}{\prod_{k=1}^{N} (z + a_k)},$$

donde $\nu_1, \ldots, \nu_{N-1}$ son las raíces de (4.2). Como es conocido, bajo las restricciones indicadas con respecto a los coeficientes $a_1, \ldots, a_N$, se tiene que

$$a_1 < \nu_1 < a_2 < \nu_2 < \cdots < \nu_{N-1} < a_N. \tag{4.3}$$

En base a los resultados expuestos en el apartado 1 resulta que los campos $\tau_1, \ldots, \tau_{N-1}$ son

$$\tau_i = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{a_n x_n}{\nu_i + a_n} r_i^{-1} \right) \partial_n, \qquad i = \overline{1, N-1}, \tag{4.4}$$

donde

$$r_i = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{a_n x_n}{\nu_i + a_n}\right)^2}, \qquad \det B_1 = \prod_{k=1}^{n} (\nu + a_k) \neq 0.$$

Considerando que

$$\tau_i(f) = \sum_{k=1}^{N} r_i^{-1} \frac{a_n x_n^2}{\nu_i + a_n},$$

obtenemos, en base a (4.2), que los campos construídos tienen como invariante (4.1) y por tanto será invariante del campo

$$v = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{i+1} \tau_i, \tag{4.5}$$

que genera las ecuaciones

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_k x_k}{\nu_i + a_k} \frac{\lambda_{i+1}}{r_i}, \qquad k = \overline{1, N}.$$

El campo F por consiguiente es tal que

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^{N-1} Q_i \\ Q_i = v(\lambda_{i+1}) \tau_i + \lambda_{i+1}^2 \nu_i \xi_1, \end{cases} \tag{4.6}$$

donde $\xi_1 = \frac{1}{q} \sum_k a_k x_k \partial_k$, $q = \sqrt{\sum (a_k x_k)^2}$.

Para hacer un estudio de los campos (4.5) y (4.6) es necesario obtener en forma implícita las raíces ν_i que, como es conocido, no es un problema trivial.

En general construir v y F, cuando la dimensión de X es grande, es dificultoso (y muchas veces imposible) debido a que no es factible encontrar las raíces del polinomio (1.13). Un caso especial se tiene cuando la cantidad de integrales dadas es a una unidad menos que la dimensión de X, es decir, cuando $M = N - 1$.

5. Estudio del caso cuando $M = \dim X - 1$ (Problema de Suslov)

Supongamos que en (1.25) $\alpha = \overline{1, N-1}$, es decir existen $(N-1)$ funciones $f_1, \dots, f_{N-1}$ funcionalmente independientes y tales que

$$v(f_\alpha) = 0, \qquad \alpha = \overline{1, N-1}. \tag{5.1}$$

Introduciendo las coordenadas

$$\begin{cases} y_\alpha = f_\alpha(x^1, \dots, x^N), & \alpha = \overline{1, N-1} \\ y_N = x^N, \end{cases} \tag{5.2}$$

obtenemos que los campos $\xi_1, \dots, \xi_{N-1}$ toman la forma

$$\xi_\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \qquad \alpha = \overline{1, N-1}, \tag{5.3}$$

por tanto

$$\tau_1 = \xi_N = \frac{\partial}{\partial y_N},$$

y

$$\begin{cases} v = \lambda_N \dfrac{\partial}{\partial y_N} \\ \lambda_N = \lambda_N(y_1, \dots, y_N). \end{cases} \tag{5.4}$$

Las ecuaciones que genera el campo v son las siguientes

$$\begin{cases} \dot{y}^\alpha = 0 \\ \dot{y}^N = \lambda_N, \end{cases} \tag{5.5}$$

donde $\alpha = \overline{1, N-1}$.

Designaremos por medio de g al tensor con las componentes g_{ij} :

$$g_{ij} = \sum_{n,m=1}^{N} \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} G\left(\frac{\partial}{\partial y^n}, \frac{\partial}{\partial y^m}\right).$$

Evidentemente el polinomio (1.13) es trivial en este caso:

$$\nu^{N-1} = 0,$$

y por tanto

$$\nabla_v v = F = v(\lambda_N)\tau_N = \tau_N \left(\frac{\lambda_N^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y^N}. \tag{5.6}$$

Consecuencia 5.1. F es gradiente, es decir,

$$F = \operatorname{grad} U, \tag{5.7}$$

si y sólo si se cumple que

$$\nabla_v p(\partial_k) - \nabla_{\partial_k} p(v) = 2\partial_k h, \tag{5.8}$$

o, lo que es lo mismo, si

$$g_{kN}\,\partial_N \frac{\lambda_N^2}{2} - g_{NN}\,\partial_k \frac{\lambda_N^2}{2} = \partial_k h, \tag{5.9}$$

donde

$$p_k = g_{kN}\,v^N = g_{kN}\,\lambda_N. \tag{5.10}$$

La demostración se tiene de las igualdades

$$\begin{cases} \nabla_v p(\partial_k) = \partial_k U \\ \nabla_v p(\partial_k) = \partial_k \left(g_{NN}\,\dfrac{\lambda_N^2}{2} \right) + 1/2(\nabla_v p(\partial_k) - \nabla_{\partial_k} p(v)). \end{cases} \tag{5.11}$$

La equivalencia de (5.8) y (5.9) se desprende de (5.10) y (5.5), considerando que

$$\nabla_k g_{ij} = 0.$$

Las ecuaciones (5.8) son compatibles si se satisfacen las condiciones

$$\begin{cases} g_{jN}\,\nabla_{\partial_k} \alpha_N - g_{kN}\,\nabla_{\partial_j} \alpha_N = 0 \\ \alpha_N = \partial_N \left(\dfrac{\lambda_N^2}{2} \right). \end{cases} \tag{5.12}$$

Integrando (5.12) obtenemos λ_N^2. Colocando luego en (5.9) (o (5.8)) obtenemos $\partial_k h$ y por lo tanto h. De (5.11) finalmente se deduce que el potencial U es la siguiente función

$$u = \frac{1}{2} \cdot g_{NN}\,\lambda_N^2 - h(y_1, \ldots, y_{N-1}). \tag{5.13}$$

De estas fórmulas se desprende que en el problema de Suslov [30], el potencial U se construye si es conocido el tensor g para el cual existen soluciones de (5.12). Este hecho es de interés, ya que, si se tiene cierto sistema mecánico con "energía cinética $(1/2)g(v,v)$" dada, es posible construir localmente un campo de fuerzas potencial con función potencial dada por la fórmula 5.13 (en base al teorema de enderezamiento de campos vectoriales, localmente siempre existen $(N-1)$ integrales).

Ilustraremos esta afirmaciones en los siguientes ejemplos.

i) Construir el potencial (5.13) si el tensor g viene dado por

$$(g)=(g_{ij})=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2y_3^2} & 0 & -\dfrac{y_1}{(y_3)^3} \\ 0 & \dfrac{1}{2(y_3)^2} & -\dfrac{y_2}{(y_3)^3} \\ -\dfrac{y_1}{(y_3)^3} & -\dfrac{y_2}{(y_3)^3} & \dfrac{y_1^2+y_2^2+y_3^4}{2y_3^4} \end{pmatrix}.$$

Solución. Las ecuaciones (5.9) toman la forma

$$\begin{cases} y_3^{-3}y_1\,\partial_3(\lambda_3^2)+\frac{1}{2}\cdot y_3^{-4}(y_1^2+y_2^2+y_3^4)\partial_1(\lambda_3^2)=2\partial_1 h \\ y_3^{-3}y_1\,\partial_3(\lambda_3^2)+\frac{1}{2}\cdot y_3^{-4}(y_1^2+y_2^2+y_3^4)\partial_1(\lambda_3^2)=2\partial_2 h, \\ 0=\partial_3 h. \end{cases} \tag{5.14}$$

Integrando (5.12) se puede probar que las siguientes funciones las satisfacen

$$\text{a) } \lambda_3^2=y_3^4, \qquad \text{b) } \lambda_3^2=\varphi\left(\frac{y_1^2+y_2^2-y_3^4}{y_3^2}\right).$$

Colocando luego a) y b) en (5.14), (5.13) obtenemos

$$\text{a) } h=y_1^2+y_2^2, \qquad U=y_3^4+U_0$$

$$\text{b) } h=h_0, \qquad U=\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^4}{4y_3^4}\varphi\left(\frac{y_1^2+y_2^2-y_3^4}{y_3^2}\right)+U_0.$$

Si realizamos la transformación

$$\begin{cases} y_1=x_1x_3\equiv xz \\ y_2=x_2x_3\equiv yz \\ y_3=x_3\equiv z, \end{cases}$$

donde (x_1,x_2,x_3) son coordenadas cartesianas, entonces las soluciones a) y b) toman la forma

a) $\lambda_3^2=z^4, \qquad h=(zx)^2+(zy)^2, \qquad U=z^4+v_0$

b) $\lambda_3^2=\varphi(x^2+y^2-z^2), \qquad h=h_0, \qquad U=(x^2+y^2+z^2)\varphi(x^2+y^2-z^2)+v_0.$

Este último potencial fue obtenido en [15], saliendo de las órbitas biparamétricas

$$xz=c_1, \qquad yz=c_2.$$

Finalmente hacemos notar que en la demostración de las afirmaciones dadas más arriba no hemos utilizado la signatura del tensor g, por tanto los resultados expuestos (al igual que los obtenidos en los apartados anteriores) pueden ser extendidos a los espacios pseudoriemannianos.

EJEMPLO.

ii) Dado en el espacio de Minkovski la familia de órbitas triparamétricas

$$\frac{x}{w} = c_1, \qquad \frac{y}{w} = c_2, \qquad \frac{z}{w} = c_3,$$

construir el potencial de fuerzas (5.13).

Por medio de la transformación

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x}{w}, & y_3 = \dfrac{z}{w}, \\ y_2 = \dfrac{y}{w}, & y_4 = w, \end{cases}$$

obtenemos que el tensor g toma la forma

$$(g_{ij}) = -1/2 \begin{pmatrix} y_4^2 & 0 & 0 & 2y_4y_1 \\ 0 & y_4^2 & 0 & 2y_4y_2 \\ 0 & 0 & y_4^2 & 2y_4y_3 \\ 2y_4y_1 & 2y_4y_2 & 2y_4y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

De las ecuaciones correspondientes se obtienen las siguientes soluciones

a) $\lambda_3^2 = \varphi^2(g_{44}), \quad h = \int g_{44}\, d(\varphi(g_{44})), \quad U = -\varphi^2(g_{44}/2)g_{44} + h.$

b) $\lambda_3^2 = -y_4 g_{44}, \quad h = h_0, \quad U = -(g_{44})^2 \dfrac{y_4}{2} + U_0.$

Hacemos notar que este ejemplo fue analizado en [29], aplicando el método de Suslov.

Por la importancia que tiene el caso $\dim X = 3$, $M = 2$, estudiaremos el problema planteado en forma detallada en el siguiente apartado.

6. Construcción de los campos v y f cuando $N = 3$, $M = 2$

En base a la consecuencia 1.2 los campos τ_1 y v se definen por las fórmulas

$$\begin{cases} \tau_1(x) = \xi_2(y)\xi(z) - \xi_2(z)\xi(y) \\ \tau_1(y) = \xi(x)\xi_1(z) - \xi(z)\xi_1(x) \\ \tau_1(z) = \xi_1(y)\xi_2(x) - \xi_1(x)\xi_2(y), \end{cases} \tag{6.1}$$

$$v = \lambda_3 \tau_1 . \tag{6.2}$$

Designando por medio de $\vec{\tau}_1$, $\vec{v}$, $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ los vectores:

$$\vec{\tau}_1 = \operatorname{col}\big(\tau_1(x), \tau_2(y), \tau_1(z)\big), \qquad \vec{v} = \operatorname{col}\big(v(x), v(y), v(z)\big), \ldots, \text{ etc.},$$

obtenemos de (6.1) y (6.2) que

$$\begin{cases} \vec{\tau}_1 = [\vec{\xi}_2 \times \vec{\xi}_1], \\ \vec{v} = \lambda[\vec{\xi}_2 \times \vec{\xi}_1]. \end{cases} \tag{6.3}$$

En estas notaciones la fórmula (5.11) toma la forma

$$\dot{\vec{v}} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(v^2/2) + [\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}], \tag{6.4}$$

donde $[\times]$ es el producto vectorial

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(v^2/2) = \operatorname{col}\Big(\partial_x(v^2/2), \partial_y(v^2/2), \partial_x(v^2/2)\Big).$$

En base a las identidades

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \overrightarrow{\{a, b\}} + \operatorname{div}(\vec{b})\,\vec{a} - (\operatorname{div} \vec{a})\,\vec{b} \\ \overrightarrow{\{a, b\}} = \operatorname{col}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{3} b^j\, \partial_j a^1 - a^j \partial_j b^1,\ \sum_{j=1}^{3} b^j\, \partial_j a^2 - a^j\, \partial_j b^2,\ \sum_{j=1}^{3} b^j\, \partial_j a^3 - a^j \partial_j b^3\right), \end{cases} \tag{6.5}$$

(6.4) se puede representar en la forma

$$\dot{\vec{v}} = \tau_1(\lambda^2_{3/2})\vec{\tau}_1 + \lambda_3^2 \sum_{\alpha=1}^{2} \Big(-\operatorname{div}(\vec{\xi}_\alpha) + A_\alpha\Big)\vec{\xi}_\alpha = \vec{F} \tag{6.6}$$

donde A_1, A_2 y A_3 son ciertas funciones:

$$\overrightarrow{\{\xi_1, \xi_2\}} = A_2\vec{\xi}_1 + A_3\vec{\xi}_3 + A_1\vec{\xi}_2.$$

Es interesante comparar (6.6) con la fórmula (1.22), (1.14) de las cuales se desprende que ambas coinciden si

$$\begin{cases} \nu_{\alpha_1} = -\operatorname{div} \xi_\alpha + A_\alpha \\ \nu_{\alpha_2} = -A_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Considerando (1.24), (1.25) y designando por λ en (6.3) a la expresión

$$\frac{\lambda_3}{\sqrt{\left(\vec{\operatorname{grad}} f_1\right)^2 \left(\vec{\operatorname{grad}} f_2\right)^2 - \left(\vec{\operatorname{grad}} f_1 \cdot \vec{\operatorname{grad}} f_2\right)^2}},$$

se obtienen las siguientes fórmulas para v y F [26]

$$\left\{\begin{aligned} \vec{v} &= \lambda\left[\vec{\operatorname{grad}} f_1 \times \vec{\operatorname{grad}} f_2\right] \\ \dot{\vec{v}} &= F = \tau_1(\lambda^2/2)\vec{\tau}_1 - \lambda^2\left[\left[\vec{\operatorname{grad}} f_1 \times \vec{\operatorname{grad}} f_2\right] \times \overrightarrow{\left\{\vec{\operatorname{grad}} f_1, \vec{\operatorname{grad}} f_2\right\}}\right] \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^{2} \operatorname{div}\left(\lambda \vec{\operatorname{grad}} f_\alpha\right) \cdot \vec{\operatorname{grad}} f_\alpha. \end{aligned}\right. \tag{6.7}$$

En esta última igualdad hemos aplicado la identidad (6.5) que en este caso se escribe como sigue

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \lambda\,\overrightarrow{\left\{\vec{\operatorname{grad}} f_1, \vec{\operatorname{grad}} f_2\right\}} + \operatorname{div}\left(\lambda \vec{\operatorname{grad}} f_2\right) \cdot \vec{\operatorname{grad}} f_1 - \operatorname{div}\left(\lambda \vec{\operatorname{grad}} f_1\right) \cdot \vec{\operatorname{grad}} f_2. \tag{6.8}$$

Consecuencia 6.1. El campo (6.3) es dinámico gradiente [26] si y sólo si

$$\overrightarrow{\left\{\vec{\operatorname{grad}} f_1, \vec{\operatorname{grad}} f_2\right\}} = A_2 \vec{\operatorname{grad}} f_1 + A_1 \vec{\operatorname{grad}} f_2. \tag{6.9}$$

La validez de esta afirmación se obtiene colocando (6.9) en (6.8) y observando que bajo estas condiciones se cumple que

$$\vec{v} \cdot \operatorname{rot}\vec{v} = 0.$$

Consecuencia 6.2. El campo F es gradiente si y sólo si se cumple que

$$[\vec{v} \times \operatorname{rot}\vec{v}] = -2\vec{\operatorname{grad}} h. \tag{6.10}$$

La demostración se logra de la consecuencia 5.1, considerando que en este caso (5.8) coincide con (6.10).

El comportamiento de los campos v para los cuales, junto con (6.10), se cumple que

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0,$$

fue analizado en [1].

Ilustraremos estas afirmaciones en los siguientes ejemplos.

i) $f_1 = xz$, $f_2 = yz$.

ii) $f_1 = x^2 + y^2 + z^2$, $f_2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2$; siendo A, B, y C parámetros.

iii) $f_1 = z/x$, $f_2 = x^2 + y^2$.

Las soluciones las daremos sin detalles y se obtienen de (6.7), y de las consecuencias 6.2 y 5.1.

i) $v = -\lambda(xz\partial_x + yx\partial_y + z^2\partial_x)$,

1) $\lambda = 1$, $h = 1/2(f_1^2 + f_2^2)$, $U = z^4/2 + U_0$.

2) $\lambda = \varphi(x^2 + y^2 - z^2)/z$, $h = h_0$, $U = (x^2 + y^2 + z^2)\varphi(x^2 + y^2 - z^2) + U_0$.

ii) En este caso, si designamos por medio de s a la variable:

$$ds^2 = (xyz)^2 dt^2,$$

y suponemos que $\lambda = 1$, entonces las ecuaciones que genera el campo v son las siguientes

$$\begin{cases} x' = \alpha/x, & \alpha = B - C, \\ y' = \beta/y, & \beta = C - A, \\ z' = \gamma/z, & \gamma = A - B, \end{cases}$$

donde $x' = dx/ds$.

Por tanto

$$h = h_0, \qquad U = \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^2 + U_0,$$

y además se tiene que

$$\begin{cases} x^2 = 2\alpha s + x_0^2 \\ y^2 = 2\beta s + y_0^2 \\ z^2 = 2\gamma s + z_0^2. \end{cases} \tag{6.11}$$

Si se cumple que las condiciones iniciales satisfacen la igualdad

$$\left(\frac{x_0^2}{\alpha} + \frac{y_0^2}{\beta} + \frac{z_0^2}{\gamma}\right) = 0$$

entonces las soluciones (6.11) se expresan como sigue

$$\begin{cases} x^2 = 2\alpha\wp(t) + x_0^2 \\ y^2 = 2\beta\wp(t) + y_0^2 \\ z^2 = 2\gamma\wp(t) + z_0^2, \end{cases}$$

donde $\wp(t)$ es la función de Weirstrass:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d}{dt}\wp(t)\right]^2 = 4(\wp - \ell_1)(\wp - \ell_2)(\wp - \ell_3) \\ \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \dfrac{x_0^2}{\alpha} + \dfrac{y_0^2}{\beta} + \dfrac{z_0^2}{\gamma} = 0. \end{cases}$$

iii) En este ejemplo se tiene que

$$[\vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}] = \operatorname{col}\left(2x - \left(\frac{zy}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x}, 2y + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \cdot y, z + z\left(\frac{y}{x}\right)^2\right),$$

si $\lambda = x$, donde

$$v = y\partial_x - x\partial_y + \frac{zy}{x}\partial_z.$$

Por consiguiente

$$h = f_2(2 + f_1^2) \qquad \text{y} \qquad U = -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{2} + U_0.$$

Resumen. En los apartados 1–6 se construyen los campos v y F por medio del método de minimización.

Observación. Sobre el problema de construcción de campos de fuerzas.

El año 1890 en su tesis doctoral "O siloboi funsi, dopuskaiushi dannie shasnie integrali" (Sobre las funciones potenciales que permiten la existencia de integrales parciales dadas) [30] el científico ruso G. K. Suslov introdujo el concepto de "problema inverso de la dinámica", por medio del cual él entiende la construcción de campos de fuerza en base a integrales parciales dadas (trayectorias) o propiedades de los movimientos.

Bajo este enfoque fue, posiblemente, Newton el primero que planteó y solucionó un problema inverso, cuando construyó el campo de fuerzas potenciales bajo acción de las cuáles los planetas se mueven en correspondencia con las leyes de Kepler.

Bertrand, incentivado por los resultados de Newton, resolvió el siguiente problema: "Conociendo que los planetas se desplazan a lo largo de cónicas, se exige construir los componentes de las fuerzas como funciones del punto" [2]. La solución que obtuvo la enunció como sigue "La fuerza puede ser dirigida hacia un centro inmóvil y actuar en forma proporcional a la distancia o en forma inversa a su cuadrado".

Posteriormente Darboux [8] e Imshenieski [14] lograron generalizar y puntualizar los resultados de Newton y Bertrand.

En 1890, N. E. Jouovski, aplicando métodos geométricos construyó el potencial de fuerza para sistemas mecánicos con dos y tres grados de libertad [15], saliendo de trayectorias dadas en el plano o en el espacio (en este último caso como intersección de superficies).

El problema más fundamental fue planteado en el siglo pasado por G. K. Suslov "Construir el potencial de fuerzas de tal manera que para condiciones iniciales arbitrarias se puedan escoger las velocidades iniciales en forma adecuada para que los movimientos siguientes se realicen de acuerdo a integrales parciales dadas".

Suslov dedujo un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con respecto al potencial, para el caso en que la cantidad de integrales parciales dadas es una unidad menor que los grados de libertad del sistema mecánico.

De todos los trabajos realizados en este campo el siglo pasado, sólo son de conocimiento general de los especialistas los resultados de Jouovski y Dainelli (1880) gracias a que ellos son citados en la monografía de Whittaker [33].

Los resultados de V. Szebehely y sus seguidores [31, 5, 6, 23, 16, 32, 3, 13 y otros] junto con los del grupo de A. S. Galiullin [10, 11, 12, 19, 20, 21, 7, 28, 29 y otros] han dado un gran desarrollo a las ideas expuestas en forma global por Suslov.

Un problema más general, en su esencia, que el de Suslov es el planteado por Dainelli que consiste en construir un campo de fuerzas, no obligatoriamente conservativo, tal que los desplazamientos de cierto sistema mecánico bidimensional se realizen en el plano de acuerdo a la ley

$$f(x,y) = \text{const.}$$

(Veáse fórmula (2.6)).

La generalización de estas ideas pueden ser realizadas en base a los resultados expuestos en los apartados 1-6 del presente trabajo.

7. Construcción de los campos vectoriales en un entorno de las integrales dadas

Es sabido que la ejecución exacta de órbitas dadas es un problema técnicamente difícil de realizar. Por este motivo es de interés el análisis del problema relacionado con la construcción de modelos matemáticos que permitan, aunque sea en forma aproximada, describir el comportamiento de cierto sistema mecánico ficticio en las cercanías de las trayectorias dadas. Este es el objetivo del presente apartado.

Construiremos el campo vectorial v^* que deberá satisfacer la condición de que en las órbitas dadas deberá coincidir con el campo v construido en los apartados anteriores.

Llamaremos a v^* y v campo perturbado y no perturbado respectivamente.
Este problema lo estudiaremos de los siguientes puntos de vista.
Enfoque I. Perturbando las ecuaciones que genera v.
Enfoque II. Perturbando el polinomio (1.13)

Enfoque I.

Supongamos que las integrales dadas son las siguientes

$$\begin{cases} f_\alpha(x_1,\dots,x_N) = C_\alpha, & \alpha = \overline{1,M} \\ v(f_\alpha) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Introduciendo las coordenadas

$$\begin{cases} y_\alpha = f_\alpha, & \alpha = \overline{1,M} \\ y_{M+i} = x_{M+i}, & i = \overline{1,N-M}, \end{cases} \tag{7.2}$$

obtenemos que las ecuaciones que genera el campo v se pueden obtener como restricción de las ecuaciones que genera el campo

$$v^* = \sum_{\alpha=1}^{M} \phi_\alpha\, \partial_{y\alpha} + \sum_{i=1}^{N-M} \lambda_{M+i}(y_1,\dots,y_M,y_{M+1},\dots,y_N)\tau_i^*, \tag{7.3}$$

donde ϕ_α son funciones analíticas arbitrarias de las variables

$$\omega_\alpha = y_\alpha - y_\alpha^0, \tag{7.4}$$

y que cumplen la condición

$$\phi_\alpha(0) = 0, \tag{7.5}$$

es decir,

$$\phi_\alpha = a_1\omega_\alpha + a_2\omega_\alpha^2 + \cdots\ . \tag{7.6}$$

Con respecto a $\lambda_{M+1},\dots,\lambda_N$, utilizando su arbitrariedad, vamos a exigir que también sean analíticas con respecto a ω. De las igualdades

$$y_\alpha = \omega_\alpha + y_\alpha^0, \qquad \alpha = \overline{1,M},$$

se desprende que

$$\lambda_{M+i} = \lambda_{M+i}(y_1^0 + \omega_1,\dots,y_M^0 + \omega_M, y_{M+1},\dots,y_N). \tag{7.7}$$

Por tanto

$$\begin{cases} \lambda_{M+i} = \lambda_{M+i}(y_1^0, \dots, y_M^0, y_{M+1}, \cdots, y_N) + \sum_\alpha b_{\alpha i}\omega_\alpha + \cdots \\ \qquad = \lambda_{M+i}^0 + \sum_\alpha b_{\alpha i}\omega_\alpha + \cdots, \\ b_{\alpha i} = b_{\alpha i}(y_1^0, \dots, y_M^0, y_{M+1}, \dots, y_N) = \left.\dfrac{\partial \lambda_{M+i}}{\partial \omega^\alpha}\right|_{\omega^\alpha = 0}. \end{cases} \tag{7.8}$$

Colocando (7.6), (7.8) en (7.3) obtenemos que

$$v^* = \sum_{i=1}^{N-M} \lambda_{M+i}^0 \tau_i^0 + \omega \ell_1 + \ldots = v + \omega \ell_1 + \cdots, \tag{7.9}$$

donde $\lambda_{M+i}^0 \tau_i^0$ son los campos construidos en el apartado 1.

Hacemos notar que las funciones ϕ_α introducidas, con las características anotadas, se conocen en la literatura matemática como funciones de Eruguin [10, 9].

EJEMPLO. El campo v^*:

$$\begin{cases} v^*(y_1) = \left(1 + y_1^2\right)^{-1/2} \cdot \lambda_2(y_1, y_2, y_3^0) + \ell_1\omega + \ldots \\ v^*(y_2) = y_1^{-1} \cdot \lambda_3(y_1, y_2, y_3^0) + \hat{\ell}_1\omega + \ldots \\ v^*(y_0) = \tilde{\ell}_1\omega + \ldots, \end{cases} \tag{7.10}$$

es el perturbado del campo v que genera las ecuaciones (3.16).

Enfoque II.

Designaremos por medio de $\phi_1, \dots, \phi_M$ las funciones de Eruguin:

$$\hat{\xi}_\alpha(\tau) = \phi_\alpha(\omega), \qquad \omega = f_\alpha - C_\alpha.$$

Plantearemos el siguiente

Problema 3 (problema 2 perturbado).

Encontrar

$$\underset{\tau}{\text{extremo}}\, p_\alpha(\tau, \tau),$$

bajo las condiciones

$$\begin{cases} \tau^2 = 1 \\ \hat{\xi}_\alpha(\tau) = \phi_\alpha(\omega), \qquad \omega_\alpha = f_\alpha - C_\alpha, \end{cases}$$

donde $p_\alpha(v,v)$ es el funcional definido en (1.5).

Aplicando los métodos usuales obtenemos las siguientes condiciones

$$\begin{cases} B_{\alpha,n,m}\,\tau^m + 1/2q\,\xi_{\alpha,n} = 0 \\ \xi_{\alpha,m}\,\tau^m = \emptyset_\alpha(\omega), \end{cases} \tag{7.11}$$

donde (B_α) son las matrices introducidas en la fórmula (1.9).

Utilizando la arbitrariedad de las funciones ϕ_α supondremos formalmente que

$$\phi_\alpha = -q\epsilon_\alpha, \tag{7.12}$$

donde $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_M$ son funciones de Eruguin.

De (7.11) y (7.12) obtenemos que la primera es equivalente a escribir

$$\begin{pmatrix} K_{\alpha,1,1}+\nu_\alpha & K_{\alpha,1,1} & \ldots & K_{\alpha,n,1} & \xi^1_\alpha \\ K_{\alpha,1,2} & K_{\alpha,2,2}+\nu_\alpha & \ldots & K_{\alpha,n,2} & \xi^2_\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ldots & K_{\alpha,n,n}+\nu_\alpha & \xi^n_\alpha \\ \xi^1_\alpha & & \ldots & \xi^n_\alpha & \epsilon_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^1 \\ \\ \vdots \\ \tau^N \\ q \end{pmatrix} = 0. \tag{7.13}$$

Por lo tanto se debe cumplir que

$$\det(P_\alpha) + \epsilon_\alpha \det B_\alpha = 0, \qquad \alpha = \overline{1,M}, \tag{7.14}$$

donde P_α y B_α son matrices definidas en la fórmula (1.11), o, lo que es lo mismo,

$$\epsilon_\alpha\nu_\alpha^N + (\epsilon_\alpha a_{n-1} + b_{N-1})\nu_\alpha^{N-1} + \cdots + \varepsilon_\alpha K_\alpha + R_\alpha = 0. \tag{7.15}$$

De (7.15) se deduce que las raíces ν_α pueden ser representadas como sigue

$$\nu_\alpha = \nu^0_\alpha + \nu^1_\alpha \cdot \epsilon_\alpha + \cdots, \tag{7.16}$$

donde ν^0_α es raíz del polinomio (1.13).

Colocando (7.16) en (7.15) y considerando éstas últimas como polinomio con respecto a las funciones arbitrarias ϵ_α, obtenemos $\nu^0_\alpha, \nu^1_\alpha, \ldots$ y por consiguiente ν_α.

Si designamos por medio de τ^*_i los campos que corresponden a ν_{α_i}, $i = \overline{1,N}$, obtenemos, de (7.11) y (7.12) y bajo la condición

$$\det(B_\alpha) \neq 0, \tag{7.17}$$

que

$$\begin{cases} \tau^*_i(x^k) = -1/2q_i \sum B^{km}_\alpha G_{mn}\xi^n_\alpha \\ i = \overline{1,N}, \end{cases} \tag{7.18}$$

donde $B_{\alpha,k,m}$ son los componentes de B^{-1}_α. La prueba de esta afirmación es análoga a la demostración del Teorema 1.1.

Consecuencia 7.1. Si las raíces ν_{α_i} y ν_{α_j} son diferentes, entonces los campos τ_i^* y τ_j^* que les corresponden son ortogonales si se cumple (7.12).

En realidad, de (7.11) se tiene que

$$\begin{cases} K_\alpha(\tau_i^*, \tau_j^*) + \nu_{\alpha_i} G(\tau_i^*, \tau_j^*) = -\frac{1}{2} q_i \hat{\xi}_\alpha(\tau_j^*) \\ K_\alpha(\tau_j^*, \tau_i^*) + \nu_{\alpha_j} G(\tau_i^*, \tau_j^*) = -\frac{1}{2} q_j \hat{\xi}_\alpha(\tau_i^*). \end{cases} \tag{7.19}$$

Como

$$K_\alpha(\tau^* i, \tau_j^*) \equiv \sum_{n,m} K_{\alpha,n,m} \tau_i^{*n} \tau_j^{*m} = K_\alpha(\tau_j^*, \tau_i^*),$$

entonces de (7.19) se deduce que

$$G(\tau_i^*, \tau_j^*)(\nu_{\alpha_j} - \nu_{\alpha_i}) = q_i \hat{\xi}_\alpha(\tau_j^*) - q_j \hat{\xi}_\alpha(\tau_i^*),$$

la cual, en base a (7.12) toma la forma

$$G(\tau_i^*, \tau_j^*)(\nu_{\alpha_j} - \nu_{\alpha_i}) = 0,$$

de donde resulta lo que se exige.

Consecuencia 7.2. Los coeficientes q_i en (7.18) deben satisfacer las igualdades

$$\begin{cases} q_i \left(\sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha^{nm} \xi_{\alpha,m} \xi_{\beta,n} + \epsilon_\beta \right) = 0, \qquad \beta = \overline{1, M},\ i = \overline{1, N} \\ G(\tau_i^*, \tau_i^*) = 1. \end{cases} \tag{7.20}$$

Introduciendo

$$v^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^* \tau_i^*, \tag{7.21}$$

obtenemos, de (7.18), que v^* se puede respresentar como sigue

$$v^* = v + \sum_{\alpha=1}^{M} \epsilon_\alpha W_\alpha + \cdots, \tag{7.22}$$

donde v es el campo construido en el apartado 1 tal que

$$v^*\big|_{\epsilon_\alpha = 0} = v,$$

y W_α son campos adecuados.

EJEMPLO. Construiremos, usando el enfoque II, el campo perturbado v^* al campo v del ejemplo dado en el apartado 4.

Como se puede probar en tal caso el polinomio (7.16) toma la forma

$$\prod_{i=1}^{N}(\nu + a_i)\left(\frac{a_1^2 x_1^2}{a_1 + \nu} + \cdots + \frac{a_N^2 x_N^2}{a_N + \nu} + \epsilon_1\right) = 0,$$

por tanto si

$$\det B_1 = \prod(\nu + a_i) \neq 0, \tag{7.23}$$

entonces se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^2 x_n^2}{\nu + a_n} + \epsilon = 0, \qquad \epsilon \equiv \epsilon_1,$$

o, lo que es lo mismo (véase fórmula (7.16)),

$$\sum \frac{(a_n x_n)^2}{a_n + \nu^0 + \nu^1 \epsilon + \cdots} + \epsilon = 0$$

de donde se deduce que

$$\sum \frac{(a_n x_n)^2}{\nu^0 + a_n} + \epsilon\left(1 - \nu^1 \sum \left(\frac{a_n x_n}{a_n + \nu^0}\right)^2\right) + \cdots = 0,$$

es decir

$$\begin{cases} \sum \dfrac{(a_n x_n)^2}{\nu^0 + a_n} = 0 \\ 1 - \nu^1 \sum \left(\dfrac{a_n x_n}{a_n + \nu^0}\right)^2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{7.24}$$

Por consiguiente las raíces (7.16) se escriben de la siguiente manera

$$\nu = \nu^0 + \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{a_n x_n}{\nu^0 + a_n}\right)^2\right)^{-1} \cdot \varepsilon,$$

donde ν^0 satisface

$$\sum \frac{(a_n x_n)^2}{\nu^0 + a_n} = 0.$$

Si se cumple (7.23), obtenemos de (7.18) que

$$\tau_i^* = \sum_n \left(\sum_n \left(\frac{a_n x_n}{a_n + \nu_i} \right)^2 \right)^{-1} \cdot \frac{a_n x_n}{a_n + \nu_i} \partial_n, \tag{7.25}$$

donde

$$\nu_i = \nu_i^0 + \epsilon / \sum \left(\frac{a_n x_n}{\nu_i^0 + a_n} \right)^2 + \cdots . \tag{7.26}$$

De (7.25) resulta que

$$\tau_i^* = \tau_i^0 - \epsilon W_i + \cdots ,$$

donde $\tau_i^0 = \tau_i^*\big|_{\epsilon=0}$

$$W_i = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(a_n x_n)^2}{(\nu_i^0 + a_n)^2} \right) \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k x_k}{(a_n + \nu_i^0)^2} \partial_k + \sum_n \frac{(a_n x_n)^2}{a_n + \nu_i^0} \sum_k \frac{a_k x_k}{a_k + \nu_i^0} \partial_k .$$

El campo v^* finalmente toma la forma

$$v^* = v + \sum \left(- \lambda_i W_i \right) \epsilon + \cdots .$$

Agradecimientos a los miembros del seminario que dirige el profesor Carles Simó por la atención prestada al presente trabajo.

Bibliografía

1. V. I. Arnold, Sobre la topología de los flujos estacionarios tridimensionales de un líquido ideal, *PMM* **1** (1966), 184–186 (en ruso).
2. M. J. Bertrand, Sur la possibilité de deduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction, *C. R. Acad. Sci. Paris* **9** (1877).
3. G. Bozis, Generalization of Szebehely's equations, *Celest. Mech.* **29** (1983), 329.
4. G. Bozis, Szebehely's inverse problem for finite symmetrical material concentrations, *Astron. Astrophys.* **134** (1984), 360.
5. R. Broucke and H. Lass, On Szebehely's equation for the potential of a prescribed family of orbits, *Celest. Mech.* **16** (1977), 215–225.
6. R. Broucke, On the construction of a dynamical system from a preassigned family of solutions, *Int. J. Eng. Sci.* **12** (1979), 1151.
7. T. F. Bulatskaia, Determination of force functions from given properties of motion, *Diff. Equat.* **13** (1977), 1222.
8. M. G. Darboux, Recherche de la loi que doit suivre une force centrale pour que la trajectorie qu'elle determine soit toujours une conique, *C. R. Acad. Sci. Paris* **16** (1877).

9. N. P. Eruguin, Construction of the totality of systems of differential equations, possessing given integral curve, *PMM* **16** (1952), 659–670.
10. S. S. Galiullin, *Problemas Inversos de la Dinámica*, Nauka, Moscow, 1981.
11. A. S. Galiullin, Construction of a field of forces by a given family of trajectories, *Diff. Equat.* **17** (1981), 1487–1489.
12. A. S. Galiullin, *Methods of Solution of Inverse Problem of Dynamics*, Nauka, Moscow, 1986.
13. F. González-Gascón, A. González-López and P. J. Pascual-Broncano, On Szebehely's equation and its connection with Dainelly's-Whittaker's equations, *Celest. Mech.* **33** (1984), 85–97.
14. V. G. Imshenieski, Determinación de las fuerzas de un punto que se mueve por una cónica, Exposición en la Sociedad Matemática de Jarkov, 1879, Vol. 1.
15. N. E. Jouscovski, Construcción de las funciones de fuerza en base a una familia de trayectorias dadas, en *Colección de Trabajo de N. E. Jouscovski*, Gostexizdat, 1948, pp. 227–242 (en ruso).
16. A. Melis and B. Piras, An extension of Szebehely's problem, *Celest. Mech.* **32** (1984), 87–92.
17. J. Moser, Various Aspects of integrable Hamiltonian systems, en *Exitos de la Ciencia Matemática*, Vol. 36, 1981 (en ruso).
18. A. Orlov, Construction of a force function with respect to a given family of trajectories, *Diff. Equat.* **19**.
19. A. Orlov, Construcción de un campo de fuerzas en base a integrales parciales dadas, *Rev. Artículos Científico-metodológicos de Mecánica Racional*, **13** (1983), 158–163.
20. A. Orlov and R. Ramírez, On the construction of the potential function from a preassigned family of particular integrals, *Hadronic Journa* **6** (1983), 1705–1711.
21. A. Orlov and R. Ramírez, Construcción de funciones potenciales en la mecánica, *Rev. Métodos Numéricos en los Problemas de la Física Matemática*, (1985), 67–69 (en ruso).
22. A. Pars, *Dinámica Analítica*, Nauka, Moscow, 1971 (en ruso).
23. F. Puel, Formulation intrensèque de l'equation de Szebehely, *Celest Mech.* **32** (1984), 209–216.
24. Rafael Ramírez, On the construction of a force function with respect to given particular integrals, *Diff. Equat.* **19** (1983), 976–984.
25. Rafael Ramírez and Rodrigo Martínez, Construction of field forces from given partial integrals, *Hadronic Journal* **12** (1989).
26. Rafael Ramírez and Natalia Sadovskaia, Construcción de campos vectoriales, Preprint.
27. Rafael Ramírez, Sobre un problema inverso en la dinámica de un punto, *Rev. Métodos Numéricos en los Problemas de la Física Matemática* (1979) (en ruso).
28. S. G. Shorokhov, Solution of an inverse problem of the dynamics of a particle, *Celest. Mech.* **44** (1988), 193–206.
29. P. S. Singatullin, Reconstruction of the gravitational field determined by the direction field in a three-dimensional Fok's space from some trajectories, *IVUZ FIZ* **26** (1983), 37.
30. G. K. Suslov, *Sobre Potenciales que Permiten Integrales Parciales Dadas*, Kiev, 1890 (en ruso).
31. V. Szebehely, 19 On the determination on the potential, in E. Proverbio (ed.), Proc. Int. Mtg on the rotation of the Earth, Bologna, 1974.
32. F. Váradi and B. Erdi, Existence of the solution of Szebehely's equation in three dimensions using a two-parametric family of orbits, *Celest. Mech.* **30** (1983), 395–405.
33. E. T. Whittaker, *Dinámica Analítica*, ONTI, Moscow–Leningrad, 1937 (en ruso).