Collect. Math. 40, 2 (1989), 127–157

Sobre los sistemas mecánicos con enlaces

Rafael Ramírez

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis, Universidad de Barcelona, 08070 Barcelona, Spain

Received 10/MAY/90

Abstract

A mathematical model is proposed in order to describe the behaviour of mechanical systems with constraints.

Introducción

Posiblemente en los trabajos de Hertz [6], a fines del siglo pasado, aparece por primera vez en la mecánica clásica el concepto de enlace no holonómico o no integrable, el cual, posteriormente, genera una nueva rama de ésta que hoy en día se denomina mecánica de los sistemas no holonómicos o sencillamente mecánica no holonómica (MNH).

El nacimiento de la MNH tuvo lugar cuando el formalismo de Euler-Lagrange fue ineficaz para describir el comportamiento de problemas sencillos como lo es el problema de deslizamiento sin arrastre de un cuerpo duro en el plano. Las contradicciones se acentúan cuando Hertz, en sus investigaciones, coloca en duda la validez del principio de Hamilton para esta nueva clase de sistemas. Cuatro años más tarde Appel [2] afirma que es posible ampliar el campo de acción de este principio a la MNH.

Kirchhoff [8] prueba que todas las dificultades, en la aplicación del principio de Hamilton a la MNH, tienen su origen en las "relaciones de conmutatividad"

$$d\delta x = \delta dx,\ d\delta y = \delta dy,\ d\delta z = \delta dz,\ \delta t = 0. \tag{0.1}$$

donde δ es la variación virtual.

Los investigadores en el campo de la MNH hasta hoy en día no han logrado definir en forma unánime (0.1) (la cual, evidentemente, puede ser generalizada para el caso N dimensional ($N \geq 3$)) [7, 9, 19, 20]. En dependencia de cómo definir (0.1) se obtienen diferentes modelos matemáticos que en forma diferente describen el comportamiento de los fenómenos en estudio.

Uno de los métodos más utilizados en el estudio de los sistemas no holonómicos está relacionado con la posibilidad de enfocar estos sistemas como holonómicos, para lo cual se introducen los multiplicadores de Lagrange. Una identificación de éstos y en este caso no se logra, ya que es imposible interpretar los movimientos de los sistemas no holonómicos como extremales de algún funcional debido a que las variaciones δ deben tener sentido holonómico por un lado, es decir

$$d\delta x - \delta dx = 0, \qquad d\delta y - \delta dy = 0, \qquad d\delta z - \delta dz = 0, \qquad \delta t = 0,$$

y por otro deben satisfacer condiciones de idealidad (condiciones de Appel-Chetaev por ejemplo).

La búsqueda de un método que permita describir el comportamiento de sistemas no holonómicos saliendo de un principio variacional es tema de investigación de matemáticos y mecánicos.

Por ejemplo en [15] se demuestra que las ecuaciones

$$\begin{cases} E_k(L) \equiv \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \partial_k L = \sum \dot{\lambda}_\alpha \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^k} \\ \sum\limits_k \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^k}\delta x^k = 0, \qquad \alpha = \overline{1, M < N}, \quad k = \overline{1, N} \\ L^\alpha = 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

definen las extremales de la acción de Hamilton si y sólo si se cumple que

$$\sum \lambda_\alpha \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L^\alpha}{\partial v^k} - \partial_k L^\alpha\right) = 0. \tag{0.3}$$

Por otro lado en el trabajo [9] se definen las ecuaciones de Lagrange de la "mecánica vaconomna"

$$\begin{cases} E_k(L) = \sum\limits_\alpha \left(\lambda_\alpha E_k(L^\alpha) + \dot{\lambda}_\alpha \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^k}\right) \\ L^\alpha \equiv \sum\limits_k a_k^\alpha(x,t)v^k + b^\alpha(x,t) = 0 \end{cases} \tag{0.4}$$

las cuales coinciden con las ecuaciones (0.2) si y sólo si se cumple (0.3).

En la deducción de estos resultados se supone que las variaciones δ son tales que

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \dfrac{d}{dt}\delta x^k - \delta\dfrac{d}{dt}x^k = 0, \quad k = \overline{1,N} \\ \text{(ii)} \quad \displaystyle\sum_k \left(a_k^\alpha \delta\left(\frac{d}{dt}x^k\right) + \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^k}\delta x^k + \frac{\partial a_j^\alpha}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}\cdot\delta x^j \right) = 0, \quad \alpha = \overline{1,M}. \end{cases}$$

La condición de conmutatividad (i) es aceptada por una gran cantidad de investigadores [11]. En el trabajo que estamos proponiendo, dicha condición se cambia por una más general a nuestro parecer, que consiste en suponer que los campos de velocidades y variaciones no conmutan.

Los científicos rusos Voronés y G. K. Suslov [19, 20] proponen por primera vez un método de variación no conmutativa.

El objetivo del presente capítulo es de construir un modelo matemático que permita describir el comportamiento de sistemas mecánicos saliendo de un principio variacional con variaciones no conmutativas.

1. Elementos de Geometría Diferencial [1]

Sean X una variedad diferenciable de dimensión N y $TX\cdot\mathbb{R} = Y$ su fibrado tangente donde le hemos agregado el espacio "tiempo $\mathbb{R}$".

Las coordenadas locales del punto $p \in Y$ son (x, v, t), donde $t \in \mathbb{R}$, x son las coordenadas de la projección $\Pi(p)$

$$\begin{aligned} \Pi : Y &\longrightarrow X \\ p &\longmapsto \Pi(p) = x, \end{aligned}$$

y finalmente v son las componentes del vector que es tangente a X en x en la base $\left\{\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial_{x^i}}\right\}_{i=1}^N$.

Designaremos por medio de T_pY y T_p^*Y al espacio tangente y cotangente, respectivamente, en el punto p, con bases locales

$$\left\{\partial_{x^1}, \ldots, \partial_{x^N}, \frac{\partial}{\partial v^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v^N}, \partial_t\right\} \qquad \text{para } T_pY,$$

$$\{dx^1, \ldots, dx^N, dv^1, \ldots, dv^N, dt\} \qquad \text{para } T_p^*Y.$$

Designaremos por medio de $\chi(TY)$ y $\Lambda(T^*Y)$ el álgebra de Lie de campos vectoriales en TY y el álgebra de las 1-formas en T^*Y, respectivamente, es decir, si $\xi \in \chi(TY)$ y $\omega \in \Lambda(T^*Y)$ entonces

$$\xi = \sum_k \left(a_1^k \partial_k + a_2^k \frac{\partial}{\partial v^k} + a_3 \partial_t \right) \equiv a_1^k \partial_k + a_2^k \frac{\partial}{\partial v^k} + a_3 \partial_t,$$

$$\omega = \sum_k \left(\gamma_k dx^k + \gamma_2^n dr^k + \gamma_3 dt \right) \equiv \gamma_{1k} dx^k + \gamma_{2k} dv^k + \gamma_3\, dt,$$

donde $a_i^1, \ldots, a_i^N \in C^r(Y)$, $\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{iN} \in C^r(Y)$, $i = 1, 2, 3$, y $C^r(Y)$ es el anillo de las funciones r veces continuamente diferenciables.

Por medio de $\mathcal{L}_\xi$, i_ξ, d designaremos respectivamente a la derivada de Lie a lo largo del campo ξ, al producto interno y a la derivada externa para los cuales se cumplan las igualdades

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\xi d\omega = d\mathcal{L}_\xi \omega, & \xi \in \xi(TY),\ \omega \in \Lambda(T^*Y) \\ i_\xi\, df = \mathcal{L}_\xi f, & f \in C^r(TY) \\ \mathcal{L}_\xi \omega = i_\xi d\omega + d i_\xi \omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

El conjunto máximo de 1-formas independientes $\{W^k\}$ para las cuales se cumple que

$$i_\xi W^k = 0,$$

se llama asociado con el campo ξ.

La curva $\alpha(s) = \big(x(s), v(s), t(s)\big)$, $s \in [s_1, s_2] \subset \mathbb{R}$, se llama curva integral del campo $\xi \in \chi(TY)$ si para cualquier $s_0 \in [s_1, s_2]$ el vector$\xi\big(\phi(s_0)\big)$ es tangente a la curva $\alpha(s)$ en el punto $\phi(s_0)$.

La expresión analítica de una curva integral es la siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{dx^k}{ds} = \xi(x^k) = a_1^k \\ \dfrac{dv^k}{ds} = \xi(v^k) = a_2^k \\ \dfrac{dt}{ds} = \xi(t) = a_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Consecuencia 1.1. Las soluciones de las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx^k}{dt} = v^k \\ \dfrac{dv^k}{dt} = F^k, \end{cases} \tag{1.3}$$

son proyecciones en X de las curvas integrales del "campo de velocidades" v:

$$v = v^i \partial_i + F^i \frac{\partial}{\partial v^i} + \partial_t. \tag{1.4}$$

La base en T^*Y

$$\begin{cases} \left\{\omega^1, \ldots, \omega^N; \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^N, dt\right\} \\ \omega^i = dx^i - v^i\, dt \\ \varepsilon^i = dv^i - F^i\, dt \end{cases} \tag{1.5}$$

es un sistema asociado con el campo v.

Sea

$$\begin{array}{cccc} \gamma : [t_1, t_2] & \longrightarrow & Y \\ t & \longmapsto & \big(x(t), v(t), t\big) \end{array}$$

una curva en Y y sea $\theta \in \Lambda(T^*M)$. Designemos por medio de w al campo vectorial con un grupo uniparamétrico ψ_ε el cual transforma la curva γ en γ_ε por medio de la fórmula

$$\gamma_\varepsilon = \psi_\varepsilon \circ \gamma.$$

Introduzcamos el funcional

$$\phi(\gamma_\varepsilon) = \int_{\gamma_\varepsilon} \theta. \tag{1.6}$$

Como es sabido la igualdad

$$\frac{d}{d_\varepsilon} \phi(\gamma_\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_\gamma \mathcal{L}_w \theta = 0, \tag{1.7}$$

es la condición necesaria para que el funcional $\phi(\gamma)$ tenga valores estacionarios [3]. Llamaremos campo de variaciones isoscrónicas a un campo vectorial para el cual se tiene que

$$w(t) = 0.$$

De ahora en adelante vamos a suponer que el campo w para el cual se cumple (1.7) es isoscrónico.

Para finalizar este apartado hacemos notar que todos estos conceptos y afirmaciones se pueden generalizar en cuasicoordenadas $(\pi^1, \ldots, \pi^N)$ para las cuales se tiene que

$$\begin{cases} \partial_a = W_a^k \dfrac{\partial}{\partial x^k} \equiv W_a^k \partial_k \\ \left[\partial_a, \partial_b\right] \equiv \partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a = C_{ab}^e \partial_e. \end{cases} \tag{1.9}$$

2. Sobre el principio de Hamilton con variaciones no conmutativas

De acuerdo con el principio de la acción estacionaria de Hamilton, para los desplazamientos reales (movimientos) de los sistemas dinámicos se cumple la ecuación

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0,$$

donde δT es la variación virtual de la energía cinética del sistema, y δA es el trabajo virtual (elemental) de las fuerzas actuantes. Este principio se formula para los sistemas holonómicos. Sobre la posible aplicación de este principio a los sistemas no holonómicos no existe un enfoque unánime.

En la realización del artículo que proponemos han ejercido gran influencia los artículos [19, 20].

Introduciremos previamente los siguientes conceptos y definiciones.

DEFINICIÓN 2.1. A los campos $v \in \chi(TY)$ y $w \in \chi(TY)$, tales que

$$\begin{cases} v = v^i \partial_i + F^i \dfrac{\partial}{\partial^i v^i} + \partial_t \\ w = w(x^i)\partial_i + w(v^i)\dfrac{\partial}{\partial v^i}, \end{cases} \tag{2.1}$$

les llamaremos Υ simétricos si se cumple que

$$[w, v] = \Upsilon \in \chi(T(Y)). \tag{2.2}$$

Designaremos por medio de $L_1, \ldots, L_M \in C^r(Y)$ a las funciones tales que

$$\begin{cases} L = \sum_{\alpha=0}^{M} \lambda_\alpha L_\alpha, \qquad M \leq N, \ L \in C^r(Y) \\ \theta = \dfrac{\partial L}{\partial v^k}(dx^k - v^k dt) + L\, dt \subset \Lambda(T^*Y), \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\lambda_0, \ldots, \lambda_M \in C^r(Y)$ son ciertas funciones (multiplicadoras de Lagrange). La forma θ se llama forma de Cartan, la cual, en nuestro caso, se puede representar como sigue

$$\theta = \sum_\alpha \left(\lambda_\alpha \theta_\alpha + L_\alpha \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial v^k} \omega^k \right),$$

donde $\theta_\alpha \in \Lambda(T^*Y)$:

$$\theta_\alpha := \frac{\partial L_\alpha}{\partial v^k}\,\omega^k + L_\alpha\, dt.$$

Evidentemente se tiene que

$$i_v\theta = L, \qquad i_w\theta = \frac{\partial L}{\partial v^k}\,\omega^k. \tag{2.3}$$

Se puede probar la identidad

$$\mathcal{L}_\xi i_v(\theta) = i_v\, d i_w\theta + i_\Upsilon\theta + i_v i_w\, d\theta. \tag{2.4}$$

Introduzcamos la 1-forma

$$i_w\, d\theta + i_\Upsilon\theta\, dt = \nu \qquad (2.5),$$

entonces (2.4) se escribe como sigue

$$\mathcal{L}_w i_v\theta = v(i_w\theta) + i_v\nu. \tag{2.6}$$

Definición 2.2. A la función L_α la llamaremos

1) enlace tipo I si se cumple que

$$\begin{cases} i_v\nu_\alpha = 0 \\ \nu_\alpha = i_w d\theta_\alpha + i_\Upsilon\theta_\alpha dt, \end{cases} . \tag{2.7}$$

2) enlace tipo II si

$$i_v\nu_\alpha = v(\varphi_\alpha). \tag{2.8}$$

Definición 2.3. Si L_α es tal que se cumple (2.7) y además se tiene que

$$i_w\theta_\alpha = 0,$$

entonces al enlace L_α lo llamaremos de Appel-Chetaev. Es claro que en este caso L_α es invariante del campo w.

Definición 2.4. A la terna

$$\mu = \left(X, \phi(\gamma) = \int_\gamma L(\tilde{\gamma})dt, \theta\right),$$

donde $\gamma : [t_0, t_1] \to X$, $\tilde{\gamma} : [t_0, t_1] \to TX \times \mathbb{R} = Y$, la llamaremos sistema mecánico μ si L es enlace tipo II.

Si se cumple que

i) $\theta = dS$, entonces el sistema μ se llamará conservativo, y en caso contrario no conservativo.

ii) si $L(t, x, v) = L(t + t_0, x, v)$, para cualquier t_0 real, entonces el sistema μ se llamará estacionario.

Teorema 2.1

Sea μ un sistema mecánico dado. Supongamos que se cumple que

$$i_w\theta + \psi_\alpha\Big|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{2.9}$$

entonces la igualdad

$$\int_\gamma \mathcal{L}_w(L\,dt) = 0 \tag{2.10}$$

se cumple si y sólo si

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(i_\Upsilon\theta - E_k(L)w^k\right)dt = 0, \tag{2.11}$$

donde

$$E_k(L) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^k} - \partial_k L.$$

A este teorema lo llamaremos principio Υ.

DEFINICIÓN 2.5. Las ecuaciones diferenciales

$$D_\nu(x, v, \dot{v}, t) = 0, \qquad \nu = \overline{1, S} \leq N, \tag{2.12}$$

que son consecuencia de (2.11) les llamaremos ecuaciones de movimiento del sistema μ.

DEFINICIÓN 2.6. A los sistemas μ y μ^* tales que

$$\mu^* = \left(X, \varphi^*, \theta^*\right), \qquad \mu = \left(X, \varphi, \theta\right),$$

los llamaremos dinámico equivalentes si se cumple que [11]

$$\begin{cases} D_\nu^* = B_\nu^\alpha D_\alpha \\ \det(B_\nu^\alpha) \neq 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

donde $D_\nu^* = 0$, $D_\nu = 0$ son las ecuaciones de movimiento.

Consecuencia 2.1. Supongamos que el campo Υ es tal que

$$\Upsilon(x^k) = R_n^k\, w^n, \tag{2.14}$$

entonces de (2.11) se deducen las igualdades

$$D_k \equiv E_k(L) - R_k^n \frac{\partial L}{\partial v^n} \equiv D_k(L) = 0. \tag{2.15}$$

Consecuencia 2.2. Supongamos que L es tal que

$$L = L_0 + \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha L_\alpha,$$

donde

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial v^k}\right) = M \qquad \text{y} \qquad \det\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial v^k \partial v^i}\right) \neq 0.$$

Si $L_1, \ldots, L_M$ son enlaces tipo Appel-Chetaev entonces se tiene que

$$D_k(L_0) + \sum_\alpha \left(\dot\lambda_\alpha \frac{\partial L_\alpha}{\partial v^k} + L_\alpha D_k(\lambda_\alpha) + \dot L_\alpha \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial v^k}\right) = 0 \tag{2.16}$$

$$D_k(L_\alpha) = E_k(L_\alpha) - R_k^n \frac{\partial L_\alpha}{\partial v^n} = 0, \qquad \alpha = \overline{1,S},\ k = \overline{1,N}, \tag{2.17}$$

donde $\dot\lambda_\alpha = \dfrac{d}{dt}\lambda_\alpha$.

Sin mayores dificultades de (2.15) se deducen las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot x^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot p_k = -\partial_k H + R_k^n p_n, \end{cases} \tag{2.18}$$

donde

$$H = p_n \dot x^n - L, \qquad p_n = \frac{\partial L}{\partial v^n}.$$

Consecuencia 2.3. Las ecuaciones (2.18) toman forma hamiltoniana si y sólo si $R_k^n p_n = 0$.

En la mecánica de los sistema μ (o sencillamente mecánica μ) se pueden plantear los siguientes problemas.

I. Problema directo. Dado el sistema μ, se exige construir la simetría Υ y las ecuaciones de movimiento $\{D_\nu = 0\}$.

II. Problema inverso. Dadas las ecuaciones diferenciales

$$D_\nu(x, v, \dot v, t) = 0,$$

se exige construir la simetría Υ y el funcional $\phi(\gamma) = \int_\gamma L dt$.

3. Problema directo de la Mecánica μ

Deduciremos las ecuaciones de movimiento de cierto sistema μ y estableceremos la relación con las ecuaciones clásicas que se describen el comportamiento de diversos fenómenos físicos.

Teorema 3.1

Supongamos que

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial v^k}\right) = N, \tag{3.1}$$

entonces las funciones R_n^k tales que tiene lugar (2.14), se pueden calcular como sigue

$$R_n^k = -\sum_{\alpha=1}^{N} E_n(L_\alpha)T_\alpha^k, \qquad k,n = \overline{1,N}, \tag{3.2}$$

donde

$$E_n(L_\alpha) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\alpha}{\partial v^k} - \partial_k L_\alpha,$$

y $(T_\alpha^k) = T$ es la matriz inversa a la matriz $(\partial L_\alpha/\partial v^k)$.

Consecuencia 3.1. Si tiene lugar (3.2) entonces (2.15) y (2.16) toman, respectivamente, la forma

$$E_k(L) - \sum_{\alpha=1}^{N} E_n(L_\alpha)T_\alpha^k\frac{\partial L}{\partial v^k} = 0, \tag{3.3}$$

$$E_k(L_0) - E_n(L_\alpha)\frac{\partial L_0}{\partial v^k}T_\alpha^k + \sum_\alpha \lambda_\alpha W_k^\alpha = 0, \tag{3.4}$$

si $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(t)$.

Supongamos que

$$\begin{cases} \partial_k = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{N} W_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ v^k = v^k(x,\dot{x},t), \\ L_\alpha = \dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}, \qquad L_0 = L_0(x,v,t), \end{cases}$$

donde $(x^1,\ldots,x^N)$ son las coordenades naturales, entonces, en base a la identidad

$$\sum_\alpha T_\alpha^k\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial v^k} - \partial_k\dot{x}^\alpha\right) = -\sum_{\beta=1}^{N}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\Lambda_\beta^\alpha\frac{d}{dt}\frac{\partial v^n}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial v^n}{\partial x^\beta}\right)W_k^\beta = -\upsilon_k^n,$$

se deduce que (3.4) se puede representar en la forma

$$E_k(L_0) + \psi_k^n \frac{\partial L_0}{\partial v^n} + \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha W_k^\alpha = 0, \tag{3.5}$$

donde

$$\Lambda_\beta^\alpha = \sum T_\beta^k W_k^\alpha, \qquad \lambda_\alpha = \lambda_\alpha(t).$$

Consecuencia 3.2. Si se cumple que

$$\Lambda_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 \\ 0, \end{cases}$$

entonces de (3.4) y (3.5) pueden deducirse las ecuaciones de Chapliguin y Voronés-Hammel [9].

Consecuencia 3.3. Si se tiene que

$$\begin{cases} L_\alpha = v^\alpha = \dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}, & \alpha = \overline{1, S} \\ L_\beta = v^\beta = 0, & \beta = \overline{S+1, N}, \end{cases} \tag{3.6}$$

donde $L_\beta = v^\beta$ es enlace de Appel-Chetaev. Entonces de (3.5) se deducen las ecuaciones:

$$D_k \equiv E_k(L_0) + \sum_{n=s+1}^{N} \psi_k^n \frac{\partial L_0}{\partial v^n} + \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha w_k^\alpha = 0. \tag{3.7}$$

Es de interés hacer notar que de la condición de que L_α sea enlace tipo I y L_β sean enlaces de Appel-Chetaev resulta que

$$\begin{cases} w(\dot{x}^n) = \dfrac{d}{dt} w^n, & n = \overline{1, S}, \\ w(\dot{x}^k) - \dfrac{d}{dt} w^k = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} E_j(v^n) w^j, \\ \mathcal{L}_w(v^\beta) = 0. \end{cases}$$

Esta última expresión refleja que bajo nuestro enfoque los enlaces

$$v^{S+1} = \ldots = v^N = 0,$$

son invariantes del campo w.

Si, finalmente, en (3.7) suponemos que

i) $L_\beta = v^\beta = \dot{x}^\beta - \sum a_\nu^\beta \dot{x}^\nu = 0, \qquad \beta = \overline{S+1, N},\ \dot{\lambda}_\alpha = 0,$

ii) $L_\beta = v^\beta = \dot{x}^\beta - \sum a_\nu^\beta \dot{x}^\nu + a^\beta = 0, \qquad \beta = \overline{S+1, N},\ \dot{\lambda}_\alpha = 0,$

entonces de (3.7) se pueden deducir los resultados expuestos en [19, 20].

DEFINICIÓN 3.1. El enlace L_α se llamará de Chaplignin si se cumple que

$$\partial_n W^\alpha = \sum_{j=S+1}^{N}{}' W_n^j \frac{\partial L_\alpha}{\partial x^j} = 0. \tag{3.8}$$

Vamos a analizar el sistema mecánico μ tal que

$$\begin{cases} \operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{x}^k}\right) = S < N, \\ L_\alpha = L_\alpha(x, \dot{x}, t), \qquad \alpha = \overline{1,S}, \; L_\alpha \cdot \dot{\lambda}_\alpha = 0 \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^j}\right) \equiv \det(G_{k_j}) \neq 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

donde $\dot{x}^k = v^k$, y $x^1, \ldots, x^N$ son coordenadas naturales.

Vamos a suponer que G es una métrica de Finsler, y designaremos por medio de $F_N = (X, G)$ el espacio métrico que ésta genera.

Construiremos los campos vectoriales P_α y e_α de la siguiente forma

$$\begin{cases} P_\alpha = G^{kj} \dfrac{\partial L_\alpha}{\partial v^j} \cdot \partial_k, \qquad P_\alpha(t) = 0 \\ e_\alpha = \dfrac{\xi_\alpha}{|\xi_\alpha|}, \qquad |\xi_\alpha|^2 = G(\xi_\alpha, \xi_\alpha), \end{cases} \tag{3.10}$$

donde ξ_α son campos vectoriales definidos como sigue

$$\xi_\alpha = P_\alpha - \sum_{\beta<\alpha}{}' G(P_\alpha, \xi_\beta) \frac{\xi_\beta}{\|\xi_\beta|^2}, \qquad \xi_\alpha(t) = 0.$$

Por lo tanto

$$P_\alpha = \xi_\alpha + \sum_{\beta<\alpha}{}' G(P_\alpha, \xi_\beta) \frac{\xi_\beta}{|\xi_\beta|^2}. \tag{3.11}$$

Teorema 3.2

Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema μ con enlaces (3.9) se escriben como sigue

$$E_k(L_0) + \sum \left[\psi_{\alpha k} \Omega_\alpha - \dot{\lambda}_\alpha P_{\alpha^k}\right] - \Phi_k = 0, \tag{3.12}$$

si $L_\alpha = 0$, donde

$$\begin{cases} \psi_\alpha = E_j(L_\alpha) G^{jk} \partial_k - \sum\limits_{\beta<\alpha} G(P_\alpha, e_\beta) \psi_\beta, \\ \Omega_\alpha = i_{e_\alpha}(\theta_0) = e_\alpha^k \dfrac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^k}, \qquad \alpha = \overline{1,S}, \end{cases} \tag{3.13}$$

y $\varphi, \ldots, \phi_N$ son ciertas funciones arbitrarias.

Demostración. En efecto, colocando (3.11) en (2.17) obtenemos que

$$R_k^n e_{\alpha n} = -\psi_{\alpha k},$$

por consiguiente se puede afirmar que

$$R_k^n = -\sum_\alpha \psi_{\alpha k} e_\alpha^n + T_k^n, \tag{3.14}$$

donde

$$T_k^n e_{\alpha^n} = 0. \tag{3.15}$$

Designando por medio de $\phi_1, \ldots, \phi_k$ a las expresiones

$$T_k^n \frac{\partial L_0}{\partial v^n} = \phi_k$$

obtenemos lo que se exige. □

Consecuencia 3.4. Las ecuaciones (2.15) para (3.9) toman la forma:

$$E_k(L) - \sum_\alpha \psi_{\alpha k} (\Omega_\alpha + \lambda_\alpha) - \phi_k = 0, \tag{3.16}$$

si $L_\alpha = 0$.

Consecuencia 3.5. Si los enlaces L_α son de Appel-Chetaev y además se tiene que

$$\begin{cases} L_\alpha = 0, \qquad \alpha = \overline{1, S} \\ \dot{x}^k \dfrac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{x}^n} = \nu L_\alpha, \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^k} = G_{k,} \dot{x}^j, \end{cases} \tag{3.17}$$

de (3.12) y (3.16) se deducen las ecuaciones

$$E_k(L_0) - \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha P_{\alpha k} - \phi_k = 0, \tag{3.18}$$

$$E_k(L) - \left(\phi_k + \sum_\alpha \lambda_\alpha \psi_{\alpha k}\right) = 0. \tag{3.19}$$

Por consiguiente, resulta que si

$$\phi_1 = \cdots = \phi_N = 0, \tag{3.20}$$

entonces (3.18) coinciden con las ecuaciones clásicas que describen el comportamiento de sistemas mecánicos no holonómicos con enlaces descritos en la consecuencia 3.5.

Las ecuaciones (3.12) son aplicables a sistemas con enlaces más generales que (3.17), pero en tal caso difieren notoriamente de los modelos clásicos por la presencia del miembro

$$\sum_\alpha \psi_{\alpha k} \Omega_\alpha ,$$

el cual influye fuertemente debido a su dependencia de las segundas derivadas $(\ddot{x}^1, \ldots, \ddot{x}^N)$. Para poder resolver (3.12) con respecto a las aceleraciones, es necesario exigir que

$$\det\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^n} + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^n}(\lambda_\alpha L_\alpha)\right) \neq 0.$$

Es de interés hacer notar que en la mecánica no holonómica se conocen sólo enlaces homogéneos con respecto a las velocidades.

Consecuencia 3.6. Las ecuaciones

$$\begin{cases} E_k(L_0) - \sum_\alpha \dot{\lambda}_\alpha P_{\alpha k} = 0, \\ L_\alpha = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

toman la forma lagrangiana si y sólo si

$$\sum_{\alpha=1}^{S} \lambda_\alpha \psi_{\alpha k} = 0, \qquad k = \overline{1, N}. \tag{3.23}$$

La prueba se obtiene de (3.18), (3.19).

Hacemos notar que este resultado es una ampliación del expuesto en [9, 15].

Ilustraremos las afirmaciones hechas en el siguiente ejemplo.

Dado el sistema mecánico $\mu = (E^3, \phi(\gamma), \theta)$, donde

$$\phi(\gamma) = \int_\gamma \left[m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \lambda_1(\dot{z} - ar) - mgz\right] dt,$$

$$\theta = \left(m\dot{x} - \frac{\lambda_1 a\dot{x}}{r}\right)dx + \left(m\dot{y} - \frac{\lambda_1 a\dot{y}}{r}\right)dy + (m\dot{z} + \lambda_1)dz$$
$$- \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz\right)dt,$$

se trata de construir las ecuaciones de movimiento y los componentes del campo $\Upsilon(x^k)$ si se sabe que

$$1)\ \lambda = -\frac{mgt}{1+a^2} - \frac{mL_1}{1+a^2}$$
$$2)\ L_1 = \dot{z} - ar = 0,$$

es enlace de Appel-Chetaev, donde $r = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.

Solución. Como se puede demostrar las ecuaciones (3.18), (3.10) en este caso toman la forma, respectivamente,

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{ag\dot{x}}{(1+a^2)r} + \dfrac{1}{m}\phi_1 \\ \ddot{y} = -\dfrac{ag\dot{y}}{(1+a^2)r} + \dfrac{1}{m}\phi_2 \\ \ddot{z} = +\dfrac{a^2 g}{1+a^2} + \dfrac{1}{m}\phi_3 \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \phi_1 - \dfrac{agt}{1+a^2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{x}}{r}\right) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \phi_2 - \dfrac{agt}{1+a^2}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{y}}{r}\right) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \dfrac{\partial L}{\partial z} = \phi_3, \end{cases} \tag{3.25}$$

donde $L_1 = \dot{z} - ar = 0$.

Si suponemos que en (3.25) se cumple que

$$\begin{cases} \phi_k - agt\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{x}_k}{r}\right) = 0, \qquad k = 1,2 \\ \phi_3 = 0, \end{cases} \tag{3.26}$$

entonces las ecuaciones (3.24) describen el comportamiento del móvil de Appel para el cual se realiza el enlace $L_1 = \dot{z} - ar = 0$ que es el único enlace no lineal conocido en la mecánica no holonómica.

Consecuencia 3.7. Las ecuaciones (3.24), cuando $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$, se pueden representar en forma lagrangiana con L:

$$\begin{cases} L = \dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \dfrac{m(gt + L_1)}{1 + a^2} L_1 - mgz \\ L_1 = \dot{z} - ar = 0. \end{cases}$$

De (3.25), bajo las condiciones indicadas, se obtienen las siguientes integrales primeras

$$\begin{cases} \dot{x}\left(m + \dfrac{agt}{(1+a^2)r}\right) = c_1 \\ \dot{y}\left(m + \dfrac{agt}{(1+a^2)r}\right) = c_2 \\ \dot{z}\left(m - \dfrac{mgt}{(1+a^2)}\right) - mgt = c_3 \end{cases}$$

a las cuales cabe añadir el enlace $L_1 = \dot{z} - a\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0$.

El móvil de Appel ha sido analizado en particular en los trabajos [11, 13, 15].

Otro caso de interés que se obtiene como consecuencia de lo expuesto, resulta cuando

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_\alpha = 0 \\ \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \ldots = \dot{\phi}_N = 0 \\ \lambda_\alpha + \Omega_\alpha = 0, \end{cases}$$

es decir, cuando (3.12), que bajo dichas restricciones toma la forma

$$E_k(L_0) + \sum_\alpha \psi_{\alpha k}\lambda_\alpha = 0, \tag{3.27}$$

se puede representar como sigue

$$E_k(L) = 0, \tag{3.28}$$

donde

$$L = L_0 + \sum_{\alpha=1}^{S} \lambda_\alpha L_\alpha, \qquad \lambda_\alpha = \text{const}.$$

De las ecuaciones (3.27), o lo que es lo mismo, (3.28), se deducen las ecuaciones de Kelvin-Tet-Rauth.

Para finalizar hacemos notar que las ecuaciones de los sistemas conservativos se pueden escribir de la forma lagrangiana, ya que de la igualdad

$$\theta = d\psi$$

se deduce que $i_\Upsilon\theta = \mathcal{L}_\Upsilon\psi = 0$. Por consiguiente si el sistema μ es conservativo entonces la función generatriz υ es invariante del campo Υ.

4. Problema inverso en la Mecánica μ

En la literatura científica se da el nombre de problema inverso del cálculo variacional o problema inverso en la mecánica de Newton al problema de construcción de funcionales que toman valores estacionarios en las soluciones de ecuaciones diferenciales dadas [14]. En este tipo de problemas se exige determinar las condiciones bajo las cuales las ecuaciones dadas

$$D_r(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0,$$

son consecuencias de la igualdad

$$\int_\gamma \mathcal{L}_w(L dt) = 0,$$

donde w es campo de variaciones, para el cual se supone que

$$[w, v] = 0,$$

es decir, w y v son Lie simétricos, y $(x^1, \dots, x^N)$ son las coordenadas naturales.

El enfoque de este tipo de problema en la mecánica μ se generaliza como sigue.

Dadas las ecuaciones diferenciales del segundo orden

$$D_r(x, v, \dot{v}, t) = 0, \qquad \nu = \overline{1, S} \leq N, \tag{4.1}$$

donde $(x^1, \dots, x^N)$ son cuasicoordenadas y $(v^1, \dots, v^N)$ cuasivelocidades, se exige determinar las condiciones bajo las cuales (4.1) es consecuencia del principio Υ, es decir, es consecuencia de la igualdad

$$\int_\gamma \mathcal{L}_w(\theta(v)dt) = \int_\gamma \mathcal{L}_w(L\, dt) = 0, \tag{4.2}$$

donde w y v son campos vectoriales Υ simétricos, es decir

$$[w, v] = \Upsilon. \tag{4.3}$$

Aunque el problema planteado se puede resolver en cuasicoordenadas, para mayor comodidad lo estudiaremos sólo en coordenadas naturales. La solución general se obtiene en forma análoga, teniendo siempre en cuenta las expresiones (1.9). El resultado final lo obtenemos como consecuencia de las siguientes afirmaciones.

Sean $\Upsilon(x)$ y $\Upsilon(\dot{x})$ los componentes del campo vectorial Υ tales que

$$\begin{cases} \Upsilon(x) = Rw(x) \\ \Upsilon(\dot{x}) = (A - R)\dfrac{d}{dt}w(x) + \left(B - \dfrac{d}{dt}R\right)w(x), \end{cases} \tag{4.4}$$

donde R, A, y B son ciertas matrices que se definirán más adelante. De (4.3) y (4.4) se deduce que

$$\begin{cases} w(\dot{x}) = \dfrac{d}{dt}w(x) + Rw(x) \\ w(\ddot{x}) = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(w(x)\right) + A\dfrac{d}{dt}w(x) + Bw(x) \end{cases} \tag{4.5},$$

Lema 4.1

Sean $F_j \in C^\infty\Big(T\big(T(X)\big) \times \mathbb{R}\Big)$, entonces se tiene que

$$\mathcal{L}_w(F_j) = G_0 w(x) + G_1\dot{w}(x) + G_2\ddot{w}(x), \tag{4.6}$$

donde G_0, G_1, G_2 son matrices tales que

$$\begin{cases} G_{0,k,j} = \partial_j F_k + R_j^n \dfrac{\partial F_k}{\partial \dot{x}^n} + B_j^n \dfrac{\partial F_k}{\partial \ddot{x}^n} \\ G_{1,k,j} = \dfrac{\partial F_k}{\partial \dot{x}^j} + \dfrac{\partial F_k}{\partial \ddot{x}^n} A_j^n \\ G_{2,k,j} = \dfrac{\partial F_k}{\partial \ddot{x}^j}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Introduzcamos las siguientes designaciones

$$\begin{cases} \phi = G_2 - G_2^T, & H = G_1 - \dot{G}_2, & Y = G_0 - (1/2)\ddot{H} \\ Q_2 = G_2^T, & Q_1 = \left(\dot{G}_2 - H\right)^T, & Q_0 = G_0 - \dot{H}^T, \end{cases} \tag{4.8}$$

donde T es el operador de trasposición.

Lema 4.2

Sean M_i y M_i^* las formas variacionales tales que

$$
\begin{cases}
M w(x) = G_0 w(x) + G_1 \dot{w}(x) + G_2 \ddot{w}(x) \\
M^* w(x) = Q_0 w(x) + Q_1 \dot{w}(x) + Q_2 \ddot{w}(x).
\end{cases}
\tag{4.9}
$$

Entonces tiene lugar la identidad de Lagrange

$$
(M w, w) = (M^* w, w) + \frac{d}{dt}\Big[(H + \phi)(w, w)\Big],
\tag{4.10}
$$

donde

$$
(M w, w) \equiv (w, M w), \qquad (M^* w, w) \equiv (w, M^* w).
$$

Definición 4.1. A las formas (4.9) las llamaremos conjugadas si se cumple (4.10) y autoconjugadas si se verifica que

$$
M w(x) = M^* w(x)
\tag{4.11}
$$

para cualquier campo w.

Definición 4.2. Las funciones $F_j \in \mathcal{C}^\infty\Big(T\big(T(X)\big) \times \mathbb{R}\Big)$ se llaman autoconjugadas si sus formas variacionales son autoconjugadas. Al anillo de estas funciones lo designaremos por medio de $\mathcal{F}$.

Teorema 4.1

$F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ si, y sólo si, las matrices ϕ, H e Y son tales que

$$
\begin{cases}
\phi = 0 \\
H + H^T = 0 \\
Y - Y^T = 0.
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

La prueba se obtiene de (4.9), (4.10) y (4.11).

Consecuencia 4.1. Las funciones $F_k \in \mathcal{F}$ si, y sólo si se cumplen las condiciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_e}{\partial \ddot{x}^a} = G_{2ea} = G_{ea}, \qquad G_{ea} = G_{ae} \\ \dfrac{\partial F_e}{\partial \dot{x}^a} = \dot{G}_{ea} + H_{ae} - A_{ae}, \qquad H_{ae} = -H_{ea} \\ \partial_a F_e = \partial_e F_a + \dot{H}_{ae} + Z_{ae}, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde

$$\begin{cases} A_{ae} = G_{qe} A^q_a, \qquad B_{ae} = G_{qe} B^q_a \\ Z_{ae} = R^q_a \dfrac{\partial F_e}{\partial \dot{x}^q} - R^q_e \dfrac{\partial F_e}{\partial \dot{x}^q} + B_{ae} - B_{ea}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Otra representación equivalente de (4.13) es

$$\begin{cases} G_{ae} = \dfrac{\partial F_e}{\partial \ddot{x}^a} \\ \dot{G}_{ae} = 1/2 \left(\dfrac{\partial F_e}{\partial \dot{x}^a} + \dfrac{\partial F_a}{\partial \dot{x}^e} \right) + 1/2(A_{ae} - A_{ea}). \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\begin{cases} H_{ae} = 1/2 \left(\dfrac{\partial F_e}{\partial \dot{x}^a} - \dfrac{\partial F_a}{\partial \dot{x}^e} \right) + 1/2(A_{ae} - A_{ea}) \\ \dot{H}_{ae} = \partial_a F_e - \partial_e F_a + Z_{ea}, \end{cases} \tag{4.16}$$

Considerando en (4.13) las funciones $F_1, \ldots, F_N$ como funciones de $3N$ variables $(x^1, \ldots, x^N, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^N, \ddot{x}^1, \ldots, \ddot{x}^N)$ se obtiene el siguiente.

Teorema 4.2

Las ecuaciones (4.13) son compatibles si, y sólo si, se cumplen las igualdades

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_{ea}}{\partial \ddot{x}^q} = 0 \\ C_{aeq} = C_{eqa} = C_{qae}, \qquad Caeq \equiv \dfrac{\partial Geq}{\partial \dot{x}^a} \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_{ea}}{\partial \ddot{x}^q} = 0 \\ \dfrac{\partial H_{eq}}{\partial \dot{x}^q} = \dfrac{\partial Z_{ea}}{\partial \ddot{x}^q} + \partial_a G_{eq} - \partial_e G_{qa} \\ \partial_e H_{aq} + \partial_a H_{qe} + \partial_q H_{ea} = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Las pruebas de estas afirmaciones se obtienen después de ciertas manipulaciones.

Consecuencia 4.2. Si $F_e \in \mathcal{F}$ entonces es representable de la forma

$$F_e = G_{ea}\ddot{x}^a + H_{ae}\dot{x}^a + \phi_e, \tag{4.19}$$

donde $\phi_1, \ldots, \phi_N$ son funciones tales que

$$d\phi_e = -A_{ae}\, d\dot{x}^a + (\partial_e D_a + Z_{ea})\, dx^a + \partial_t F_e\, dt. \tag{4.20}$$

La prueba se obtiene diferenciando (4.19) en base a (4.13).

Se puede demostrar la siguiente [14].

Consecuencia 4.3. Las funciones G_{ae}, H_{ae}, ϕ_e que satisfacen las relaciones (4.13), (4.17), (4.18) y (4.20) se representan como sigue

$$\begin{cases} G_{ae} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^a \partial \dot{x}^e}, \qquad L \in C^\infty(T(X) \times \mathbb{R}) \\ H_{ae} = \partial_a\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^e}\right) - \partial_e\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) + h_{ae} \\ \phi_e = \partial_e H + \partial_t \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^e} + \partial_t h_e + \varphi_e, \end{cases} \tag{4.21}$$

donde h_{ae}, H, ϕ_e se definen por las fórmulas

$$\begin{cases} hae = \partial_a he - \partial_e ha \\ \dfrac{\partial h_{ae}}{\partial \dot{x}^c} = \dfrac{\partial Z_{ae}}{\partial \ddot{x}^c} \\ H = \dot{x}^k \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - L, \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_e}{\partial \dot{x}^a} = A_{ae} + \dfrac{\partial Z_{ae}}{\partial \ddot{x}^f}\dot{x}^f \\ \partial_a \varphi_e - \partial_e \varphi_a = Z_{ae}, \qquad \varphi_e \in C^\infty(T(X) \times \mathbb{R}). \end{cases} \tag{4.23}$$

De (4.23) se deduce evidentemente que

$$\frac{\partial Z_{ae}}{\partial \ddot{x}^f} = 0 \tag{4.24}$$

por tanto

$$\begin{cases} A_{ae} = -\dfrac{\partial \varphi_e}{\partial \dot{x}^a} \\ \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^q}(Z_{ae}) = \partial_e A_{qa} - \partial_a A_{qe}. \end{cases} \tag{4.25}$$

En base a todas estas afirmaciones finalmente se demuestra el siguiente.

Teorema 4.3

Las funciones $F_k \in \mathcal{F}$ si y sólo si se tiene que

$$F_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^k} - \partial_k \tilde{L} + \varphi_k, \tag{4.26}$$

donde $\tilde{L} = L + \sum h_k(x,t)\dot{x}^k$.

Consecuencia 4.4. Las ecuaciones (4.26) con $F_k = 0$ se deducen del principio Υ si, y sólo si, se cumple que

$$R_k^n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^n} = \varphi_k. \tag{4.27}$$

En realidad, comparando (4.26) con (2.21), obtenemos la validez de la afirmación.

La solución del problema sobre la construcción de la simetría Υ no es única, los componentes se pueden determinar a partir de (4.5), (4.14), (4.24), (4.25) y (4.27), con cierta arbitrariedad.

Consecuencia 4.5. En base a (4.23) y (4.25), las ecuaciones (4.13) pueden representarse de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{F}_e}{\partial \ddot{x}^a} = G_{ea} \\ \dfrac{\partial \tilde{F}_e}{\partial \dot{x}^a} = \dot{G}_{ea} + H_{ae} \\ \partial_a \tilde{F}_e - \partial_e \tilde{F}_a = \dot{H}_{ae}, \end{cases} \tag{4.28}$$

donde

$$\tilde{F}_e = F_e - \varphi_e = \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^e} - \partial_e L.$$

Hacemos notar que las igualdades

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{F}_e}{\partial \ddot{x}^a} = \dfrac{\partial \tilde{F}_a}{\partial \ddot{x}^a} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{F}_e}{\partial \ddot{x}^a} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{F}_e}{\partial \dot{x}^a} + \dfrac{\partial \tilde{F}_a}{\partial \dot{x}^e}\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \tilde{F}_e}{\partial \dot{x}^a} - \dfrac{\partial \tilde{F}_a}{\partial \dot{x}^e}\right) = 2(\partial_a \tilde{F}_e - \partial_e \tilde{F}_a), \end{cases} \tag{4.29}$$

se conocen como leyes de reciprocidad de Helmholtz [15] y han sido estudiadas en [3, 4, 5, 10, 18], entre otros. Por tanto para la construcción de L se pueden aplicar las técnicas desarrolladas en estos trabajos.

Analizando estos resultados podemos observar que la solución del problema inverso en la mecánica μ contiene como caso particular la solución del problema inverso en la mecánica de Newton. Las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ pueden interpretarse, en tal caso, como componentes de fuerzas de carácter no conservativo.

Consecuencia 4.6. La matriz G para las ecuaciones (2.21) se define como sigue

$$G_{k_j} = \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^k} \left(L_0 + \sum \lambda_\alpha L_\alpha \right), \tag{4.30}$$

y si $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(t, x)$, entonces

$$G_{k_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^k} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial L_\alpha}{\partial v^j \partial v^k}. \tag{4.31}$$

Ilustraremos los resultados expuestos más arriba en los siguientes casos particulares.

Caso de Helmholtz-Santilli

Si en las condiciones (4.13) hacemos

$$\begin{cases} A_{ae} = 0 \\ Z_{ae} = 0, \end{cases} \tag{4.32}$$

entonces éstas coinciden con las "leyes de reciprocidad" de Helmholtz. De (4.23) se deduce que si se cumple (4.32), entonces las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ son gradientes de cierto potencial U, es decir

$$\varphi_k = \partial_k U$$

y por tanto las ecuaciones (4.26) toman la forma lagrangiana.

Como se desprende de (4.27), las leyes de Helmholtz pueden ser deducidas y con variaciones no conmutativas.

Caso de Birkoff-Santilli

Este caso, junto con el de Finsler, que definiremos a continuación, se obtiene bajo ciertas restricciones con respecto a la matriz G.

Sea G tal que

$$G_{ea}\ddot{x}^a = 0, \tag{4.33}$$

por tanto de (4.19) se deduce que

$$F_e = H_{ae}\dot{x}^a + \Phi_e. \tag{4.34}$$

Es claro que (4.33) tiene solución no trivial si la matrix G es degenerada, es decir

$$\det(G_{ae}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial v^j}\right) = 0. \tag{4.35}$$

El caso de mayor interés es aquél en que la función L es lineal con respecto a $(v^1, \ldots, v^N)$, es decir, cuando

$$G_{ae} = 0,$$

bajo esta restricción se tiene que las condiciones (4.15) y (4.16) toman la forma, respectivamente,

$$\frac{\partial F_e}{\partial \dot{x}^a} + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}^e} = 0,$$

$$\begin{cases} H_{ae} = \dfrac{\partial F_e}{\partial \dot{x}^a} \\ H_{ae} = \partial_a F_e - \partial_e F_a, \end{cases}$$

mientras que (4.18) se escribe como sigue

$$\begin{cases} \partial_e H_{aq} + \partial_a H_{qe} + \partial_q H_{ea} = 0 \\ H_{aq} + H_{qa} = 0. \end{cases} \tag{4.36}$$

Cuando la dimensión de X es par la matriz H es no degenerada y además se cumple que

$$\varphi_e = -\partial_e U.$$

Entonces de (4.34) se deduce ($F_e = 0$)

$$\dot{x}^a = H^{ae}\partial_e U, \tag{4.37}$$

que es una de las variedades de las ecuaciones de Birkoff estudiadas en [5].

Evidentemente, en base a (4.36) se tiene que el par (X,ω) con

$$\omega = H_{ea}\, dx^e \wedge dx^a$$

es una variedad simpléctica. En concordancia con el teorema de Darboux, (4.37) se puede representar en forma hamiltoniana.

Se puede observar que (4.37) es consecuencia del principio Υ.

$$\int_{\gamma} \mathcal{L}_\omega(L\, dt) = 0, \qquad \text{con} \qquad L = \sum_{i=1}^{2N} a_k \dot{x}^k - U, \; \theta = a_k\, dx^k - U\, dt.$$

EJEMPLO. Sean dadas las ecuaciones (4.34) con matriz H y funciones $\phi_1, \phi_2 \phi_3$:

$$\begin{cases} (H ae) = \begin{pmatrix} 0 & x_3\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_3 & x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3 \\ x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2 & 0 & x_3\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_3 \\ x_1\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_1 & x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \phi_1 = -\left(\dfrac{ax_1}{r} + \gamma_1\right), \qquad \phi_2 = -\left(\dfrac{ax_2}{r} + \gamma_2\right), \qquad \phi_3 = -\left(\dfrac{ax_3}{r} + \gamma_3\right) \end{cases} \tag{4.38}$$

Como se puede probar, en este caso la función L tiene la forma

$$\begin{aligned} L = 1/2\Big[&(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - (x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3)^2\Big] \\ &+ (ar + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3), \end{aligned}$$

donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Por tanto la matriz G tiene los siguientes componentes

$$G_{kj} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{kj} - x_k x_j; \qquad \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

La condición (4.33) evidentemente se cumple si se tiene que

$$\ddot{x}^e = g(x)x^e.$$

Hacemos notar que las ecuaciones (4.34) (con $F_e = 0$) y (4.38) aparecen en el problema de Kepler no perturbado.

Caso de Finsler

Se obtiene cuando la matriz G es tal que

$$v^k \frac{\partial G_{nm}}{\partial v^k} = v^k C_{knm} = v^k C_{nkm} = v^k C_{mnk} = 0.$$

o, lo que es lo mismo, cuando

$$v^k \frac{\partial^3}{\partial v^k \partial v^n \partial v^k} (L) = 0.$$

Estas condiciones se satisfacen, en particular cuando

$$L = \frac{1}{2} G_{kj} v^k v^j.$$

Bajo ciertas restricciones la matriz $= G$ define en X una métrica de Finsler [16], lo que nos permite, en este caso, aplicar todas las técnicas del cálculo tensorial en la mecánica μ.

5. Sistemas dinámico equivalentes al sistema μ

Como se deduce del apartado anterior, la solución del problema inverso de la mecánica μ se puede llevar a determinar las condiciones bajo las cuales se tiene la igualdad

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial v^k} - \partial_k L + \varphi_k = B_k^n D_n, \qquad \det B_k^n \neq 0 \\ D_n = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Si considera $\{D_n = 0\}$ como ecuación de movimiento de cierto sistema μ^*, entonces el problema referido es equivalente a encontrar las condiciones bajo las cuales los sistemas μ y μ^* son dinámico equivalentes.

Aplicaremos los resultados teóricos expuestos en los siguientes casos concretos.

EJEMPLO 1. Encontraremos las condiciones bajo las cuales las ecuaciones de Chapliguin son lagrangianas. Analizaremos previamente las ecuaciones

$$D_e \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial v^e} - \partial_e L_0 - \sum_{\alpha = s+1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\alpha}{\partial v^e} - \partial_e L^\alpha \right) \theta_\alpha = 0, \quad e = \overline{1, s}. \tag{5.2}$$

Determinaremos bajo qué condiciones se cumple (5.1), donde $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ son funciones de (x, v, t). Por medio de ∂_e se designa al operador

$$\partial_e = \frac{\partial}{\partial x^e} + \sum_{s+1}^{N} R_e^q \frac{\partial}{\partial x^q}. \tag{5.3}$$

Como se puede probar a partir de (4.19), se tiene que

$$G_{ea} = \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^e \partial v^a} - \sum \theta_\alpha \frac{\partial^2 L^\alpha}{\partial v^e \partial v^a} = G_{ae},$$

$$\begin{cases} H_{ea} = \partial_e(p_a) - \partial_a(p_e) + \sum\limits_\alpha \left(\dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^a} \partial_e \theta_\alpha - \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^e} \partial_a \theta_\alpha \right) \\ p_a = \dfrac{\partial L_0}{\partial v^a} - \sum \theta_\alpha \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^a}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_e = \partial_t(p_e) + \partial_e H + \sum\limits_\alpha \left(H^\alpha \partial_e \theta_\alpha + \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^e} \partial_t \theta_\alpha \right) \\ H = H_0 - \sum \theta_\alpha H_\alpha, \qquad H_\alpha = \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^e} v^e - L^\alpha. \end{cases}$$

Vamos a exigir que los enlaces sean de Chapliguin (veáse def. 3.2), es decir, que se cumpla que

$$\sum_{q=s+1}^{N} R_e^q \frac{\partial L_\nu}{\partial x^q} = 0, \qquad \nu = 0, \dots, s+1, s+2, \dots, N. \tag{5.4}$$

Las condiciones de compatibilidad bajo esta restricción toman la forma

$$\begin{cases} \sum \dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial v^a} C_{be}^\alpha = \sum \dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial v^e} C_{ea}^\alpha = \sum\limits_\alpha \dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial v^b} C_{ae}^\alpha, \quad C_{ae}^\alpha = \dfrac{\partial^2 L^\alpha}{\partial v^a \partial v^e} \\ \sum\limits_\alpha \left(\dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial x^f} S_{ea}^\alpha + \dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial x^e} S_{af}^\alpha + \dfrac{\partial \theta_\alpha}{\partial x^a} S_{fe}^\alpha \right) = 0, \quad S_{fe}^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^f} \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^e} - \dfrac{\partial}{\partial x^e} \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^f} \\ \varphi_e = \sum\limits_\alpha \theta_\alpha \left(\dfrac{\partial H^\alpha}{\partial x^e} + \partial_t \dfrac{\partial L^\alpha}{\partial v^e} \right). \end{cases} \tag{5.5}$$

De (5.5) se observa que si los enlaces L^α son lineales con respecto a $(v', \dots, v^s)$, y estacionarios, entonces las ecuaciones (5.2) y (5.4) (ecuaciones de Chapliguin) son autoconjugadas en el sentido de Helmholtz-Santilli. es decir, se cumple 4.32 si y sólo si se cumple que

$$\begin{cases} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x^f} S^\alpha_{ea} + \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x^e} S^\alpha_{af} + \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x^a} S^\alpha_{fe} \right) = 0 \\ S^\alpha_{ea} = \frac{\partial a^\alpha_e}{\partial x^a} - \frac{\partial a^\alpha_a}{\partial x^e}, \end{cases}$$

donde

$$L^\alpha = v^\alpha = \sum_{e=1}^{s} a^\alpha_e v^e, \qquad \alpha = \overline{s+1, N}.$$

EJEMPLO 2. Sean dadas las ecuaciones

$$D_e = \ddot{x}_e + q^2 \left(\sum_{\nu=1}^{N-1} \dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu \right) \frac{\dot{x}_e}{r^2} + \frac{a g_0 \dot{x}_e}{r} = 0, \tag{5.6}$$

donde $(x^1, \ldots, x^{N-1})$ son coordenadas cartesianas, y

$$r^2 = \sum_{\nu=1}^{N-1} \dot{x}^2_\nu; \; q, \; g_0 \qquad \text{son ciertos parámetros.}$$

Considerando que (5.6) se puede representar como sigue

$$\sum_{a=1}^{N-1} \left(\delta_{ae} + q^2 \frac{\dot{x}_a \dot{x}_e}{r^2} \right) \left(\ddot{x}^a + \frac{g_0 q \dot{x}^a}{(1+q^2) r} \right) = D_e, \tag{5.7}$$

y observando que

$$\det \left(\delta_{ae} + q^2 \frac{\dot{x}_a \dot{x}_e}{r^2} \right) > 0,$$

obtenemos que, por definición que los sistemas μ^* y μ, cuyas ecuaciones de movimiento se dan por la fórmula (5.6) y

$$\ddot{x}^a + g_0 \frac{q \dot{x}^a}{(1+q^2) r} = 0, \qquad a = \overline{1, N-1}, \tag{5.8}$$

respectivamente, son dinámico equivalentes.

Como se puede comprobar a lo largo de las soluciones de (5.8) siempre se cumple la igualdad

$$\frac{d}{dt} r = -\frac{g_0 q^2}{1+q^2}. \tag{5.9}$$

Si designamos $r = \dot{x}_N$, obtenemos que (5.8) y (5.9) representan una variante N dimensional del sistema de Appel estudiado en el apartado 3.

EJEMPLO 3. Demostremos que las ecuaciones

$$\begin{cases} D_1 = \ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \alpha x - \beta y = 0, \\ D_2 = \ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \alpha y + \beta x = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

son autoconjugadas en el sentido de Helmholtz-Santilli, es decir, se cumple (4.32).

Observando que (5.10) se puede representar como sigue

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \partial_x L + \dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}} = 0, & L = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \dfrac{2(x^2 + y^2)}{2}\alpha, \\ D_2 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \partial_y L + \dfrac{\partial V}{\partial \dot{y}} = 0, & V = \mu\dfrac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + \beta(x\dot{y} - y\dot{x}), \end{cases}$$

deducimos que estas ecuaciones son autoconjugadas.

Problemas que existen en una matriz B no degenerada tal que

$$B_j^k D_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} - \partial_j \mathcal{L} \equiv D_j^*.$$

Como se puede demostrar en este caso se tiene que las matrices G y H:

$$G = B, \qquad H = 0.$$

Si consideramos que $B = B(t)$, después de ciertas manipulaciones, se obtienen las siguientes ecuaciones (a partir de las condiciones de autoconjugación dadas en el apartado 4)

$$\begin{cases} 2G_{11}\mu = \partial_t G_{11} - A_{11}, \\ 2G_{12}\mu = \partial_t G_{12} - A_{12}, \\ 2G_{22}\mu = \partial_t G_{22} - A_{22}, \\ Z_{12} = \beta(G_{22} + G_{11}). \end{cases}$$

Por tanto si (4.32) se cumple entonces

$$\begin{cases} G_{k_j} = \exp(2t\mu)G_{k_j}^0, \\ G_{11}^0 = -G_{22}^0, \quad G_{12}^0 = G_{21}^0, \quad G_j^0 \quad \text{son constantes.} \end{cases} \tag{5.11}$$

Integrando (4.21) y (5.11) obtenemos que

$$L = \exp(2t\mu)\Big[G_{11}^0(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2G_{12}^0\dot{x}\dot{y}\Big] + L_0,$$

donde

$$L_0 = \sum a_k(x,t)\dot{x}^k + U(x,t)$$

es una función arbitraria.

Sin mayores dificultades se prueba que el Langrangiano $\mathcal{L}$ se puede definir como sigue

$$\text{i) } \mathcal{L} = \exp(2t\mu)\left[\frac{(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)}{2} - \beta xy + \alpha\,\frac{(x^2 - y^2)}{2}\right]$$

$$\text{ii) } \mathcal{L} = \exp(2t\mu)\left[\dot{x}\dot{y} + \alpha xy + \beta/2(x^2 - y^2)\right].$$

Por tanto las ecuaciones (5.10) son autoconjugadas en el sentido de Helmholtz-Santilli.

EJEMPLO 4. Demostremos que el movimiento de una esfera en un plano horizontal que gira es autoconjugado en el sentido de Helmholtz-Santilli.

Sean dadas las ecuaciones que describen el movimiento de este móvil [11].

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^3} - \dfrac{\partial L_0}{\partial x^3} + a^2 M v_3 \sin x_3 \dot{x}_4 - \dfrac{\partial U}{\partial x^3} = 0 \\ D_2 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^4} - \dfrac{\partial L_0}{\partial x^4} - a^2 M v_3 \sin x_3 \dot{x}_3 - \dfrac{\partial U}{\partial x^4} = 0 \\ D_3 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^5} - \dfrac{\partial L_0}{\partial x^5} = 0, \end{cases} \tag{5.12}$$

donde

$$L_0 = 1/2(Ma^2 + k^2)(v_1^2 + v_2^2) + \frac{k^2}{2}v_3^2 + U(x^3, x^4),$$

$$\begin{cases} v^1 = -\dot{x}^4 \sin x^3 \cos x^5 + \dot{x}^3 \sin x^5 \\ v^2 = \dot{x}^4 \sin x^3 \cos x^5 + \dot{x}^3 \sin x^5 \\ v^3 = \dot{x}^5 + \dot{x}^4 \cos x^3. \end{cases}$$

De la exigencia de que los movimientos se realicen sin arrastre resultan los enlaces

$$\begin{cases} L^1 = \dot{x}^1 = av^2 \\ L^2 = \dot{x}^2 = -av_1. \end{cases} \tag{5.13}$$

Comparando (5.12) con (4.26) y considerando que

$$\begin{cases} a^2 M v_3 \sin x_3 \dot{x}_4 - \dfrac{\partial U}{\partial x^3} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial \dot{x}^3} - \dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial x^3} = \varphi_1 \\ -a^2 M v_3 \sin x_3 \dot{x}_3 - \dfrac{\partial U}{\partial x^4} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial \dot{x}^4} - \dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial x^4} = \varphi_2, \end{cases}$$

donde

$$\tilde{U} = Ma^2 v_3 \sin x_3 - U(x^3, x^4),$$

obtenemos que (5.12) toma la forma lagrangiana.

Bibliografía

1. R. Abraham, J. Marsden and T. Ratiu, *Global Analysis*, 1983.
2. P. Appel, Sur les equations de Lagrange et le principe d'Hamilton, *Bul. Soc. Math. France*, 26 (1898).
3. S. S. Galiullin, *Problemas inversos de la dinámica*, Nauka, Moscow, 1981.
4. P. Havas, The range application of the Lagrange formalism, *Nuovocimento* 5 (1957).
5. H. Helmholtz, *Vorlensungen uber die Dynamik diskreter Massenpunkte*, Leipzig, 1911.
6. H. Hertz, *Die Principien der Mechanik*, Leipzig, 1884.
7. O. Hölder, Sobre el principio de Hamilton y Mopertin, in *Principios variacionales en la mecánica*, Fitmatguiz, Moscow, 1959.
8. G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*. Mechanik. Leipzig, 1876.
9. V. V. Koslov, Dinámica de los sistemas con enlaces no integrables, *Rev. Científica de la Universidad de Moscú* 1 (1982), 92–100, and 3 (1982), 70–76, .
10. A. Mayer, Die Existenzbelingungeines kinestischen Potentials, Ber. Veshand. Kgl. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig. Math-Phys, KG. 1896, 48.
11. I. Neimark and N. Fufaev, *Dinámica de los sistemas no holonómicos*, Nauka, Moscow, 1967.
12. R. Ramírez, Problemas inversos en la mecánica de Newton, *Rev. de V.I.N.I.T.I.*, 1468-85m (1985).
13. R. Ramírez and N. Sadovskaia, Construcción de campos vectoriales, Preprint.
14. R. Ramírez, Dynamic of nonholomorphic systems I, *Hadronic Journal* 6 1983), 1693–1704.
15. V. V. Rumiansev, Sobre el principio de Hamilton para los sistemas no holonómicos, *Rev. Matemática y Mecánica Aplicada* 42 (1978), 387–398.
16. J. Rund, *Geometría diferencial de los espacios de Finsler*, Nauka, Moscow, 1981.
17. R. M. Santilli., The Inverse Problem in Newtonian Mechanic-Foundation of Theoretical Mechanics I, Springer, New York, 1978.
18. R. M. Santilli, Foundation of theoretical mechanics II: Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. V. 5, N.º 4.
19. G. K. Suslov, Sobre el principio de la acción mecánica, *Rev. Científica de la Universidad de Kiev* (1891).
20. P. V. Voronés, Ecuaciones de movimiento de sistemas no holonómicos, *Rev. Matemática* 22 (1901).