Collect. Math. **39** (1988), 115-125

Relaciones entre propiedades de supremo y propiedades de interpolación en álgebras de Boole

Antonio Aizpuru

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Apartado 40, Puerto Real (Cádiz), Spain

Received 10/MAY/89

Abstract

In this paper the relations between some properties of interpolation and some properties of supremum, on Boolean algebras with the countable chain condition, are studied. It is also proved that a Boolean algebra has the Nikodym property if and only if the support algebras of its measures have it. A new sufficient condition for a Bolean algebra have the Grothendieck property is given.

1. Introducción

Por $\mathcal{F}$ denotamos un álgebra de Boole de cardinal infinito y por S denotamos el espacio de Stone de $\mathcal{F}$. La familia de subconjuntos de S simultáneamente abiertos y cerrados ("clopenes") es base de la topología de S y esta familia, con la unión e intersección conjuntista, es un álgebra de Boole isomorfa a $\mathcal{F}$.

El espacio S, como todo espacio topológico, puede escribirse en la forma $S = P \cup D$ [8], donde P y D son disjuntos, P perfecto y D disperso. El conjunto P (resp. D) será llamado núcleo perfecto (resp. núcleo disperso) de S. El álgebra de los "clopenes" de P es el álgebra cociente de $\mathcal{F}$ por el ideal de los finitos. Dada una medida positiva μ en $\mathcal{F}$, al álgebra cociente de $\mathcal{F}$ por el ideal $\{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0\}$ la llamaremos álgebra soporte de $\mathcal{F}$ para la medida μ. Por $C(S)$ (resp. $C_0(S)$)

se denota al espacio normado de las funciones reales continuas (resp. continuas y finitamente valoradas) en S, dotado con la norma del supremo. $C_0(S)$ es denso en $C(S)$.

Ciertos teoremas que se verifican en álgebras σ completas pero que no se verifican en álgebras no σ completas dieron lugar a los conceptos de álgebra de Boole con las propiedades de Grothendieck (G), de Nikodym (N), de Vitali-Hahn-Saks (VHS) o de Rosenthal (R) [11].

DEFINICIÓN 1.1.

a) Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Rosenthal (R) si y sólo si para todo espacio de Banach X y para todo operador $T : C(S) \to X$ que no es débilmente compacto se verifica que T fija copia de ℓ_∞.

b) Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Vitali-Hahn-Saks (VHS) si y sólo si para toda sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega} \subset C(S)^*$ que sea puntualmente convergente en $\mathcal{F}$ se verifica que $(\mu_n)_{n\in\omega}$ es uniformemente fuertemente aditiva (esto es equivalente a afirmar que toda sucesión $(\mu_n)_{n\in\omega} \subset C(S)^*$ que sea convergente en la topología $(C(S)^*, C_0(S))$ lo sea en la topología débil $\sigma(C(S)^*, C(S)^{**})$.

c) Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Grothendieck (G) si y sólo si toda sucesión acotada $(\mu_n)_{n\in\omega} \subset C(S)^*$ que sea puntualmente convergente en $\mathcal{F}$ es uniformemente fuertemente aditiva (lo cual es equivalente a afirmar que $C(S)$ es un espacio de Grothendieck, es decir toda sucesión de $C(S)^*$ que sea * débilmente convergente es débilmente convergente).

d) Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Nikodym (N) si y sólo si toda sucesión $(\mu_n) \subset C(S)^*$ que sea puntualmente acotada en $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en $\mathcal{F}$ (lo cual es equivalente a afirmar que $C_0(S)$ es un espacio tonelado).

La relación conocida entre estas propiedades es la siguiente [11]:

$$\mathcal{F} \text{ es (VHS)} \iff \mathcal{F} \text{ es (G) y (N)},$$
$$\mathcal{F} \text{ es (R)} \implies \mathcal{F} \text{ es (G)}.$$

Se conoce [11] un álgebra (N) que no es (G) y bajo HC [13] se conoce un álgebra (G) que no es (N).

La búsqueda de condiciones suficientes en lenguaje algebraico para que un álgebra de Boole tenga alguna de las propiedades anteriormente citadas dio lugar al estudio de diversas propiedades que cabría clasificar en propiedades de supremo y propiedades de interpolación.

Entre las propiedades de supremo destacamos:

DEFINICION 1.2. Sea $\mathcal{F}$ álgebra de Boole.

a) Se dice que $\mathcal{F}$ es σ-completa si y sólo si toda sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ tiene supremo.

b) Se dice que $\mathcal{F}$ es (E) [11] si y sólo si toda sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ posee una subsucesión que tiene supremo y tal que toda subsucesión suya también tiene supremo.

c) Se dice que $\mathcal{F}$ es subsecuencialmente completa (SC) [7] si y sólo si toda sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ posee una subsucesión con supremo.

d) Diremos que $\mathcal{F}$ es débilmente subsecuencialmente completa (WSC) si y sólo si para cada sucesión de disjuntos $(A_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{F}$ existen $M_1 \subset \omega$ infinito, $M_2 \subset \omega - M_1$, una sucesión disjunta $(D_i)_{i\in M_2}$ en $\mathcal{F}$ y un $B \in \mathcal{F}$ tales que: para cada $i \in M_2$ es $(D_i) \subset A_i$ y la sucesión formada con las sucesiones $(A_i)_{i\in M_1}$ y $(D_i)_{i\in M_2}$ tiene por supremo a B.

La relación que se tiene entre estas propiedades es:

$$\mathcal{F} \text{ es } \sigma \text{ completa} \Longrightarrow \mathcal{F} \text{ es (E)} \Longrightarrow F \text{ es (SC)} \Longrightarrow \mathcal{F} \text{ es (WSC)}.$$

Entre las propiedades de interpolación en álgebras de Boole cabe destacar:

DEFINICION 1.3.

1) Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Seever [12] si y sólo si para toda sucesión de disjuntos $(A_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{F}$ y para todo $M \subset \omega$ infinito existe $A \in F$ tal que $\bigcup_{i\in M} A_i \subset A$ y $\bigcup_{i\in\omega-M} A_i \subset A^c$ (esto es equivalente a afirmar que el espacio S es un F-espacio).

2) Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (f) [9] si y sólo si para todo par de sucesiones $(A_i)_{i\in\omega}$ y $(B_i)_{i\in\omega}$ en $\mathcal{F}$ disjuntas y formadas por disjuntos, existen un $N \subset \omega$ infinito y un $A \in \mathcal{F}$ tales que: a) para cada $i \in N$ es $A_i \subset A$, b) para cada $i \in \omega - M$ es $A_i \cap A = \emptyset$, c) $B_i \cap A = \emptyset$ para cada $i \in \omega$, y d) para cada $M \subset N$ existe $A_M \in F$ tal que $A_i \subset A_M$ para cada $I \in M$, $A_I \cap A_M = \emptyset$ para cada $i \in \omega - M$ y $B_i \cap A_M = \emptyset$ para cada $i \in \omega$.

3) Se dice que $\mathcal{F}$ es de interpolación subsecuencial (IS) [4,5] si y sólo si para cada sucesión de disjuntos $(A_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{F}$ y para cada $M \subset \omega$ infinito, existen $N \subset M$ infinito y $A \in F$ tales que si $n \in N$ es $A_n \subset A$ y si $n \in \omega - N$ es $A_n \cap A = \emptyset$.

4) Se dice que $\mathcal{F}$ es débilmente de interpolación subsecuencial (WIS) [6] si y sólo si para cada sucesión de disjuntos $(A_i)_{i\in\omega}$ y para cada $M \subset \omega$ infinito existen $N \subset M$ infinito y $A \in \mathcal{F}$ tales que si $n \in N$ es $A_n \subset A$ y si $n \in \omega - M$ es $A_n \cap A = \emptyset$.

La relación que se tiene entre estas propiedades es:

$$\mathcal{F} \text{ es Seever} \Longrightarrow \mathcal{F} \text{ es (f)} \Longrightarrow \mathcal{F} \text{ es (IS)} \Longrightarrow \mathcal{F} \text{ es (WIS)}.$$

Las propiedades σ–completa y (E) son suficientes para que un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ sea (R) y (VHS) [11]. Haydon [7] prueba que la propiedad (SC) es suficiente para que un álgebra sea VHS, pero construye un álgebra de Boole que siendo (SC) no es (R) (su correspondiente espacio $C(S)$ no tiene copia de ℓ_∞, y se trata del primer espacio de Grothendieck que carece de copia de ℓ_∞). Freniche [5] prueba que la propiedad (IS) es suficiente para que un álgebra de Boole sea (VHS), y en [6] prueba que la propiedad (WIS) es suficiente para que sea (G). Aún no se sabe si la propiedad (WIS) será suficiente para que un álgebra de Boole sea (N).

Una condición necesaria para que un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ tenga cualquiera de las propiedades anteriormente citadas, es que en el espacio de Stone S de $\mathcal{F}$ no existan sucesiones convergentes distintas de las triviales [1].

DEFINICION 1.4.

1) Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la Condición de la Cadena Contable (CCC) si toda familia de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ es a lo sumo numerable (o lo que es equivalente, el espacio de Stone S de $\mathcal{F}$ tiene la Condición de la Cadena Contable).

2) Se dice que $\mathcal{F}$ es (n-σ) si no existen sucesiones disjuntas en $\mathcal{F}$ no triviales que tengan supremo.

3) Se dice que $\mathcal{F}$ es "up-down-semi-complete" (u.d.s.c.) si y sólo si para toda sucesión de elementos disjuntos de $\mathcal{F}$ que tenga supremo se verifica que toda subsucesión también tiene supremo.

2. Relación entre propiedades de supremo y de interpolación en álgebras (CCC)

Las propiedades de supremo y de interpolación mencionadas y la relación existente entre ellas pueden resumirse en el siguiente cuadro.

$$\begin{array}{ccc}
\sigma - \text{completa} & \longrightarrow & \text{Seever} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{(E)} & \longrightarrow & \text{(f)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{(SC)} & \longrightarrow & \text{(IS)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{(WSC)} & \longrightarrow & \text{(WIS)}
\end{array}$$

Vamos a probar que en las álgebras (CCC) cada una de las propiedades de la derecha es equivalente a la correspondiente de la izquierda.

Probaremos también que toda álgebra atómica $\mathcal{F}$ que posea alguna de las propiedades de la izquierda, verifica que el álgebra cociente de $\mathcal{F}$ por el ideal de los elementos finitos es un álgebra que tiene la propiedad de su derecha, pero que es (n σ) y, por tanto, carece de cualquiera de las propiedades de la izquierda. Con esto quedará probado que las propiedades de la izquierda no son hereditarias a álgebras cocientes. Con los resultados de la próxima sección quedará también probado que las álgebras soporte de un álgebra de Boole $\mathcal{F}$, que tenga cualquiera de las propiedades del cuadro, son álgebras que poseen la correspondiente propiedad de interpolación (las álgebras soporte siempre tienen la propiedad (CCC)).

Teorema 2.1

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole (CCC). Para cada sucesión de disjuntos de $\mathcal{F}$ existe otra sucesión de disjuntos, disjunta de la anterior, y tal que la sucesión formada con ambas tiene por supremo la unidad del álgebra.

Demostración. Sea $(A_i)_{i\in\omega}$ sucesión de disjuntos en $\mathcal{F}$ sin supremo (si lo tuviera la demostración sería trivial). Entonces la familia $\mathcal{G}$ formada por los conjuntos

$$G = \bigcup_{i\in\omega} B_i$$

donde $(B_i)_{i\in\omega}$ es una sucesión de disjuntos en $\mathcal{F}$ tal que

$$G \cap \left(\overline{\bigcup_{i\in\omega} A_i} \right) = \emptyset,$$

que está formada por coceros de S, es no vacía. El orden definido en $\mathcal{G}$ por

$$G_1 \subset G_2 \iff G_1 = G_2 \text{ o } G_1 \subset G_2 \text{ con } \operatorname{int}(G_2 - G_1) \neq \emptyset$$

es inductivo y existe en $\mathcal{G}$ un elemento G maximal. Es fácil comprobar que el supremo de la sucesión formada con $(A_i)_{i\in\omega}$ y $(B_i)_{i\in\omega}$ es S, donde $(B_i)_{i\in\omega}$ es la sucesión de disjuntos que corresponde a G. □

Teorema 2.2

Sea $\mathcal{F}$ álgebra de Boole (CCC). Se verifica:

a) $\mathcal{F}$ es (u.d.s.c.) $\iff$ $\mathcal{F}$ es σ completa.

b) $\mathcal{F}$ es Seever $\iff$ $\mathcal{F}$ es σ completa.

c) $\mathcal{F}$ es (f) $\iff$ $\mathcal{F}$ es (E).

d) $\mathcal{F}$ es (IS) $\iff$ $\mathcal{F}$ es (SC).

e) $\mathcal{F}$ es (WIS) $\iff$ $\mathcal{F}$ es (WSC).

Demostración.

a) Es evidente pues si toda sucesión de disjuntos es subsucesión de otra sucesión con supremo se verificará que la primera tiene supremo.

b) Este resultado es probado por Rosenthal [10] y puede ser probado a partir del teorema anterior de forma inmediata.

Las demostraciones de c) d) y e) son similares, veremos sólo la última.

e) Supongamos que $\mathcal{F}$ es (WIS) y sea $(A_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{F}$ una sucesión de disjuntos, sea $(C_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{F}$ otra sucesión de disjuntos formada con $(A_i)_{i\in\omega}$, tal que la sucesión formada con ambas tiene por supremo la unidad S del álgebra. Aplicando la propiedad (WIS) a las sucesiones $(A_i)_{i\in\omega}$ y$(C_i)_{i\in\omega}$ encontramos que existen $N \subset \omega$ infinito y $B \in F$ tales que para cada $i \in N$ es $A_i \subset B$ y $B \cap C_i = \emptyset$ para cada $i \in \omega$. Podemos suponer que N es precisamente $N = \{i \in \omega : A_i \subset B\}$; al conjunto $\omega - N$ lo dividimos en dos disjuntos R_1 y R_2, $R_1 = \{i \in \omega - N : A_i \cap B \neq \emptyset\}$, $R_2 = \{i \in \omega - N : A_i \cap B = \emptyset\}$. Consideremos las siguientes sucesiones disjuntas de disjuntos $(A_i)_{i\in N}$, $(A_i \cap B)_{i\in R_1}$, $(A_i - B)_{i\in R_1}$, $(A_i)_{i\in R_2}$, $(C_i)_{i\in\omega}$. Su unión coincide con $\left(\bigcup_{i\in\omega} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\omega} C_i\right)$ y el supremo de la sucesión formada por todas ellas es S.

Se tiene

$$\overline{\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in R_1} A_i \cap B\right)} \subset B \tag{1}$$

$$\overline{\left(\bigcup_{i\in R_1} (A_i - B)\right) \cup \left(\bigcup_{i\in R_2} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\omega} C_i\right)} \subset B^c$$

Si la inclusión que aparece en (1) fuese estricta, existiría un $C \in \mathcal{F}$ tal que

$$C \subset B \setminus \overline{\left(\bigcup_{i\in N} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in R_1} A_i \cup B\right)}.$$

Así pues, sería

$$C \subset S - \left[\left(\bigcup_{i\in\omega} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in\omega} C_i\right)\right],$$

lo que no es posible. Por tanto la inclusión que aparece en (1) es una igualdad y la sucesión de disjuntos formada con las sucesiones $(A_i)_{i\in N}$ y $(A_i \cap B)_{i\in R_1}$ tiene por supremo a B. □

Teorema 2.3

Sea $\mathcal{F}$ álgebra de Boole atómica y sea I el ideal de los elementos finitos de $\mathcal{F}$, entonces:

a) Si $\mathcal{F}$ es σ-completa $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}/I$ es Seever y (n σ).

b) Si $\mathcal{F}$ es (E) $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}/I$ es (f) y (n σ).

c) Si $\mathcal{F}$ es (SC) $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}/I$ es (IS) y (n σ).

d) Si $\mathcal{F}$ es (WSC) $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}/I$ es (WIS) y (n σ).

Demostración. La implicación a) es un resultado muy conocido y la demostración de b), c) y d) es similar. Veamos la demostración de la implicación d). Es evidente que $\mathcal{F}/I$ es (WIS). Veamos que $\mathcal{F}/I$ es (n–σ). Supongamos que $([A_i])_{i\in\omega}$ es una sucesión en $\mathcal{F}/I$ tal que $[A_i]\wedge[A_j]=\emptyset$ y tiene por supremo a $[A]\in\mathcal{F}/I$. Es fácil escoger elementos representantes en $\mathcal{F}$ de cada $[A_i]$ y de $[A]$, de forma que $(A_i)_{i\in\omega}$ sea una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$ y $A\in\mathcal{F}$ sea tal que $A_i\subset A$ para cada $i\in\omega$.

Para cada $i\in\omega$ sea $x_i\in A_i$ átomo de $\mathcal{F}$, por la propiedad (WSC) existe una sucesión $(B_i)_{i\in\omega}\subset\mathcal{F}$ de disjuntos no vacíos tal que

$$\bigcup_{i\in\omega} B_i\subset\bigcup_{i\in\omega}\{x_i\}$$

y tal que $(B_i)_{i\in\omega}$ tiene supremo $B\in\mathcal{F}$.

Si $S=P\cup D$ es el espacio de Stone de $\mathcal{F}$ con su descomposición perfecta-dispersa, se tiene que $\bigcup_{i\in\omega}\{x_i\}\subset D$. Así pues para cada $i\in\omega$ es B_i clopen contenido en el núcleo disperso D, pero en S no pueden existir sucesiones convergentes distintas de las triviales, luego no puede existir un cerrado disperso infinito (sería secuencialmente compacto). Por tanto, para cada $i\in\omega$, B_i es un clopen finito. Por ello la sucesión $(B_i)_{i\in\omega}$ puede expresarse como $(x_i)_{i\in M}$, con $M\subset\omega$ infinito y se tiene que

$$\overline{\bigcup_{i\in M}\{x_i\}}=B.$$

Si para cada $i\in M$ ponemos $C_i=A_i-\{x_i\}$ y para cada $i\in\omega\setminus M$ ponemos $C_i=A_i$ se cumple que $[C_i]=[A_i]$ y $[C_i]\wedge[B]=0$ para cada $i\in\omega$. Es fácil comprobar que $[B]<[A]$ y $[B]\neq\emptyset$, lo que contradice que $[A]$ sea el supremo de $([A_i])_{i\in\omega}$. □

Seever prueba que un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ es (G) si y sólo si sus álgebras soporte son (G). En el próximo teorema probamos que tal afirmación también es cierta para la propiedad (N) y que por tanto lo será para (VHS).

Teorema 2.4

$\mathcal{F}$ es (N) si y sólo si sus álgebras soporte son (N).

Demostración. La condición necesaria es evidente. Sea $(\mu_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de medidas puntualmente acotada en $\mathcal{F}$. Sea λ medida en $\mathcal{F}$ definida por

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\mu_n|(A)}{1 + |\mu_n|(S)} .$$

λ es positiva y acotada en $\mathcal{F}$ y para cada $N \in \omega$ se verifica que μ_n es absolutamente continua respecto de λ y $\operatorname{Sop}\mu_n \subset \operatorname{Sop}\lambda = H$.

Sea $\mathcal{F}_H = \mathcal{F}/I$ con $I = \{A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = 0\}$. Para cada $A \in I$ y cada $n \in \omega$ se tiene que $\mu_n(A) = \mu_n(A \cap H)$. La medida μ_n es una medida de Radon en el compacto H que da lugar a la medida en $\mathcal{F}_H$ que denotamos por μ_n, es evidente que $\|\mu_n\| = \|\mu_n\|$ y como μ_n es puntualmente acotada en $\mathcal{F}_H$ y $\mathcal{F}_H$ es (N) se deduce que $(\|\mu_n\|)_{n\in\omega}$ es una sucesión acotada. □

Nota 2.5. Así pues todas las condiciones de interpolación que se han ensayado hasta el momento como condiciones suficientes para (N), (G) y (VHS), no han supuesto avance decidido, ya que daban lugar a álgebras de Boole cuyas álgebras soporte tenían la correspondiente propiedad de supremo.

Nota 2.6. Es conocido que las propiedades de supremo e interpolación no son las adecuadas para caracterizar algebraicamente las álgebras de Boole que tengan alguna de las propiedades (R), (VHS), (G) o (R). En efecto. Dashiell [3] demuestra que toda álgebra de Boole que sea (udsc) y tenga cierta propiedad adicional relativa a medidas, tiene las propiedades (R) y (VHS) y demuestra que el álgebra de los subconjuntos de [0,1] que son simultáneamente F_σ y G_δ está en estas circunstancias. Sin embargo, en este álgebra existen sucesiones de disjuntos en las cuales no es posible separar, con un elemento del álgebra, infinitos elementos de la sucesión de otra infinidad de la misma. En [2] se especula con la posibilidad de que las propiedades de interpolación y supremo estudiadas, sean, quizá las adecuadas para la caracterización de propiedades similares a las (N), (G) y (VHS) pero notablemente más fuertes.

En el siguiente apartado se estudia un nuevo tipo de propiedad, que es poseída por todas aquellas álgebras que tengan cualquiera de las propiedades de supremo anteriormente estudiadas.

3. Una nueva propiedad

DEFINICION 3.1. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole y sea $(A_i)_{i\in\omega} \subset \mathcal{F}$ una sucesión de disjuntos, diremos que $(A_i)_{i\in\omega}$ tiene la propiedad (H) si y sólo si existe una familia $(\sigma(\alpha))_{\alpha\in\omega_1}$ casi disjunta de partes infinitas de ω, y existe una familia $(C_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ de conjuntos Borel disjuntos de S no vacíos, y existe $(A_\alpha)_{\alpha\in\omega_1} \subset F$ tales que para cada $\alpha \in \omega_1$ es $C_\alpha \subset A_\alpha$ y existe $\sigma'(\alpha) \subset \sigma(\alpha)$ infinito verificando:

a)

$$\bigcup_{i\in\sigma'(\alpha)} A_i \subset A_\alpha - C_\alpha,$$

b) Para cada $i \in \sigma'(\alpha)$,

$$A_\alpha - (C_\alpha \cup A_i) \subset \bigcup_{\substack{j\in\omega \\ j\neq i}} A_j.$$

Si toda sucesión de disjuntos de $\mathcal{F}$ no trivial tiene la propiedad (H), diremos que $\mathcal{F}$ es (H).

Proposición 3.2

Si $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (H), entonces $\mathcal{F}$ es (G).

Demostración. Si $\mathcal{F}$ no es (G) existen (μ_n) sucesión de medidas acotadas y puntualmente convergente a cero en $\mathcal{F}$, y $(A_i)_{i\in\omega}$ sucesión de disjuntos de $\mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$ tales que, $|\mu_i(A_i)| > \varepsilon$ para cada $i \in \omega$. Aplicando el lema de Rosenthal a estas sucesiones en la σ-álgebra de los conjuntos de Borel del espacio de Stone S de $\mathcal{F}$, para $\varepsilon/3$ existen subsucesiones que denotamos igual, tales que

$$|\mu_n|\left(\bigcup_{\substack{i\in\omega \\ i\neq n}} A_i\right) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Consideremos la sucesión $(A_i)_{i\in\omega}$. Por verificarse la propiedad (H) existen sucesiones $(\sigma(\alpha))_{\alpha\in\omega_1}$, $(\sigma'(\alpha))_{\alpha\in\omega_1}$, $(A_\alpha)_{\alpha\in\omega_1} \subset \mathcal{F}$, $(C_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ de conjuntos de Borel disjuntos no vacios, tales que, $\sigma'(\alpha)$ es infinito, $\sigma'(\alpha) \subset \sigma(\alpha)$, $C_\alpha \subset A_\alpha$,

$$\bigcup_{i\in\sigma'(\alpha)} A_i \subset A_\alpha - C_\alpha \qquad \text{para cada } \alpha \in \omega_1$$

y para cada $i \in \sigma'(\alpha)$ se cumple

$$A_\alpha - (C_\alpha \cup A_1) \subset \bigcup_{\substack{j\in\omega_j \\ j\neq i}} A_i.$$

Como $(C_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ es una familia no numerable de conjuntos de Borel disjuntos, considerando la medida

$$\mu = \sum \frac{1}{2^n} |\mu_n|$$

se llega a la conclusión de que existe un $\alpha \in \omega_1$, tal que, para cada $n \in \omega$, es $|\mu_n|(C_\alpha) = 0$. Por tanto se tiene

$$\mu_i(A_\alpha) = \mu_i(A_i) + \mu_i(C_\alpha) + \mu_i\left[A_\alpha - (A_i \cup C_\alpha)\right]$$

para cada $i \in \sigma'(\alpha)$. De aquí se deduce que

$$|\mu_i(A_\alpha)| \geq |\mu_i(A_i)| - |\mu_i| \left(\bigcup_{\substack{j\in\omega \\ j\neq i}} A_j \right) \geq \frac{2\varepsilon}{3}, \qquad \forall i \in \sigma'(\alpha).$$

Esta contradicción prueba el resultado. □

Proposición 3.3

Si $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (WSC) entonces $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (H).

Demostración. Sea $(A_i)_{i\in\omega}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$. Sea $(\sigma(\alpha))_{\alpha\in\omega_1}$ una familia de partes infinitas de ω casi disjuntas.

Para cada $\alpha \in \omega_1$ por la propiedad (WSC) existen $\gamma(\alpha) \subset \sigma(\alpha)$ infinito, $\gamma(\alpha) = \gamma_1(\alpha) \cup \gamma_2(\alpha)$ partición de $\gamma(\alpha)$ con $\gamma_1(\alpha)$ infinito, $(D_i^\alpha)_{i\in\gamma_2(\alpha)}$ sucesión de disjuntos, y $B^\alpha \in F$ tales que: B^α es el supremo de la sucesión obtenida con las sucesiones $(A_i)_{i\in\gamma_1(\alpha)}$ y $(D_i)_{i\in\gamma_2(\alpha)}$, para cada $i \in \gamma_2(\alpha)$ es $D_i \subset A_i$. Para cada $\alpha \in \omega_1$ sea

$$C^\alpha = B^\alpha - \left[\left(\bigcup_{i\in\gamma_1(\alpha)} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i\in\gamma_2(\alpha)} D_i \right) \right],$$

se tiene que

$$\bigcup_{i\in\gamma_1(\alpha)} A_i \subset B^\alpha - C^\alpha,$$

y, para cada $i \in \gamma_1(\alpha)$, es

$$B_\alpha - (A_i \cup C_\alpha) \subset \bigcup_{\substack{j\in\omega \\ j\neq i}} A_j.$$

Para concluir bastará ver que si $\alpha \neq \beta$ es $C^\alpha \cap C^\beta = \emptyset$, pero esto es sencillo de comprobar. □

Corolario 3.4

Si $\mathcal{F}$ es (WIS) sus álgebras soporte son (H).

Corolario 3.5

Si $\mathcal{F}$ es (WIS) entonces $\mathcal{F}$ es (G).

Referencias

1. A. Aizpuru, Algebra de Boole cuyos espacios de Stone carecen de sucesiones convergentes distintas de las triviales, in *Actas de las XII Jornadas Luso-Espanholas*, Braga, 1987.
2. A. Aizpuru and F. Benítez, Propiedades de supremo e interpolación y subálgebras sucesionales de un álgebra de Boole, in *Actas de las XII Jornadas Luso-Espanholas*, Braga,1987.
3. F. K. Dashiell, Non weakly compact operators from order-Cauchy complete $C(S)$ lattices with application to Baire classes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **266** (1981), 397–413.
4. F. J. Freniche, *Teorema de Vitali-Hahn-Saks en álgebras de Boole*, Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, Sevilla, 1983.
5. F. J. Freniche, The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interpolation property, *Proc. Amer. Math. Soc.* **92** (1984), 362–366.
6. F. J. Freniche, Some classes of Boolean algebras related to the Vitali-Hahn-Saks and Nikodym theorems, Communication at the Meeting on Boolean Algebreas, Oberwolfach, 1985.
7. R. Haydon, A non reflexive Grothendieck space that does not contain ℓ_∞, *Israel J. Math.* **40** (1981), 65–73.
8. K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press, London, 1966.
9. A. Malto, On the Vitali-Hahn-Saks theorem, *Proc. Royal Soc. Edinb.* **90**A (1981), 163–173.
10. H. P. Rosenthal, On relatively disjoint families of measures, applications to Banach space theory, *Studia Math.* **37** (1970), 13–36.
11. W. Schachermayer, *On Some Classical Measure Theoretic theorems for Non-Sigma-Complete Boolean Algebras*, Linz University, Linz, 1978.
12. G. L. Seever, Measures on F-spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **133** (1968), 267–280.
13. M. Talagrand, Propriété de Nikodym et propriété de Grothendieck, *Studia Math.* **68** (1984), 165–171.
14. A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill, 1978.