

L'Universo di De Sitter, il gruppo di Fantappié e la cosmologia del Big-Bang

GIUSEPPE ARCIDIACONO*

Via Acquedotto Peschiera 96, 00135 Roma, Italy

Received 9/NOV/87

ABSTRACT

The Poincaré group of relativistic physics can be perfected in a unique way by the Fantappié group. In this way we obtain a new group version of the Big-Bang Cosmology (Projective Cosmology), in which the velocity of light is not constant, and the expansion-collapse of the Universe is tied to a process of creation-annihilation of matter.

1. La cosmologia "standard" del Big-Bang

Il modello cosmologico "standard" del Big-Bang, si basa sull'ipotesi che le leggi fisiche note sono valide su scala cosmica e non cambiano col tempo. Possiamo quindi applicare la relatività generale di Einstein, anche alle alte energie e per materia iperdensa. Solo così si può costruire una cosmologia scientifica, perché in caso contrario, non sappiamo come modificare le leggi fisiche [11]. Questa doppia necessità di affidarci a teorie fisiche *locali*, e di introdurre concetti e principi cosmologici di tipo *globale*, pone la cosmologia in posizione *instabile*, perché nuove scoperte potrebbero mettere in discussione le attuali teorie [15].

Il modello del Big-Bang porta a tre importanti previsioni, verificabili sperimentalmente [17], e cioè: (a) vale la legge lineare di espansione cosmica $V = x/t$; (b) esiste una "radiazione di fondo" a microonde in tutto l'Universo, alla tempe-

* Lavoro eseguito nell'ambito del GNFM del CNR (Italia)

ratura di 3°K , residuo dello stato iniziale ad alta temperatura; (c) la formazione dell'idrogeno e dell'elio avvenne subito dopo il Big-Bang, mentre i nuclei più pesanti si sono poi formati all'interno delle stelle.

La teoria standard del Big-Bang ha avuto un grande successo nella descrizione degli eventi accaduti dopo 1 secondo, ma incontra gravi difficoltà a spiegarci ciò che è accaduto prima, ed allora sorgono nuovi problemi di difficile soluzione [16]:

1) Il *problema dell'orizzonte* (horizon problem): se l'Universo ha avuto una origine nel tempo, per ogni epoca, abbiamo una distanza massima (orizzonte) che un segnale luminoso ha percorso dalla sua origine. Tali orizzonti tendono ad annullarsi, se l'osservatore si avvicina all'istante iniziale. Le sorgenti della radiazione di fondo, che osserviamo nel cielo in direzioni opposte, avevano, al momento dell'emissione, una distanza assai superiore a quella dell'orizzonte, e quindi non potevano comunicare tra loro. La cosmologia standard non ci può quindi spiegare perché tali sorgenti hanno raggiunto condizioni quasi identiche, e si deve assumere come ipotesi l'uniformità su larga scala dell'Universo.

2) Il *problema dello spazio piatto* (flatness problem): In base alla cosmologia relativista, nell'Universo abbiamo una densità critica μ_0 , e se $\mu > \mu_0$, lo spazio fisico è ipersferico. Invece, per $\mu < \mu_0$, lo spazio è aperto. Se poniamo

$$(1,1) \quad \Omega = \frac{\mu}{\mu_0}$$

possiamo dire che per $\Omega = 1$, l'Universo è piatto ed in equilibrio instabile. Allora, se inizialmente $\Omega \neq 1$, dopo il Big-Bang, questo scostamento dallo stato critico sarebbe rapidamente aumentato. Data allora questa instabilità, è sorprendente che si trova $0.1 \leq \Omega \leq 2$, e questo richiede che inizialmente si doveva avere un valore vicino ad 1. Il modello classico non ci spiega questa circostanza, che deve essere assunta come condizione iniziale.

2. La cosmologia "inflazionaria" di Guth

Per risolvere i due problemi dell'orizzonte e dello spazio piatto, nel 1980 A. H. Guth ha proposto il nuovo modello "inflazionario" [1], il quale è stato poi perfezionato nel 1981 da A. D. Linde, A. Albrecht e da P. Steinhard [13].

Nella *cosmologia inflazionaria*, si suppone che l'Universo primordiale conteneva regioni ad alta temperatura (superiore a 10^{27}°K). Tali regioni erano in espansione, ed al diminuire della temperatura si ebbe una transizione di fase, con passaggio

allo stato di "falso vuoto". Apparve quindi una pressione negativa, e cioè una forza gravitazionale repulsiva, che provocò una improvvisa crescita dell'Universo, della durata di 10^{-23} sec (era inflazionaria), durante la quale le sue dimensioni aumentarono di 10^{50} volte.

Si sarebbe allora liberata tutta l'energia di falso vuoto, con creazione di un enorme numero di particelle. Poi l'espansione tornò al ritmo previsto dalla teoria standard, però, per effetto dell'inflazione, noi osserviamo solo una piccolissima parte dell'Universo.

Nella cosmologia relativista, il fattore di scala è del tipo

$$(2,1) \quad R(t) = R_0 t^n.$$

Nel caso in cui la curvatura è nulla ($\epsilon = 0$), si ha $n = 1/2$ nella fase in cui prevale la radiazione, ed $n = 2/3$ quando prevale la materia. Supponiamo allora che per $0 < t < t_1$ vale la legge

$$(2,2) \quad R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_1} \right)^{1/2}$$

mentre nell'intervallo $t_1 < t < t_2$ vale la legge esponenziale

$$(2,3) \quad R(t) = R_0 \exp(H(t - t_1))$$

ed infine, per $t > t_2$, vale di nuovo la legge (2,2). Si può in tal modo risolvere il problema dell'orizzonte, perché nel modello inflazionario l'Universo osservabile si evolve a partire da una regione molto più piccola di quella richiesta nel modello classico. Tale regione era più piccola della distanza-orizzonte, e può raggiungere l'equilibrio termico: il piccolo volume omogeneo così ottenuto si espande poi in modo da contenere tutto l'Universo osservabile. Lo stesso accade per le sorgenti della radiazione di fondo, che hanno raggiunto la stessa temperatura prima dell'inizio dell'era inflazionaria.

Infine, il problema dello spazio piatto è risolto osservando che per $\Lambda = 0$, l'equazione della cosmologia relativista

$$(2,4) \quad \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{\epsilon}{R^2} = \kappa \mu \frac{c^2}{3}$$

si può semplificare se teniamo conto della inflazione. Si ha infatti $R \sim \exp(Ht)$, ed allora il primo termine diventa costante, mentre il secondo termine diminuisce esponenzialmente, cioè

$$(2,5) \quad \frac{\dot{R}}{R} = H^2 ; \quad \frac{\epsilon}{R^2} \sim \epsilon \exp(-2Ht).$$

Ne segue che la fase inflazionaria elimina il termine di curvatura nella (2,4), in confronto al primo termine, e l'Universo si può considerare piatto.

3. L'Universo di De Sitter e la relatività speciale proiettiva

La relatività speciale proiettiva (RSP), basata sul gruppo di Fantappiè e sull'Universo ipersferico \mathbb{S}_4 di De Sitter, ci fornisce nel modo più semplice e naturale una nuova versione grupitale della cosmologia del Big-Bang, in grado di superare le difficoltà delle precedenti teorie. Essa infatti ci dà una via *univoca* per perfezionare le leggi fisiche, in modo da tener conto della curvatura dello spazio e della espansione-collasso dell'Universo [2,3].

Poiché l'Universo di De Sitter a curvatura costante $+1/r^2$, ci appare come se fosse piatto [4,5], esso deve essere studiato mediante la sua "rappresentazione geodetica" di Beltrami, ed otteniamo allora il "cronotopo di Castelnuovo" dato dai punti di uno spazio-tempo proiettivo \mathbb{P}_4 , esterni all'assoluto di Cayley-Klein. Se ci limitiamo alle due dimensioni (x, t) tale assoluto è una iperbole di equazione

$$(3,1) \quad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0$$

dove abbiamo posto $\alpha = x/r$ e $\gamma = ct/r = t/t_0$, con $t_0 = r/c$.

Le due falde di tale iperbole (vedi fig. 1) rappresentano nello spazio-tempo la singolarità *iniziale* e quella *finale*. Infatti, per l'osservatore O , la singolarità iniziale e finale sono date dalla coppia di punti (A, Ω) . Se consideriamo un secondo osservatore O' coincidente con O , ma dotato di velocità V rispetto ad O , si ha una dilatazione del tempo, ed allora la singolarità iniziale e finale saranno la coppia di punti (A', Ω') . Al variare della velocità V , otteniamo i punti delle due falde dell'iperbole.

I movimenti in sé del cronotopo di De Sitter (rotazioni 5-dimensionali a 10 parametri), sono rappresentati nel cronotopo di Castelnuovo dal prodotto delle *rotazioni* dello spazio-tempo (gruppo di Lorentz a 6 parametri), cioè

$$(3,2) \quad x'_i = \alpha_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

dove α_{ik} è una matrice ortogonale, e dalle *traslazioni proiettive* dello spazio-tempo. Nel caso bidimensionale (x, t) , esse sono:

a) Le *traslazioni spaziali proiettive*, di parametro T , date dalle

$$(3,3) \quad x' = \frac{x + T}{1 - \alpha x/r}; \quad t' = \frac{t\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha x/r}$$

dove abbiamo posto $\alpha = T/r$.

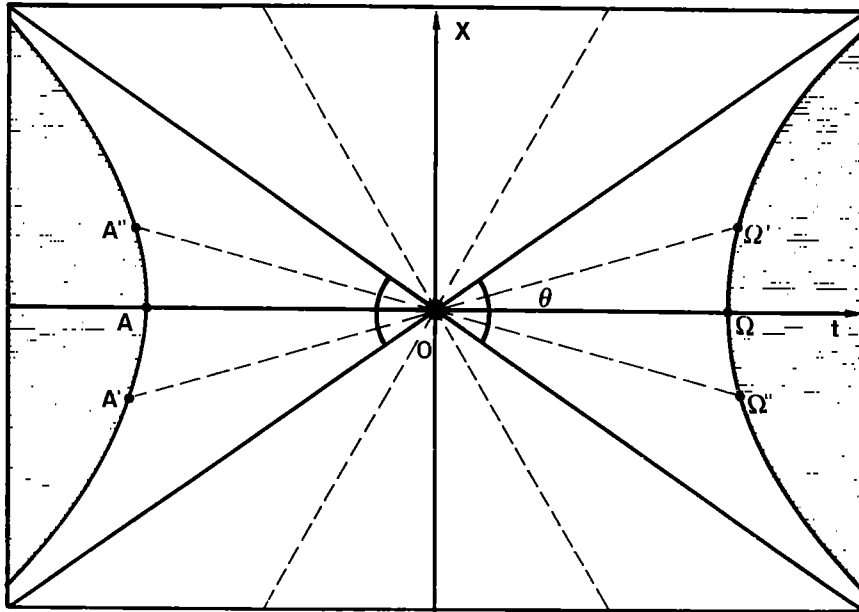


Figura 1. Nel cronotopo di Castelnuovo l'assoluto di Cayley-Klein rappresenta con le due falde, la singolarità iniziale e finale.

b) Le traslazioni temporali proiettive, di parametro T_0 , cioè

$$(3,4) \quad x' = \frac{x\sqrt{1-\gamma^2}}{1+\gamma t/t_0}; \quad t' = \frac{t+T_0}{1+\gamma t/t_0}$$

con $\gamma = cT_0/r = T_0/t_0$.

Dalla prime delle (3,4) si deduce che per $\gamma = \pm 1$ (cioè $t = \pm t_0$), si ha $x' = 0$ per ogni x , cioè l'Universo si riduce ad un punto (singolarità iniziale e finale).

Dalla seconda delle (3,4) segue la legge di addizione delle durate

$$(3,5) \quad t = \frac{t' + t''}{1 + t't''/t_0^2}$$

e quindi l'esistenza di una durata limite $t = t_0$, che si può interpretare come "età" dell'Universo.

Infine dalle stesse (3,4) segue la legge di espansione cosmica

$$(3.6) \quad \beta = \frac{\alpha}{1+\gamma} \quad \text{ovvero} \quad V = \frac{x}{t+t_0}$$

valida per $-t_0 < t \leq 0$, e la legge di contrazione cosmica

$$(3,7) \quad \beta = \frac{\alpha}{1 - \gamma} \quad \text{cioé} \quad V = \frac{x}{t_0 - t}$$

valida per $0 \leq t < +t_0$.

Se poi imponiamo alle equazioni di Maxwell l'invarianza per il gruppo di Fantappié, esse devono essere generalizzate in modo da comprendere anche il campo idrodinamico relativistico. Nasce in tal modo un importante legame tra la *cosmologia* e la *magnetoidrodinamica* (o fisica del plasma), nel senso che la problematica cosmologica risulta strettamente connessa al problema unitario materia-elettricità [6,7].

Otteniamo così una teoria simile alla "relatività cinematica" di Milne [14], in quanto nella RSP abbiamo due scale del tempo, e cioè il *tempo assoluto* (τ) ed il *tempo relativo* (t), legati dalla relazione

$$(3,8) \quad \tau = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + t/t_0}{1 - t/t_0} \right)$$

e quindi mentre nella scala τ l'Universo é infinito nel tempo, nella scala t , esso ha una singolarità iniziale e finale. Passando quindi dal cronotopo di Castelnuovo a quello di De Sitter, vengono eliminate le singolarità, cosa che permette la formulazione di leggi valide senza eccezioni.

4. Una nuova cosmologia "proiettiva"

Per studiare la cosmologia "proiettiva", basata sul gruppo di Fantappié, é opportuno introdurre il *tempo cosmico* (t'), e cioè il tempo relativo, contato a partire dall'istante iniziale (mentre t é contato a partire dal presente). Esso viene definito nel seguente modo

$$(4,1) \quad t' = t_0 + t \quad \text{ovvero} \quad \gamma' = 1 + \gamma$$

con $\gamma' = t'/t_0$. Ne segue che $\gamma = \gamma' - 1$, e per $\gamma = 0$, si ha $\gamma' = 1$ (epoca presente), mentre per $\gamma = -1$, si ha $\gamma' = 0$ (singolarità iniziale). Infine, per $\gamma = 1$, abbiamo $\gamma' = 2$ (singolarità finale).

É noto che nella RSP vengono introdotte le due quantità scalari

$$(4,2) \quad A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2; \quad B^2 = 1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2.$$

La prima si annulla nei punti dell'assoluto di Cayley-Klein ($A = 0$), mentre la seconda nei punti del cono-luce uscente dal punto $P(x, t)$. Al limite relativistico esse si riducono alle

$$(4,3) \quad A = 1; \quad B^2 = 1 - \beta^2$$

perché l'assoluto va all'infinito (spazio euclideo).

Se introduciamo il tempo cosmico t' , le (4,2) assumono la forma

$$(4,4) \quad \begin{cases} A^2 = \alpha^2 + \gamma'(2 - \gamma') \\ B^2 = 1 - (\alpha - \beta\gamma')[\alpha - \beta(\gamma' - 2)]. \end{cases}$$

Si deduce che $A = 1$ per $\alpha = \pm(\gamma' - 1)$, e cioè se ci poniamo sul cono-luce uscente dal punto di coordinate $(0, t_0)$, di equazione

$$(4,5) \quad x = \pm c(t' - t_0).$$

Invece si ha $B = 1$, per

$$(4,6) \quad \beta = \frac{\alpha}{\gamma'}; \quad \beta = \frac{\alpha}{\gamma' - 2}$$

le quali ci danno rispettivamente la legge di espansione e di collasso

$$(4,7) \quad V = \frac{x}{t'}; \quad V = \frac{x}{t' - 2t_0}$$

che si ottengono anche a partire dalle traslazioni proiettive (3,4) del gruppo di Fantappiè. Inoltre la prima formula coincide con quella postulata dal Milne nella sua relatività cinematica. Infine, dalle (4,7) segue che la velocità di fuga o di collasso è infinita nell'istante iniziale ($t' = 0$) ed in quello finale ($t' = 2t_0$).

Dalla prima delle (4,7) si deduce che in ogni epoca t' del passato, cioè per $0 < t' \leq t_0$, abbiamo una sfera di raggio

$$(4,8) \quad R(t') = ct'$$

entro la quale la velocità di fuga ha un valore minore della costante c . Tale raggio aumenta al passare del tempo: inizialmente è nullo, mentre all'epoca attuale ha il valore r .

Per concludere, ricordiamo che nella RSP l'Universo ipersferico di De Sitter ci appare come se fosse piatto (cronotopo di Castelnuovo), e viene così superato il problema dello spazio piatto.

5. Il problema dell'orizzonte e la velocità della luce

Nella RSP, il cono-luce uscente da un punto P del cronotopo di Castelnuovo è formato dalle rette tangenti all'assoluto di Cayley-Klein, e tale cono è ad apertura variabile (vedi fig. 2): ne segue che la *velocità della luce non è più costante*, in contrasto con il principio di relatività di Einstein. Quindi nella RSP la costante c coincide con la velocità della luce *solo localmente*. Poiché nelle prime fasi dell'evoluzione cosmica l'Universo è in rapida espansione, se la velocità della luce ha il valore costante c , sorge il problema degli orizzonti (n° 1) e l'Universo si spezzerebbe in parti incommunicabili ed indipendenti. Occorre allora fare la ipotesi inflazionaria (n° 2), che però solleva altre e più gravi difficoltà, come per esempio un raggio dell'Universo assai grande, in contrasto con i legami tra le varie costanti universali (Eddington-Dirac).

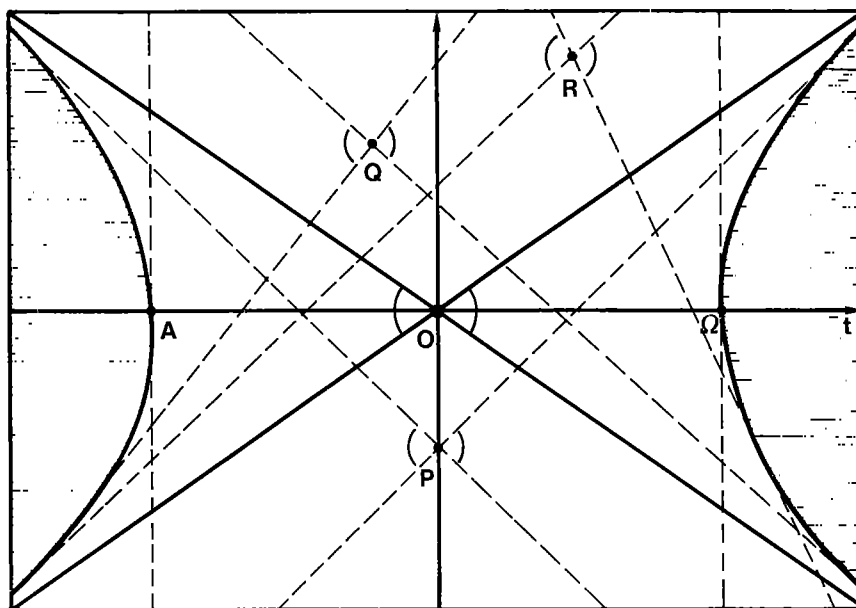


Figura 2. Nel cronotopo di Castelnuovo i coni-luce sono ad apertura variabile, e quindi la velocità della luce non è più costante.

Se ci limitiamo al caso bidimensionale (x, t) , nel cronotopo di Castelnuovo, da ogni punto $P(x, t)$ escono due rette di coefficienti angolari

$$(5.1) \quad k = \frac{-a\gamma \pm A}{1 - \gamma^2} \quad \text{con } A = \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2}$$

e la formula $-c \leq V \leq +c$ della relatività ristretta, viene sostituita dalla relazione

$$(5,2) \quad \frac{-c(A + \alpha\gamma)}{1 - \gamma^2} \leq V \leq \frac{+c(A + \alpha\gamma)}{1 - \gamma^2} .$$

Le due rette del cono-luce uscenti da P formano allora un angolo variabile, dato dalla semplice formula

$$(5,3) \quad \tan \theta = \frac{k' - k''}{1 + k'k''} = \frac{2A}{\alpha^2 + \gamma^2} .$$

Ne segue che nell'origine si ha $\theta = \pi/2$, nei punti dell'assoluto (dove $A = 0$) si ha $\theta = 0$ e nei punti del cono-luce dell'osservatore (dove si ha $\alpha = -\gamma$), si ha $\tan \theta = 1/\alpha^2$.

Poiché l'Universo da noi osservato é dato dalla falda del passato del cono-luce uscente dall'origine, e per tali punti si ha $\alpha = -\gamma$, la (5,2) assume una forma più interessante

$$(5,4) \quad -c \leq V \leq \frac{+c(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} .$$

Si arriva allora all'importante risultato che nell'Universo *visibile*, la velocità limite di *avvicinamento* ha il valore c , mentre la velocità limite di *allontanamento* ha un valore iper- c . Per tale motivo, la velocità di fuga delle galassie può superare il valore c , in accordo con l'esistenza dei "quasar superveloci". In effetti tali velocità iper- c sono apparenti, in quanto noi vediamo un Universo ipersferico come se fosse piatto [8].

Possiamo quindi concludere che la luce proveniente dalle stelle e galassie ha la velocità costante c , mentre ciò non accade fuori del cono-luce, dove abbiamo le due velocità

$$(5,5) \quad C_1 = \frac{-c(A + \alpha\gamma)}{1 - \gamma^2} ; \quad C_2 = \frac{+c(A - \alpha\gamma)}{1 - \gamma^2} .$$

In particolare, per $x = 0$, e cioè sull'asse del tempo vale la seguente formula

$$(5,6) \quad C = \frac{\pm c}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

e nelle singolarità iniziale e finale si ha $C \rightarrow \infty$.

Tenendo conto che adesso i cono-luce sono ad apertura variabile, dalla figura 2 si deduce che l'orizzonte del punto P tende a diventare infinito se ci avviciniamo all'istante iniziale. Viene in tal modo risolto il problema dell'orizzonte, senza fare nuove ipotesi più o meno arbitrarie, ma sostituendo il cronotopo di Minkowski con quello di Castelnuovo, in cui cade il principio della costanza della velocità della luce.

6. L'esplosione-collasso e la variazione della massa

Secondo la teoria standard del Big-Bang, l'Universo si espande a partire da uno stato iperdenso in cui era concentrata tutta la materia e l'energia. Nasce allora il problema della singolarità iniziale, perchè in base alle leggi fisiche note, la massa-energia si conserva, e quindi non è previsto il fenomeno di "creazione" dal nulla di materia.

Passando invece alla RSP, occorre fare una profonda revisione della meccanica, ed allora si trova che la massa varia non solo con la velocità, ma anche con la distanza spazio-temporale [9,10]. Più precisamente, nel caso di due dimensione (x, t) , otteniamo una legge simile a quella proposta da Milne [14], cioè

$$(6,1) \quad m = m_0 \frac{1 + \alpha^2 - \gamma^2}{\sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}} = \frac{m_0 A^2}{B}$$

dove m_0 è la massa propria. Ne segue che la massa si annulla nei punti dell'assoluto ($A = 0$), mentre diventa infinita sul cono-luce uscente dal punto $P(x, t)$, dove $B = 0$.

Se teniamo conto della legge di espansione cosmica $\beta = \alpha/(1 + \gamma)$, la (6,1) si riduce alla

$$(6,2) \quad m = m_0(1 + \alpha^2 - \gamma^2) = m_0 A^2$$

e se ci poniamo sul cono-luce dell'osservatore ($\alpha = -\gamma$), ne segue che $m = m_0$, cioè che la velocità di fuga è tale che l'aumento di massa dovuto alla velocità è esattamente compensato dalla variazione dovuta alla distanza spazio-temporale, come nella teoria di Milne.

Nella RSP, il momento angolare e quello lineare non si conservano più separatamente, ed allora si trova una nuova legge di equivalenza tra la massa ed il momento "polare" di inerzia $I = m_0 x^2$, cioè

$$(6,3) \quad m = m_0 + \frac{I}{r^2}$$

e quindi la (6,2) si può scrivere così

$$(6,4) \quad m = m_0(1 - \gamma^2) + \frac{I}{r^2}.$$

Ne segue che inizialmente ($t = -t_0$ ed $x = 0$) la massa era nulla, poi aumenta sia al passare del tempo che col rapido aumento del momento di inerzia, dovuto all'espansione cosmica (creazione continua), e raggiunge il valore massimo per $t = 0$

(presente). Poi il processo si inverte ed inizia la fase di collasso, con diminuzione della massa, che si annulla per $t = +t_0$ (singolarità finale). Possiamo quindi affermare che nell'istante iniziale e finale abbiamo una "singolarità nuda" e cioè priva dell'orizzonte degli eventi.

Si vede quindi che nella "cosmologia proiettiva" basata sul gruppo di Fantappiè, la esplosione-collasso dell'Universo è intimamente accoppiata ad un processo di creazione-annichilazione di materia, in accordo con le idee di Hoyle [12]. Nell'istante iniziale si ha una velocità di espansione infinita, e viene creato tutto lo spazio (piatto). Poi appare la materia, che si condensa in particelle, galassie, stelle, come sostiene la cosmologia "inflazionaria". Ma mentre nella teoria di Hoyle non vale più il principio di conservazione massa-energia, e viene quindi a crollare un pilastro della fisica, nella RSP il principio di conservazione del momento lineare, viene sostituito da quello più generale di conservazione del momento lineare ed angolare, con conseguente trasmutazione massa-momento di inerzia.

Bibliografia

1. A. Andreas and P. J. Steihard, Cosmology for grand unification theories with radiatively induced symmetry breacken, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982).
2. G. Arcidiacono, *Projective Relativity, Cosmology and Gravitation*, Hadronic Press, Cambridge (Mass., USA), 1986.
3. G. Arcidiacono, *Relatività e Cosmologia*, Vol. 2, Libreria Veschi, Roma, 1987.
4. G. Arcidiacono, Sul significato fisico della "relatività finale", *Rend. Acc. Lincei* **20** (1956), 463-469.
5. G. Arcidiacono, A new projective relativity, based on the De Sitter Universe, *Gen. Rel. Grav.* **7** (1976), 885-889.
6. G. Arcidiacono, Le equazioni di Maxwell generalizzate, *Rend. Acc. Lincei* **18** (1955), 515-519.
7. G. Arcidiacono, Magnetohydrodynamics and cosmology, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978), 949-956.
8. G. Arcidiacono, Relatività finale e cosmologia, *Collect. Math.* **12** (1960), 3-32.
9. G. Arcidiacono, L'Universo di De Sitter e la meccanica, *Collect. Math.* **20** (1969), 231-255.
10. G. Arcidiacono, The De Sitter universe and Mechanics, *Gen. Rel. Grav.* **8** (1977), 865-870.
11. B. Bertotti, Cosmologia, scienza peculiare, in *Il Problema del Cosmo*, Enciclopedia Italiana, Roma, 1982, p. 152.
12. F. Hoyle, A covariant formulation of the law of creation of matter, *Mon. Not.* **42** (1960), 256-261.
13. A. D. Lindle, A new inflationary scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems, *Phys. Lett.* **108B** (1982), 150 .
14. E. A. Milne, *Kinematic Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1948.
15. J. Merleau-Ponty, *Cosmologia del XX Secolo*, Il Saggiatore, Milano, 1977.
16. J. V. Narlikar and T. Padmanabham, *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology*, D. Reidel, Amsterdam, 1986.
17. D. W. Sciama, *Modern Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1975.

