Collect. Math. **39** (1988), 21–29
© 1989 Universitat de Barcelona

Espacios L^α e integración bornológica

M. E. Ballve

Departamento de Matemáticas Fundamentales,
Facultad de Ciencias, UNED, 28040 Madrid, Spain

Received 15/DEC/88

Abstract

The L^α spaces are introduced for functions valued in bornological convex spaces and their basic properties are studied. Among other questions, the completeness of these spaces is stated and their bornological duals are determined. Also, a representation theorem is proved for operators defined on them.

En [4,5] se establecen los principios de una teoría de la medida e integración en espacios bornológicos convexos y se prueba un teorema de Radon-Nikodym para medidas bornológicas. Además de su interés intrínseco, hay que destacar (como se señala en [4]) que gran parte de las medidas vectoriales y de las funciones integrables valoradas en una amplia gama de espacios localmente convexos, se reducen en un último término a medidas y funciones valoradas en un espacio normado E_B. Por otra parte, este carácter bornológico aparece claramente en los teoremas del tipo de Radon-Nikodym en espacios localmente convexos y en algunas integrales respecto a medidas valoradas en operadores entre espacios localmente convexos, como la desarrollada en [12] (ver también [1,11,13]).

En este trabajo se introducen y estudian los espacios L^α de funciones valoradas en espacios bornológicos convexos, siguiendo la integral definida en [4], estudiándose sus propiedades básicas, determinándose el dual bornológico de estos espacios y dando un teorema de representación de operadores definidos sobre los mismos.

Así como al pasar a la integración de funciones valoradas en espacios localmente convexos, no se trasladan automáticamente algunas de las propiedades clásicas de los espacios L^α para la integral de Bochner (de funciones valoradas en espacios de Banach) como las referentes a la dualidad y la completitud de estos espacios (ver por ejemplo [2,3,11]), en el caso de los espacios L^α bornológicos, se sigue manteniendo la propiedad referente a la completitud (ver el teorema 4) obteniéndose un resultado en lo tocante a la dualidad (ver el teorema 9) que recuerda más al que se verifica en el caso de espacios localmente convexos (ver [3]), lo cual pone una vez más de manifiesto el carácter "intermedio" de los espacios bornológicos frente a los espacios de Banach y los localmente convexos en general.

El hecho probado en la proposición 8, de que el rango de toda medida bornológica que tenga una densidad en $L^\alpha(E)$ $(1 \leq \alpha \leq \infty)$ sea un acotado de la bornología de E (nótese que no toda medida bornológica es acotada [4], a diferencia de lo que ocurre con las medidas valoradas en espacios vectoriales topológicos localmente convexos) permite introducir de manera natural la $(\alpha, \mathcal{B})$-propiedad de Radon-Nikodym, pudiéndose probar (aunque no se hace aquí por obtenerse de manera standard a partir de los resultados conocidos para espacios de Banach) que un espacio bornológico convexo tiene la $(\alpha, \mathcal{B})$ PRN si y sólo si E_B tiene la α-PRN para todo disco acotado y completante B de E (en [2] se hace un estudio de la α-PRN en el marco de los espacios localmente convexos), pudiéndose dar también una caracterización mediante convergencia de martingalas (definiendo estos conceptos de manera natural a partir de los correspondientes para espacios de Banach).

A lo largo de este trabajo, denotaremos por (Ω, Σ, μ) un espacio de medida (no negativa) que supondremos finito y completo, por E un espacio bornológico convexo separado y completo que supondremos regular y por $E^\times$ el dual (bornológico) del espacio E. Representaremos por $\mathcal{B}$ la bornología del espacio E y siguiendo la notación usual de Grothendieck, para cada disco acotado $B \in \mathcal{B}$ designaremos por E_B al subespacio vectorial de E generado por B, dotado de la topología asociada a la norma definida por el funcional de Minkowski p_B de B en E_B.

1. Definicion [4]. Diremos que una función $f : \Omega \to E$ es medible si existe una sucesión de funciones simples que converge a f casi uniformemente en el sentido de Mackey (e.d. para cada $\epsilon > 0$ existen $K_\epsilon \in \Sigma$ y un disco $B_\epsilon \in \mathcal{B}$ tales que $\mu(\Omega - K_\epsilon) < \epsilon$ y (f_n) converge a f uniformemente sobre K_ϵ, en el espacio normado E_{B_ϵ}). A la sucesión (f_n) la llamaremos sucesión aproximadora de f.

Si f es una función medible y (f_n) es una sucesión aproximadora de f, denotaremos por $U(f, f_n)$ a la familia de todos los conjuntos medibles $K \in \Sigma$ tales que la sucesión (f_n) converge a f uniformemente sobre K en el sentido de Mackey.

2. DEFINICION [4]. Diremos que una función medible f es integrable si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

2.1. Se verifican:

2.1.1. La función $t \mapsto \langle f(t), x' \rangle$ es integrable para todo $x' \in E'$.

2.1.2. Para cada conjunto $A \in \Sigma$, existe $\int_A \cdot \in E$ tal que:

$$\left\langle \int_A \cdot \, , x' \right\rangle = \int_A \langle f, x' \rangle \, d\mu$$

para todo $x' \in E'$.

2.1.3. La aplicación $m_f : \Sigma \to E$ definida por

$$m_f(A) = \int_A f \, d\mu,$$

es una medida bornológica (ver [4]).

2.2. Para toda sucesión disjunta (K_n) de elementos de $U(f, f_n)$, existe un disco acotado completante B tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} f \, d\mu$$

es sumable en E_B.

3. DEFINICION. Para $1 \leq \alpha < +\infty$ denotaremos por $\mathcal{L}^\alpha(E)$ el espacio de las funciones $f : \Omega \to E$ tales que existe un disco acotado y completante B (dependiente de f) tal que $f(t) \in E_B$ para c.t.p. $t \in \Omega$, la función $f : \Omega \to E_B$ (definida en c.t.p. de Ω) es integrable Bochner y

$$\int_\Omega p_B^\alpha(f) \, d\mu < +\infty. \tag{3.1}$$

Análogamente, denotaremos por $\mathcal{L}^\infty(E)$ el espacio de las funciones $f : \Omega \to E$ tales que existen un conjunto de medida nula N_f y un disco acotado y completante B (dependiente de f) tal que $f(t) \in E_B$ para c.t.p. $t \in \Omega$ y la función $f : \Omega \to E_B$ (definida en c.t.p.) es integrable Bochner y $f(\Omega - N_f) \in \mathcal{B}$.

Denotaremos, como es usual, por $L^\alpha(E)$ y $L^\infty(E)$ los correspondientes espacios de clases de equivalencia, referidas a la relación de coincidencia en c.t.p.. Evidentemente, toda función $f \in L^\alpha(E)$ es integrable y

$$L^\alpha(E) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_c} L^\alpha(E_B)$$

para todo $1 \leq \alpha \leq +\infty$, siendo $\mathcal{B}_c$ la familia de los discos acotados completantes de E y $L^\alpha(E_B)$ el espacio usual correspondiente a las funciones Bochner integrables valoradas en el espacio de Banach E_B. Además $L^\alpha(E) \subset L^\beta(E)$ para $1 \leq \beta < \alpha \leq +\infty$, según se comprueba fácilmente.

Nótese que si el espacio E verifica la condición de numerabilidad de Mackey, e.d., toda sucesión de acotados es absorbida por un acotado (dependiente de dicha sucesión) (en particular, en un espacio de Fréchet, las bornologías de Von Neumann, de los compactos y de los débilmente compactos, verifican esta condición, ver [7]), entonces para cada función medible f existe un disco acotado y completante B tal que $f(t) \in E_B$ para c.t.p. $t \in \Omega$ y f como función de Ω en E_B es una función fuertemente medible. En [4], se dan condiciones suficientes para que una función medible sea Bochner integrable como función E_B valorada, para algún disco acotado y completante B.

4. Teorema

Consideremos la familia

$$\mathcal{B}_\alpha = \left\{ B_{\alpha,\rho} : B \in \mathcal{B}_c,\ \rho \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

donde $B_{\alpha,\rho}$ es el conjunto de las funciones $f : \Omega \to E$ tales que $f(t) \in E_B$ para casi todo punto $t \in \Omega$, la función $f : \Omega \to E_B$ es Bochner integrable y

$$p_{B,\alpha}(f) = \left[\int_\Omega p_B^\alpha(f)\, d\mu \right]^{1/\alpha} \leq \rho$$

si $1 \leq \alpha < +\infty$ y

$$p_{B,\infty}(f) = \operatorname{ess\,sup} \left\{ p_B[f(t)] : t \in \Omega \right\} \leq \rho.$$

Entonces, $\mathcal{B}_\alpha$ es base de una bornología en $L^\alpha(E)$ localmente convexa, separada y completa, que denotaremos también por $\mathcal{B}_\alpha$. En adelante, supondremos a $L^\alpha(E)$ dotado de esta bornología.

Demostración. Evidentemente,

$$L^\alpha(E) = \bigcup \left\{ B_{\alpha,\rho} : B \in \mathcal{B}_c,\ \rho \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

por definición del espacio $L^\alpha(E)$, y si $B^1, B^2 \in \mathcal{B}_c$ y $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_+$ entonces existe $B \in \mathcal{B}_c$ tal que $B^1 \cup B^2 \subset B$ y $B^1_{\alpha,\rho_1} \cup B^2_{\alpha,\rho_2} \subset B_{\alpha,\rho}$ con $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$, ya que la inclusión $E_{B^i} \subset E_B$ es continua. Por tanto, $\mathcal{B}_c$ es efectivamente una base de una bornología en $L^\alpha(E)$, que según se demuestra fácilmente, es convexa y separada. Además, todo $B_{\alpha,\rho} \in \mathcal{B}_c$ es un disco completante, puesto que

$$[L^\alpha(E)]_{B_{\alpha,\rho}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_{\alpha,\rho} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\alpha,n\rho} = L^\alpha(E_B),$$

la aplicación identidad de $L^\alpha(E_B)$ en $[L^\alpha(E)]_{B_{\alpha,\rho}}$ es un homeomorfismo ya que

$$p_{B_{\alpha,\rho}}(f) = \inf\{\lambda > 0 : f \in \lambda B_{\alpha,\rho}\} = \frac{1}{\rho}\left[\int_\Omega p_B^\alpha(f)\,d\mu\right]^{1/\alpha}$$

para todo $f \in L^\alpha(E_B)$ y, según sabemos, el espacio $L^\alpha(E_B)$ es un espacio de Banach (con la norma usual) por ser B un disco completante. □

5. Proposición

Las funciones simples constituyen un subespacio vectorial denso en $L^\alpha(E)$ para todo $1 \leq \alpha < +\infty$.

Demostración. En efecto, si $f \in L^\alpha(E)$ entonces existe un disco acotado y completante B de E tal que $f \in L^\alpha(E_B)$ y, por consiguiente existe una sucesión de funciones simples (s_n) que converge a f en $L^\alpha(E_B)$ y, por tanto converge en $[L^\alpha(E)]_{B_{\alpha,1}}$ y la sucesión (s_n) converge a f en sentido de Mackey. □

6. Proposición

La aplicación de $L^\alpha(E)$ en E definida a partir de la integral, es una aplicación lineal y acotada para todo $1 \leq \alpha \leq +\infty$.

Demostración. En efecto, sea T la aplicación de $L^\alpha(E)$ en E definida por

$$T(f) = \int_\Omega f\,d\mu$$

para toda $f \in L^\alpha(E)$ y sea $B_{\alpha,\rho} \in \mathcal{B}_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned} p_B[T(f)] &\leq \int_\Omega p_B(f)\,d\mu \\ &\leq p_{B_{\alpha,\rho}}(f)\,[\mu(\Omega)]^{1/\beta} \\ &\leq \rho[\mu(\Omega)]^{1/\beta} \end{aligned}$$

para toda $f \in B_{\alpha,\rho}$, siendo $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$, y, por consiguiente,

$$T(B_{\alpha,\rho}) \subset \rho[\mu(\Omega)]^{1/\beta} B \in \mathcal{B}$$

como queríamos demostrar. □

7. Proposición

Si T es una aplicación lineal y acotada de E en otro espacio bornológico convexo separado y completo F, entonces la aplicación $\varphi : L^\alpha(E) \to L^\alpha(F)$ definida por $\varphi(f) = T \circ f$ para toda $f \in L^\alpha(E)$, es lineal y acotada, para todo $1 \leq \alpha \leq +\infty$.

Demostración. En efecto, si $B_{\alpha,\rho} \in \mathcal{B}_\alpha$, entonces existe un disco acotado completante B' de F tal que $T(B) \subset B'$ y, por consiguiente,

$$T(E_B) = T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(B) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB' = F_{B'},$$

$$p_{B'}[T(x)] \leq p_B(x)$$

para todo $x \in E_B$ y $T : E_B \to F_{B'}$ es lineal y continua y $\varphi(B_{\alpha,\rho}) \subset B'_{\alpha,\rho}$, de donde resulta inmediatamente que la aplicación lineal φ es acotada. □

8. Proposición

Si $f \in L^\alpha(E)$ para $1 \leq \alpha \leq +\infty$, entonces $m_f(\Sigma) \in \mathcal{B}$.

Demostración. Si $f \in L^\alpha(E)$ entonces existen un disco acotado y completante B de E y un conjunto $N_f \in \Sigma$ tales que $\mu(N_f) = 0$ y $f : \Omega - N_f \to E_B$ es Bochner integrable y, por tanto $m_f(\Sigma) \subset E_B$ y de la proposición 3 de [4] resulta que $m_f(\Sigma) \in \mathcal{B}$. □

Nótese que, si bien es conocido que el rango de una medida valorada en un espacio localmente convexo es un subconjunto acotado del espacio, este resultado no es cierto en general para medidas valoradas en espacios bornológicos convexos.

9. Teorema

Si $1 \leq \alpha < +\infty$ y el dual $(E_B)'$ del espacio de Banach E_B tiene la propiedad de Radon-Nikodym para todo disco acotado y completante B de E, entonces

$$[L^\alpha(E)]^\times = \bigcap_{B\in\mathcal{B}_c} L^\beta[(E_B)'],$$

siendo $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$.

Demostración. En efecto, sea T una aplicación lineal y acotada de $L^\alpha(E)$ en $\mathbf{R}$, entonces para todo disco acotado completante B de E, existe $M > 0$ tal que $|T(f)| \leq M$ para toda $f \in B_{\alpha,1}$ y, por tanto, como la bola unidad de $L^\alpha(E_B)$ coincide con $B_{\alpha,1}$, T determina una aplicación lineal de $L^\alpha(E_B)$ en $\mathbf{R}$ acotada sobre la bola unidad de $L^\alpha(E_B)$ y, por consiguiente, $T \in \left[L^\alpha(E_B)\right]' = L^\beta\left[(E_B)'\right]$ para todo disco $B \in \mathcal{B}_c$.

Recíprocamente, si

$$T \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}_c} L^\beta\left[(E_B)'\right]$$

entonces $T \in [L^\alpha(E_B)]'$ para todo $B \in \mathcal{B}_c$ y para cada disco acotado y completante B de E, existe $M_B > 0$ tal que la imagen por T de la bola unidad de $L^\alpha(E_B)$ (que coincide con $B_{\alpha,1}$) está contenida en el intervalo $[-M_B, M_B]$ y, por tanto,

$$T(B_{\alpha,\rho}) = \rho T(B_{\alpha,1}) \subset [-\rho M_B, \rho M_B]$$

para todo $\rho \in \mathbf{R}_+$, de donde resulta que $T \in \left[L^\alpha(E)\right]^\times$. □

10. DEFINICION. Sea F otro espacio bornológico, separado, completo y regular y denotemos por $\mathcal{B}'$ su bornología y por $G = L(E, F)$ el espacio de las aplicaciones lineales y acotadas de E en F dotado de la bornología natural. Diremos que una medida bornológica $m : \Sigma \to G$ es de α-variación acotada ($1 \leq \alpha < +\infty$) si:

$$\left\{ \int_\Omega s\, dm : s \in S_1^\beta(E_B) \right\} \in \mathcal{B}'$$

para todo disco acotado $B \in \mathcal{B}$, siendo $S_1^\beta(E_B)$ el conjunto de las funciones simples $s : \Omega \to E_B$ pertenecientes a la bola unidad cerrada del espacio $L^\beta(E_B)$ con $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ (la integral de las funciones simples de Ω en E, respecto a la medida m se define de manera natural, ver [12]). En adelante, denotaremos por $V_\alpha(G)$ el espacio de las medidas G valoradas (definidas en Σ) de α variación acotada.

11. Teorema

Con las notaciones anteriores, si $1 \leq \alpha < +\infty$ entonces existe un isomorfismo entre el espacio de los operadores lineales y acotados de $L^\alpha(E)$ en F y el espacio de las medidas (bornológicas) G valoradas de β variación acotada, siendo $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$.

Demostración. En efecto, si $m \in V_\beta(G)$ definamos

$$T_m(s) = \int_\Omega s\,dm \tag{11.1}$$

para toda función simple $s : \Omega \to E$. Entonces, de la proposición 5 resulta, por ser m de β variación acotada, la existencia de un único operador lineal y acotado, que seguiremos denotando por T_m, de $L^\alpha(E)$ en F que verifica (11.1) y, por consiguiente, si $m' \in V_\beta(G)$ es tal que $T_m = T_{m'}$ entonces se verifica que

$$\begin{aligned} m(A) &= T_m(x\chi_A) \\ &= T_{m'}(x\chi_A) \\ &= m'(A)(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$ y, por tanto, $m \equiv m'$.

Por otra parte, dado un operador lineal y acotado $T : L^\alpha(E) \to F$, definamos $m_T : \Sigma \to G$ de la siguiente manera:

$$m_T(A)(x) = T(x\chi_A)$$

para todo $A \in \Sigma$ y todo $x \in E$. Entonces, para cada $A \in \Sigma$, $m_T(A)$ es evidentemente una aplicación lineal de E en F, y para cada $B \in \mathcal{B}_c$ se tiene que

$$m_T(A)(B) \subset T\left(B_{\alpha,\mu(\Omega)^{1/\alpha}}\right),$$

de donde por ser el operador T acotado resulta que $m_T(A)(B) \in \mathcal{B}'$ y $m_T(A) \in G$. Además, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta, entonces para cada $B \in \mathcal{B}_c$ se tiene que $B' = T(B_{\alpha,1}) \in \mathcal{B}'$ y

$$x\,\chi_{\bigcup_{k\geq n} A_k} \in \left[\mu\left(\bigcup_{n\geq k} A_k\right)\right]^{1/\alpha} B_{\alpha,1},$$

de donde por ser

$$\lim_n \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0,$$

resulta que

$$m_T\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} m_T(A_k)$$

en G y m_T es una medida que además pertenece a $V_\beta(G)$ ya que para todo $B \in \mathcal{B}_c$ se verifica que

$$\left\{ \int_\Omega s\, dm_T : s \in S_1^\alpha(E_B) \right\} = T(S_1^\alpha(E_B)) \\ \subset T(B_{\alpha,1}) \in \mathcal{B}'. \ \square$$

12. Corolario

Si $1 \leq \alpha < +\infty$, entonces existe un isomorfismo entre el espacio $[L^\alpha(E)]^\times$, dual bornológico del espacio $L^\alpha(E)$, y el espacio $V_\beta(E^\times)$ de las medidas $E^\times$-valoradas de β variación acotada, siendo $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$.

Referencias

1. A. Balbas and P. Jiménez Guerra, Representation of operators by bilinear integrals, *Czech. Math. J.* **37** (1987), 551–558.
2. M. E. Ballvé, *Espacios L^p de Funciones Vectoriales*, UNED, Madrid, 1988.
3. M. E. Ballvé and J. L. de María, On the dual of L^α for locally convex spaces, *Atti. Sem. Mat. Modena*, to appear.
4. F. Bombal, Medidas e integración en espacios bornológicos, *Rev. Acad. Ci. Madrid* **75** (1981), 116–137.
5. F. Bombal, El teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos, *Rev. Acad. Ci. Madrid* **75** (1981), 140–154.
6. J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.
7. A. Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Bras.* 3 (1954), 57–122.
8. H. Hogbé-Nlend, *Théorie des Bornologies et Applications*, Lecture Notes in Mathematics 213, Springer, Berlin, 1971.
9. H. Hogbé-Nlend, *Les bornolgies et l'Analyse Fonctionnelle*, Université de Bordeaux, Bordeaux, 1974.
10. P. Jiménez Guerra, Derivación de medidas e integración vectorial bilineal, *Rev. R. Acad. Ci. Madrid* **82** (1988), 115–128.
11. P. Jiménez Guerra and B. Rodríguez Salinas, On the completeness of L^α for locally convex spaces, *Arch. Math.* **52** (1989), 82–91.
12. R. Rao Chibukula and A. S. Sastry, Product vector measures via Bartle integrals, *J. Math. Anal.* **96** (1983), 180–195.
13. S. A. Sivasankara, *Vector Integrals and Product Vector Measures*, Univ. Microfilm Inter., Michigan, 1983.