Collect. Math. **39** (1988), 9–19

Una nota acerca de los puntos E-estables perfectos y propios

Ezio Marchi*

Instituto de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Luis, San Luis, Argentina

Received 17/MAR/88

Abstract

The results of Selten and Myerson about perfect and proper equilibrium points are extended to the case where the payoff functions are not multilinear functions. Using these results it is extended the E-stable points due to Marchi in the sense of Selten and Myerson obtaining the existence of E-stable points perfect and proper, under a certain condition which is called E-partitioned.

Introducción

Es bien conocido en el ámbito de la teoría de juegos de estrategia que los puntos de equilibrio de Nash para juegos n–personales no-cooperativos han sido refinados en la década del setenta por Selten [10] y posteriormente por Myerson [9]. Ellos introdujeron los conceptos de equilibrio perfecto y propio respectivamente. En este marco hay varia actividad e interés, lo cual se puede ver en el libro de van Damme [2].

Es nuestro interés hacer notar que en situaciones más generales para las funciones de pago de juegos no-cooperativos donde la esperanza matemática está expresada en forma arbitraria y continua y no sólo en una formal multilineal, los resultados de Selten y Myerson siguen valiendo. Como este problema matemático

* Trabajo realizado en el Departamento de Matemática Aplicada y Análisis de la Universidad de Barcelona durante una visita financiada por el Ministerio de Educación y Ciencia de España, en el marco del Proyecto de Cooperación Educativa y Científica con Iberoamérica

no se encuentra en el marco de la teoría de juegos no-cooperativos, es por ello que en la sección 1 de este trabajo se introduce y estudia un equilibrio de un número arbitrario de funciones caracterizando en dos formas diferentes muy simples a los puntos de equilibrio del problema planteado. En la sección siguiente se hace notar que los puntos perfectos y propios de equilibrio pueden extenderse al caso general descrito en la sección anterior.

Como una consecuencia de los resultados de la sección 2 que esencialmente son los de Myerson se puede estudiar la extensión de los puntos E-estables debida a Marchi [4,5], lo cual se hace en el sentido de Selten y Myerson obteniendo puntos E-estables perfectos y propios. Esto no se puede hacer en general ya que la primera caracterización de puntos de equilibrio dada en la Proposición 1, no se puede extender en general al caso en que la función esperanza en vez de ser lineal en la variable del jugador correspondiente sea convexa como se necesita para estudiar E-estabilidad. Sin embargo se introducen en este trabajo juegos n–personales E-particionados los cuales tienen cierta conexión o forma del tipo de los de polijuegos. Para estos juegos vale la correspondiente caracterización análoga a la Proposición 1 para puntos E-estables.

En la sección 3 mostramos que aplicando los resultados anteriores se obtiene la existencia de puntos perfectos y propios E-estables para juegos E-particionados. Deseamos mencionar que en forma directa los resultados de Selten y Myerson no serían aplicables para la obtención de la existencia de los puntos dados en la sección 3. Al final algunos comentarios relacionados con los puntos correlativos de Aumann introducidos en [1] y los cooperativos debidos a Marchi [6,7] se comentan.

1. Caracterización del equilibrio

Sea un conjunto finito no vacío $N = \{1, \dots, n\}$. Para cada $i \in N$ sea otro conjunto finito no vacío S_i. Considere el conjunto

$$\Delta(S_i) = \left\{ \sigma_i \in \mathbb{R}^{|S_i|} : \sigma_i(s_i) \geq 0 \ \forall s_i \in S_i \text{ y } \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\}$$

donde $|Si|$ es la cardinalidad del conjunto S_i y $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales.

Sea el conjunto

$$\Delta_{-i} = \prod_{j \neq i} \Delta(S_j)$$

y considérese para cada $i \in N$ una función continua arbitraria

$$V_i : S_i \times \Delta_{-i} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Es posible extender en forma natural la función V_i al conjunto

$$\Delta = \Delta(S_i) \times \Delta_{-i}$$

del siguiente modo. Sea la función

$$\nu_i : \Delta(S_i) \times \Delta_{-i} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i} \sigma(s_i) V_i(s_i, \sigma_{-i})$$

tal extensión natural, donde $\sigma_i = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \in \Delta_{-i}$.

Entonces se define un punto de equilibrio de un tal problema como un punto $\sigma \in \Sigma$ tal que para todo $i \in N$:

$$\nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \nu_i(\bar{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \qquad \forall \bar{\sigma}_i \in \Delta(S_i).$$

Para un tal punto presentamos el siguiente resultado

Proposición 1

Un punto s es de equilibrio si y sólo si

$$\nu_i(s_i, \sigma_{-i}) < \nu_i(s_i', \sigma_{-i})$$

implica

$$\sigma_i(s_i) = 0 \qquad \forall i \; \forall s_i \; \forall s_i'.$$

Demostración. Sea σ un punto de equilibrio y considere por el absurdo que existan i, s_i y s_i' tales que

$$\nu_i(s_i, \sigma_{-i}) < \nu_i(s_i', \sigma_{-i})$$

con $\sigma_i(s_i) > 0$. Entonces como

$$\nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i' \neq s_i} \sigma_i(s_i') V(s_i', \sigma_{-i}) + \sigma_i(s_i) V_i(s_i, \sigma_{-i})$$

defínase el punto $\tilde{\sigma}_i \in \Delta(S_i)$ por medio de

$$\tilde{\sigma}_i(\bar{s}_i) = \begin{cases} \sigma_i(s_i) & \text{si } \bar{s}_i \neq s_i, s_i' \\ 0 & \text{si } \bar{s}_i = s_i,\ \bar{s}_i \neq s_i' \\ \sigma_i(s_i) + \sigma_i(s_i') & \text{si } \bar{s}_i = s_i'. \end{cases}$$

Entonces como

$$\nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i' \neq s_i} \sigma_i(s_i') V_i(s_i, \sigma_{-i}) + \sigma_i(s_i) V_i(s_i, \sigma_{-i})$$

y claramente

$$\nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < \nu_i(\tilde{\sigma}_i, \sigma_{-i})$$

lo cual es imposible ya que el punto σ era de equilibrio.

Ahora vamos a ver el recíproco. Para ello vamos a ver una interesante propieda de cualquier punto de equilibrio. Sea σ un tal punto y sea el valor

$$\lambda_i = \nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

el valor que i obtiene en ese punto. Definamos $\operatorname{sop} \sigma_i$ como el soporte del punto σ es decir

$$\operatorname{sop} \sigma_i = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}.$$

Veamos ahora que si $s_i \in \operatorname{sop} \sigma_i$ entonces

$$\lambda_i = \nu_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Supongamos que esto no fuera cierto. Entonces existen un i y un $s_i \in \operatorname{sop} \sigma_i$ tale que

$$\lambda_i \neq \nu_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Por ser punto de equilibrio tiene que valer

$$\lambda_i > \nu_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Pero en un tal caso como para los otros $s_i \in \operatorname{sop} \sigma_i$ siempre se tiene que

$$\lambda_i \geq \nu_i(s_i, \sigma_{-i}),$$

entonces se obtendría

$$\begin{aligned}\lambda_i &> \sum_{s_i \in \operatorname{sop} \sigma_i} \sigma_i(s_i) V_i(s_i, \sigma_{-i}) \\ &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \nu_i(s_i, \sigma_{-i}) \\ &= \nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

Para ver el recíproco sólo hace falta ver que si para algún i, s_i, hay un s_i' con

$$\nu_i(s_i, \sigma_{-i}) < \nu_i(s_i', \sigma_{-i})$$

entonces como

$$\nu_i(s_i', \sigma_{-i}) \leq \lambda_i$$

por ser punto de equilibrio, el punto $s_i \notin \operatorname{sop} \sigma_i$ lo que implica $\sigma_i(s_i) = 0$. □

En realidad similarmente como en la demostración de la Proposición 1 vale el siguiente resultado el cual se puede considerar equivalente a la caracterización de puntos de equilibrio dada arriba.

Proposición 2

Un punto s es de equilibrio si y sólo si el sistema siguiente tiene solución σ.

$$\begin{aligned}\lambda_i - \nu_i(s_i, \sigma_{-i}) &= 0 && \forall i \forall s_i \in \operatorname{sop} \sigma_i \\ \lambda_i - \nu_i(s_i, \sigma_{-i}) &\geq 0 && \forall i \forall s_i \notin \operatorname{sop} \sigma_i \\ \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) &= 1 && \forall i \\ \sigma_i(s_i) &\geq 0 && \forall i \forall s_i \in S_i.\end{aligned}$$

La caracterización de puntos de equilibrio dada en el primer resultado generaliza aquélla dada en Myerson [9] para puntos de equilibrios de juegos de estrategia. Similarmente la caracterización dada en el segundo resultado generaliza aquélla dada en Marchi y Tarazaga [8] para juegos finitos bipersonales.

2. Puntos perfectos a la Selten y propios a la Myerson

Dado el problema de la sección 1, consideremos aquí dos generalizaciones del equi librio las cuales siguen las líneas e ideas trazadas por Selten [10] y Myerson [9] Sin embargo siguiendo sus ideas en esta nota se obtiene un resultado un poco má general.

Dado $0 < \epsilon < 1$, definimos que un punto σ es $\epsilon-$equilibrio perfecto si para tod $i \in N$:

$$\sigma_i \in \Delta^{\circ}(S_i) = \{\sigma_i \in \Delta(S_i) : \sigma_i(s_i) > 0 \ \forall s_i \in S_i\} \subset \Delta(S_i)$$

y

$$\nu_i(s_i, \sigma_{-i}) < \nu_i(s_i', \sigma_{-i})$$

implica

$$\sigma_i(s_i) \leq \epsilon \qquad \forall s_i \forall s_i' \in S_i.$$

Un punto σ se dice que es un punto de equilibrio perfecto o de Selten si

$$\sigma \in \prod_{i=1}^{n} \Delta(S_i)$$

y si existen sucesiones $\{\epsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{\sigma^k\}_{k=0}^{\infty}$ tales que

$$\lim_{k \to \infty} \epsilon_k = 0$$

y para cada k el punto σ^k es ϵ_k-equilibrio perfecto cumpliendo

$$\lim_{k \to \infty} \sigma^k = \sigma.$$

En forma similar, dado $0 < \epsilon < 1$ un punto σ se dirá que es $\epsilon-$equilibrio propic si $\sigma_i \in \Delta^{\circ}(Si)$ para todo $i \in N$ y

$$\nu_i(s_i, \sigma_{-i}) < \nu_i(s_i', \sigma_{-i})$$

implica

$$\sigma_i(s_i) \leq \epsilon \sigma_i(s_i') \qquad \forall i \forall s_i; \ \forall s_i' \in S_i.$$

Siguiendo a Myerson, llamaremos a un punto $\sigma \in \Delta$ un punto de equilibri propio si existen sucesiones $\{\epsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ tales que

$$\lim_{k \to \infty} \epsilon_k = 0$$

y para cada k el punto σ^k es ϵ_k-equilibrio perfecto tal que

$$\lim_{k \to \infty} \sigma^k = \sigma.$$

Nosotros presentamos el siguiente resultado.

Teorema 3

Dado un sistema de funciones como aquél presentado en la sección 1, siempre existe un punto de equilibrio propio.

No se incluye la demostración de este resultado ya que es exactamente la misma dada por Myerson [9] solamente haciendo la simple observación que en la construcción de la función multivaluada introducida por él para después de aplicar el Teorema de puntos fijos de Kakutani para demostrar la existencia de un punto ϵ–equilibrio propio, la función

$$\nu_i(s_i, \cdot) : \prod_{j \neq i} \Delta(S_j) \longrightarrow \mathbf{R}$$

es independiente de la forma que tiene. En la extensión mixta de un juego finito n–personal la esperanza matemática es una función multilineal en la variable σ_{-i}.

Como consecuencia de este resultado ya que un punto de equilibrio propio es siempre un punto de equilibrio perfecto entonces se tiene

Corolario 4

Dado el sistema anterior, siempre existe un punto de equilibrio perfecto.

3. Puntos de estabilidad perfectos y propios

Como lo hemos considerado en la Introducción en esta sección vamos a generalizar los resultados obtenidos por Marchi [4,5] para puntos estables de juegos n–personales.

Dado un juego n–personal finito

$$\Gamma = (S_1, \ldots, S_n; V_1, \ldots, V_n)$$

considere la extensión mixta

$$\Gamma = \big(\Delta(S_1), \ldots, \Delta(S_n); \nu_1, \ldots, \nu_n\big)$$

donde la función esperanza recordamos que está definida en la bibliografía por medio de

$$\nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i} \sum_{s_{-i}} V_i(s_i, s_{-i})\, \sigma_i(s_i) \prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j).$$

Considérese para cada jugador i un conjunto de jugadores $e(i) \subset N - \{i\}$ Entonces sea

$$\mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \min_{\sigma_{e(i)} \in \Delta_{e(i)}} \nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

donde la variable $\sigma_{e(i)} = (\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_k}) \in \Delta_{e(i)}$ está dada por $\{j_1, \dots j_k\} = e(i)$ y

$$\Delta_{e(i)} = \prod_{j \in e(i)} \Delta(S_j).$$

De aquí recordamos que un punto E-estable es un punto que cumple para cad jugador $i \in N$:

$$\mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \mu_i(\sigma_i, \bar{\sigma}_{-i}) \qquad \forall \bar{\sigma}_i \in \Delta(S_j).$$

Estos puntos y similares han sido introducidos por Marchi en [4,5] donde se h estudiado su existencia.

Es nuestro interés en esta sección generalizarlos en el sentido de Selten y My erson. Sin embargo el primer paso a lograr para un tal objetivo es caracteriza tales puntos por medio de un resultado análogo a la Proposición 1 para puntos d equilibrio. Desgraciadamente, un resultado del tipo de la Proposición 1 para punto E-estables en general, no es cierta.

Por lo tanto vamos a estudiar un tipo general de juegos n–personales para lo cuales un resultado del tipo de la Proposición 1 es válido. Estos juegos son similare a los llamados polijuegos en la literatura.

Dados los conjuntos $e(i)$ para cada jugador $i \in N$, nosotros diremos que el jueg Γ es E-particionado si las funciones de pago de cada jugador $i \in N$ están dadas po

$$V_i(s_i, s_{-i}) = V_i^1(s_i, s_{N-\{e(i)\}}) + V_i^2(s_{-i})$$

con notación obvia.

Entonces las esperanzas matemáticas van a tomar la forma

$$\nu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = V_1^1(\sigma_i, \sigma_{N-\{e(i)\}}) + V_i^2(\sigma_{-i})$$

donde

$$\nu_i^1(\sigma_i, \sigma_{N-\{e(i)\}}) = \sum_{s_i} \sum_{s_{N-\{e(i)\}}} V_i^1(s_i, s_{N-\{e(i)\}})\, \sigma_i(s_i) \prod_{j \in N-\{e(i)\}} \sigma_j(s_j)$$

y

$$\nu_i^2(\sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i}} V_i^2(s_{-i}) \prod_{j \neq i} \sigma_j(s_j).$$

Ahora calculamos la función μ_i. Directamente de la definición resulta que si introducimos la función

$$\mu_i(\sigma^2_{-i}) = \mu_i^2(\sigma_{N-\{e(i)\cup\{i\}\}}) = \min_{\sigma_{e(i)}\in\Delta_{e(i)}} \nu_i^2(\sigma_{-i})$$

la cual deja de ser lineal en σ_j con $j \in N - \{e(i) \cup \{i\}\}$, resulta que tendremos

$$\mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \nu_1^1(\sigma_i, \sigma_{N-\{e(i)\}}) + \mu_i(\sigma^2_{-i})$$

la cual es lineal en la variable $\sigma_i \in \Delta(S_i)$. Recordamos al lector que aquí: $\sigma_{-i} = \sigma_{N-\{i\}}$.

Ahora bien para estas funciones de pago podemos estudiar la extensión de la Proposición 1, la cual está dada en el siguiente resultado

Proposición 5

Para juegos E-particionados, un punto σ es E-estable si y sólo si

$$\mu_i(s_i, \sigma_{-i}) < \mu_i(s_i', s_{-i}) \qquad \text{implica} \qquad \sigma_i(s_i) = 0 \quad \forall i \forall s_i \forall s_i' \in S_i.$$

La demostración es la misma que la de la Proposición 1, debido al hecho que la función μ_i es lineal en la variable σ_i para cualquier punto dado σ_{-i}. Por lo tanto no la incluimos.

Ahora bien por el mismo hecho se puede obtener el análogo a la Proposición 5, a saber

Proposición 6:

Para juegos E-particionados, un punto σ es E-estable si y sólo si el sistema siguiente tiene solución σ

$$\begin{aligned}
\lambda_i - \nu_1^1(s_i^1, \sigma_{N-\{e(i)\}}) + \mu_i^2(\sigma_{-i}) &= 0 \qquad && \forall i \forall s_i \in \operatorname{sop} \sigma_i \\
\lambda_i - \nu_1^1(s_i^1, \sigma_{N-\{e(i)\}}) + \mu_i^2(\sigma_{-i}) &\geq 0 \qquad && \forall i \forall s_i \notin \operatorname{sop} \sigma_i \\
\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) &= 1 \qquad && \forall i \\
\sigma_i(s_i) &\geq 0 \qquad && \forall i \forall s_i \in S_i.
\end{aligned}$$

Ahora bien estamos en condiciones de extender los puntos E-estables en el sentido de Selten y Myerson para juegos E-particionados. Todo se realiza repitiendo las definiciones dadas en la sección 2 con la única diferencia de que ahora se considera la función de pago

$$\mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}),$$

y entonces se obtienen los conceptos de puntos E-estables y E-perfectos.

Como consecuencia inmediata del Teorema 3, es posible obtener el

Corolario 7

Para un juego E-particionado, siempre existe un punto E-estable propio.

Haciendo notar que un punto E-estable propio es E-estable perfecto para juegos E-particionados, entonces tenemos directamente del resultado anterior

Corolario 8

Dado un juego E-particionado, siempre existe un punto E-estable perfecto.

Por último como un punto E-estable perfecto es un punto E-estable para juegos E-particionados entonces tenemos para estos juegos

Corolario 9

Dado un juego E-particionado, la existencia de un punto E-estable siempre está asegurada.

Hacemos notar al lector que si $e(i)$ es vacío un punto E-estable es de equilibrio. Usando el ejemplo dado por Myerson [9] es de esperar que en general el conjunto de puntos de equilibrio perfectos sea un subconjunto propio del conjunto de puntos de equilibrio. Similarmente para adecuadas funciones $e(i)$ es de esperar que el conjunto de puntos E-estables propio sea un subconjunto propio del conjunto de puntos E-estables.

Es interesante notar que sería muy importante que el estudio presentado en este artículo se viera proyectado en la dirección de los juegos no-cooperativos recientes dada en van Damme [2]. En particular sería de mucho interés estudiar los puntos introducidos por Harsanyi relacionados con nuestra estabilidad en el sentido dado arriba.

Otro tema importante donde creemos que se pueda desarrollar e introducir la E-estabilidad es en el estudio de puntos de equilibrio correlacionados de Aumann [1] cuya existencia también ha sido demostrada por técnicas elementales como la debida a Hart y Schmeidler [3]. Finalmente también es de esperar que la E-estabilidad tenga importancia en los equilibrios cooperativos introducidos recientemente por Marchi [6,7].

El autor agradece al Ministerio de Educación y Ciencia español la invitación dispensada así como a los integrantes del Departamento que han hecho que su estancia fuese muy agradable y provechosa. En particular agradece al Prof. J. E. Martínez-Legaz que se interesó por su invitación.

Bibliografía

1. R. Aumann, Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal of Mathematical Economics* **1** (1974), 67–95 .
2. E. C. C. van Damme, *Refinement of the Concept of Equilibrium Point*, Springer, New York, 1983.
3. S. Hart and Schmeidler, Correlated equilibria: An elementary proof, Preprint.
4. E. Marchi, Simple stability of general n-person games, *Naval Res. Log. Quart.* **14**, (1967), 163–171.
5. E. Marchi, Foundation of non-cooperative games, *Econometric Res. Program Princeton Univ. Res. Memor.* **97** (1968), pp. 315.
6. E. Marchi, Cooperative equilibria, *Compt. & Math. with Appl.* **128** (1986), 1185–1186.
7. E. Marchi, Proper and perfect cooperative equilibrium for classical and rational games, Preprint.
8. E. Marchi and P. Tarazaga, Relevant aspects in two person games, *JOTA* **53** (1987), 654–658.
9. R. B. Myerson, Refinements of the Nash equilibrium points, *Int. Journal of Game Theory* **7** (1978), 73–80.
10. R. Selten, Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *Int. Journal of Game Theory* **4** (1975), 25–55.