Collect. Math. 39 (1988), 1–7

Una nota sobre los espacios $L^p_\Gamma(\Omega, E)$*

MARIA JESUS PLANELLS

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Politécnica de Valencia, 46022 Valencia, Spain

Received 9/JUN/88

ABSTRACT

In this note we continue the study (initiated in [13]) of locally convex properties of the vector-valued anisotropic Sobolev spaces. We also determine, by means of direct calculations, the type and cotype of these spaces with respect to certain fundamental systems of seminorms.

En esta nota proseguimos el estudio (iniciado en [13]) de propiedades localmente convexas de los espacios de Sobolev anisótropos con valores vectoriales $L^p_\Gamma(\Omega, E)$. También determinamos aquí, por medio de cálculos directos, el tipo y el cotipo de los espacios $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ con respecto a ciertos sistemas fundamentales de seminormas.

Los espacios que utilizamos están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Nuestra notación para espacios localmente convexos es estándar y nos remitimos a [8]. Si los espacios localmente convexos E y F son isomorfos (es decir, topológicamente isomorfos) escribimos $E \simeq F$. $E \hookrightarrow F$ significa que el espacio E es isomorfo a un subespacio de F. Si A es un conjunto no vacío, E^A denota el producto topológico de A copias del espacio localmente convexo E. $\operatorname{card} A$ es el cardinal del conjunto A. $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de los enteros no negativos.

Si E es un espacio localmente convexo casi-completo y Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega, E)$ será el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables sobre Ω con valores en E que tienen soporte compacto ($\mathcal{D}(\Omega, E)$ se considera provisto de su

* Subvencionado parcialmente por la CAYCIT, Proyecto PB85-0341

topología límite inductivo habitual). Cuando $E = \mathbb{C}$, escribimos $\mathcal{D}(\Omega)$. Si E es un espacio localmente convexo denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ el espacio de las distribuciones sobre Ω con valores en E equipado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de $\mathcal{D}(\Omega)$ (ver [15,16]).

Si E es un (LF)-estricto, Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega, E)$ denota el conjunto de todas las funciones (clases de funciones equivalentes) medibles Bochner de Ω en E, f, tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty$$

(si $p = \infty$ se supone

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|f(x)\| < \infty \ )$$

para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$, siendo $\mathrm{sc}(E)$ el conjunto de las seminormas continuas sobre E. Con la topología generada por las seminormas $\{\|\cdot\|_p : \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$, $L^p(\Omega, E)$ llega a ser un espacio localmente convexo sucesionalmente completo (ver [6]). Además la aplicación

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega, E) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega, E) \\ f & \longmapsto & \{\phi \mapsto \int_\Omega \phi(x) f(x) \, dx\} \end{array}$$

está bien definida y es lineal, inyectiva y continua. Por consiguiente, las funciones de $L^p(\Omega, E)$ admiten derivadas distribucionales de cualquier orden. (Ver [6] para la teoría de integración de funciones con valores vectoriales). Si Γ es un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{N}^n$ tal que si $(\alpha_j) \in \Gamma$ entonces $(\beta_j) \in \Gamma$ cuando $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$ para $j = 1, \ldots, n$, el espacio de Sobolev (anisótropo) sobre Ω con valores en E (de tipo p, Γ) es el subespacio lineal de $L^p(\Omega, E)$

$$L^p_\Gamma(\Omega, E) := \{f \in L^p(\Omega, E) : D^\alpha f \in L^p(\Omega, E) \text{ para } \alpha \in \Gamma\}.$$

Consideramos sobre $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{p,\Gamma} : \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$ donde

$$\|f\|_{p,\Gamma} = \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p} \qquad \text{cuando } p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty,\Gamma} = \max_{\alpha \in \Gamma} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|D^\alpha f(x)\| \qquad \text{cuando } p = \infty.$$

Teorema 1

1. Sean Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$, E *un Fréchet nuclear,* Γ *un subconjunto finito no vacío de* $\mathbb{N}^n$ *tal que si* $(\alpha_j) \in \Gamma$ *entonces* $(\beta_j) \in \Gamma$ *cuando* $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$ *para* $j = 1, \ldots, n$, *y* $p \in [1, \infty]$. *Entonces* $L_\Gamma^p(\Omega, E)$ *es isomorfo a un subespacio cerrado de* $(L^p(0,1))^{\mathbb{N}}$ *pero, en general,* $L_\Gamma^p(\Omega, E)$ *no es isomorfo a* $(L^p(0,1))^{\mathbb{N}}$ *y tampoco es isomorfo a un subespacio complementado de* $(L^p(0,1))^{\mathbb{N}}$.

2. Sean Ω, E, Γ *y* p *como en el punto 1. Entonces todos los subespacios normables de* $L_\Gamma^p(\Omega, E)$ *son isomorfos a subespacios de* $L^p(0,1)$. *Si* $1 < p < \infty$ *los espacios* $L_\Gamma^p(\Omega, E)$ *y* $L_\Gamma^p(\Omega, E)/(L_\Gamma^p(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E)$ *son totalmente reflexivos.*

3. Sean E, F *espacios de Fréchet nucleares,* Γ_1 *y* Γ_2 *subconjuntos finitos no vacíos de* $\mathbb{N}^n$ *verificando la condición del punto 1 y* $p_1, p_2 \in [1, \infty]$. *Entonces se tiene*

(i) $L_{\Gamma_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n, E) \simeq L_{\Gamma_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n, F)$ *y* $1 < p_1, p_2 < \infty$ *implican* $p_1 = p_2$.

(ii) Si $L_{\Gamma_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n, E) \simeq L_{\Gamma_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n, F)$, Γ_1 *es un intervalo,* $p_1 = 1$ *y* $p_2 < \infty$, *entonces* $p_1 = p_2$.

(iii) Si $L_{\Gamma_1}^{p_1}(\mathbb{R}^n, E) \simeq L_{\Gamma_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n, F)$, Γ_1 *es un intervalo y* $p_1 = \infty$, *entonces* $p_1 = p_2$.

Prueba. 1. E es isomorfo a un subespacio de $(L^p(\Omega))^{\mathbb{N}}$ (si $p < \infty$ utilizar, p.e. [16, Th. 4], y si $p = \infty$ utilizar [14, Teorema 7.3, p. 101] y el hecho de que ℓ^∞ es isométrico a un subespacio de $L^\infty(\Omega)$). Teniendo entonces en cuenta los teoremas 1 y 3 de [13] resulta que el espacio de Fréchet $L_\Gamma^p(\Omega, E)$ es isomorfo a un subespacio de $(L_\Gamma^p(\Omega, L^p(\Omega)))^{\mathbb{N}}$. Utilizando de nuevo el Teorema 1 de [13] vemos que $(L_\Gamma^p(\Omega, L^p(\Omega)))^{\mathbb{N}}$ es isomorfo a un subespacio de $\left((L_\Gamma^p(\Omega, L^p(\Omega)))^{card\,\Gamma}\right)^{\mathbb{N}}$. Además $L_\Gamma^p(\Omega, L^p(\Omega))$ es isométrico a $L^p(\Omega^2, \lambda^2)$ (siendo λ la medida de Lebesgue en Ω) si $p < \infty$ e isométrico a un subespacio de $(L^1(\Omega, L^1(\Omega)))'$ cuando $p = \infty$ por lo que

$$L^p(\Omega, L^p(\Omega)) \simeq L^p(\Omega^2, \lambda^2) \simeq L^p(0,1) \qquad \text{si } p < \infty$$

$$L^\infty(\Omega, L^\infty(\Omega)) \hookrightarrow (L^1(\Omega, L^1(\Omega)))' \simeq (L^1(\Omega^2, \lambda^2))' \simeq (L^1(0,1))' \simeq L^\infty(0,1)$$

(hemos utilizado aquí el carácter puramente no-atómico de la medida λ^2 y la separabilidad de $L_\Gamma^p(\Omega^2, \lambda^2)$ cuando $p < \infty$). Finalmente, teniendo en cuenta que los espacios $L^p(0,1)$ son reproducibles, obtenemos que

$$L_\Gamma^p(\Omega, E) \hookrightarrow (L^p(0,1))^{\mathbb{N}}.$$

Supongamos ahora que E es de dimensión infinita y no contiene ninguna copia de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Por un teorema de Bessaga-Pelczyński (ver [3]) E admite entonces una norma continua, por tanto también $L_\Gamma^p(\Omega, E)$ admite una norma continua y no puede ser

isomorfo a $(L^p(0,1))^{\mathbb{N}}$. Además, $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ no puede ser isomorfo a un subespa
cio complementado de $(L^p(0,1))^{\mathbb{N}}$ pues, en caso contrario, existiría un subespaci
cerrado G de $(L^p(0,1))^{\mathbb{N}}$ de manera que

$$L^p_\Gamma(\Omega, E) \simeq (L^p(0,1))^{\mathbb{N}}/G$$

lo cual implicaría, en virtud de un resultado de Bellenot-Dubinsky [2, Prop. :
p. 590], que $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ fuera un espacio de Banach. Entonces también E sería c
Banach lo que contradiría la elección de E.

2. Sea B un subespacio normable de $L^p_\Gamma(\Omega, E)$. Aplicando 1 y [5, Lema 1], .
resulta ser isomorfo a un subespacio de un producto finito de copias de $L^p(0,1$
Teniendo en cuenta que $L^p(0,1)$ es reproducible obtenemos que B es isomorfo a u
subespacio de $L^p(0,1)$.

La total reflexividad de los espacios de Fréchet $L^p_\Gamma(\Omega, E)$, $1 < p < \infty$, resul
de 1 y del Corolario de [7, Proposición 10, p. 101]. Que $L^p_\Gamma(\Omega, E)/(L^p_\Gamma(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$
es totalmente reflexivo se sigue de lo que acabamos de probar y de [7, Propos
ción 10] (que $L^p_\Gamma(\Omega)\hat{\otimes}_\epsilon E$ es un subespacio de $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ se deduce del Corolario (
[13, Teorema 2]).

3.(i) Puesto que $L^{p_1}_{\Gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de Banach de $L^{p_1}_{\Gamma_1}(\mathbb{R}^n, E)$, los pu
tos 1 y 2 demuestran que $L^{p_1}_{\Gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ es isomorfo a un subespacio de $L^{p_2}(0,1)$
como $L^{p_1}_{\Gamma_1}(\mathbb{R}^n) \simeq L^{p_1}(0,1)$ [12, Teorema C] resulta que $L^{p_1}(0,1)$ es isomorfo
un subespacio de $L^{p_2}(0,1)$. Permutando p_1 y p_2 en el argumento anterior y ap
cando [1, Th. 4, p. 184], obtenemos $p_1 = p_2$. (ii) Razonando como en (i) vem
que $L^{p_2}(0,1)$ contiene una copia de $L^1_{\Gamma_1}(\mathbb{R}^n)$ lo que no es posible (teniendo
cuenta que $L^1_{\Gamma_1}(\mathbb{R}^n) \simeq L^1(0,1)$ en virtud de [12, Teorema B]) más que si $p_2 =$
(iii) Basta razonar como en (ii) teniendo presente que $L^\infty_{\Gamma_1}(\mathbb{R}^n) \simeq L^\infty(0,1)$ p
[12, Teorema B]. □

En [10] M. Milman demostró, utilizando técnicas de interpolación, que pa
ciertos abiertos Ω de $\mathbb{R}^n$ y para $1 < p \leq 2$ los espacios de Sobolev (isótropos) escalar
$W^{m,p}(\Omega)$ son de tipo p (ver, p.e., en [9, pp. 72 y 73] las definiciones de tipo y coti
de un espacio de Banach). En [4] F. Cobos extendió ese resultado demostrando, p
métodos directos, que para cada abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y cada $1 \leq p < \infty$ el espacio (
Sobolev isótropo $W^{m,p}(\Omega)$ es de tipo $\min(2,p)$ y de cotipo $\max(2,p)$. En el teoren
que sigue extendemos este último resultado al caso vectorial (y no necesariamen
isótropo) también por medio de cálculos directos.

DEFINICION [11]. Si E es un espacio localmente convexo y ξ_E es una familia de seminormas que definen la topología de E, se dice que E es de tipo p para algún $p \in]1,2]$ (resp. de cotipo q para algún $q \in [2,\infty[$) respecto de la familia ξ_E si, para cada $\|\cdot\| \in \xi_E$, el espacio de Banach $\left(E/\|\cdot\|^{-1}(0)\right)^\wedge$ es de tipo p (resp. de cotipo q).

Como se indica en [11] es trivial comprobar, utilizando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, que el espacio E es de tipo p (resp. de cotipo q) respecto de ξ_E si y sólo si para cada $\|\cdot\| \in \xi_E$ existe una constante $M < \infty$ tal que, para cada familia finita $\left(e_j\right)_1^m$ en E, se tiene

$$\int_0^1 \left\| \sum_1^m r_j(t)\, e_j \right\| dt \leq M \left(\sum_1^m \|e_j\|^p \right)^{1/p}$$

(respectivamente,

$$\left(\sum_1^m \|e_j\|^q \right)^{1/q} \leq M \int_0^1 \left\| \sum_1^m r_j(t)\, e_j \right\| dt$$

donde $\left(r_j\right)_1^\infty$ designa la sucesión de funciones de Rademacher definidas por

$$r_j(t) = \operatorname{sign}\left(\sin(2^j \pi t)\right) \qquad \text{para } t \in [0,1].$$

Teorema 2

Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, E un (LF)-estricto, ξ_E un sistema fundamental de seminormas sobre E, Γ un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{N}$ como en el teorema 1, $1 < p < \infty$ y $\xi'_E = \left\{\|\cdot\|_{p,\Gamma} : \|\cdot\| \in \xi_E\right\}$. Entonces se tiene que

(1) $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ es de tipo $r = \min(p,t)$ respecto de ξ'_E cuando E es de tipo t respecto de ξ_E.

(2) $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ es de cotipo $q = \max(p,s)$ respecto de ξ'_E cuando E es de cotipo s respecto de ξ_E.

Prueba. En el transcurso de la demostración la letra C denotará siempre una constante positiva, no necesariamente la misma cada vez que aparece.

(1) Sea $\|\cdot\|$ una seminorma de ξ_E. Por un teorema de Kahane [9, Th.1.e.13], el hecho de que el espacio de Banach $L^p\left(\Omega, \left(E/\|\cdot\|^{-1}(0)\right)^\wedge\right)$ tiene tipo r, y la

desigualdad de Hölder, se tiene, para cada familia finita $(f_j)_1^m$ en $L^p_\Gamma(\Omega, E)$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left\|\sum_1^m r_j(t)\, f_j\right\|_{p,\Gamma}^p dt\right)^{1/p} &= \left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\int_0^1 \left\|\sum_1^m r_j(t)\, D^\alpha f_j\right\|_p^p dt\right)^{1/p} \\
&\le C\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\left(\int_0^1 \left\|\sum_1^m r_j(t)\, D^\alpha f_j\right\|_p dt\right)^p\right)^{1/p} \\
&\le C\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\left(\sum_1^m \|D^\alpha f_j\|_p^r\right)^{p/r}\right)^{1/p} \\
&\le C\left(\sum_1^m\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\|D^\alpha f_j\|_p^p\right)^{r/p}\right)^{1/r} \\
&= C\left(\sum_1^m \|f_j\|_{p,\Gamma}^r\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $L^p_\Gamma(\Omega, E)$ es de tipo r respecto de ξ'_E. (2) Nuevamente sea $\|\cdot$ una seminorma de ξ_E. En virtud de la desigualdad de Hölder y el hecho de que espacio de Banach $L^p(\Omega, (E/\|\cdot\|^{-1}(0))^\wedge)$ tiene cotipo q se tiene, para cada famili finita $(f_j)_1^m$ en $L^p_\Gamma(\Omega, E)$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_1^m \|f_j\|_{p,\Gamma}^q\right)^{1/q} &= \left(\sum_1^m\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\|D^\alpha f_j\|_p^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&\le C\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\left(\sum_1^m \|D^\alpha f_j\|_p^q\right)^{p/q}\right)^{1/p} \\
&\le C\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\left(\int_0^1 \left\|\sum_1^m r_j(t)\, D^\alpha f_j\right\|_p dt\right)^p\right)^{1/p} \\
&\le C\int_0^1 \sum_{\alpha\in\Gamma}\left\|\sum_1^m r_j(t)\, D^\alpha f_j\right\|_p dt \\
&\le C\int_0^1 \left\|\sum_1^m r_j(t)\, f_j\right\|_{p,\Gamma} dt.
\end{aligned}$$

Esto demuestra (2). □

Agradecemos al referee sus valiosas sugerencias. En particular, la forma final del Teorema 2 es debida a él.

Bibliografía

1. S. Banach, *Oeuvres*, Vol. II, PNW, Warsaw, 1979.
2. S. F. Bellenot and E. Dubinsky, Fréchet spaces with nuclear Köthe quotients, *Trans. Amer. Math. Soc.* **273** (1982), 574–594.
3. C. Bessaga and A. Pelczyński, On a class of B_0-spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci.* (III) **4** (1957), 375–377.
4. F. Cobos, Clarkson's inequalities for Sobolev spaces, *Math. Japonica* **31** (1986), 17–22.
5. J. C. Díaz, *Collect. Math.* **38** (1987), 137–140.
6. H. G. Garnir, M. De Wilde and J. Schmets, *Analyse Fonctionnelle*, Vol. II and III, Birkhäuser, Bassel-Stuttgart, 1972–73.
7. A. Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Brasil. Math.* **3** (1954), 57–123
8. G. Köthe, *Topological Vector Spaces*, Vol. I and II, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969 and 1979.
9. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Vol. II, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.
10. M. Milman, Complex interpolation and geometry of Banach spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.* **136** (1984), 317–328.
11. J. Motos and M. J. Planells, Tipo y cotipo de algunos espacios de distribuciones con valores vectoriales, to appear.
12. A. Pelczyński and K. Senator, On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical" Banach spaces and a Sobolev type embedding theorem, *Studia Math.* **84** (1986), 169–215.
13. M. J. Planells, Sobre los espacios de Sobolev anisótropos con valores vectoriales, Preprint.
14. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer, New York, 1971.
15. L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ch. I, *Ann. Inst. Fourier* **7** (1957), 1–141.
16. L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ch. II, *Ann. Inst. Fourier* **8** (1958), 1–204.
17. M. Valdivia, Nuclearity and Banach spaces, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **20** (1977), 205–209.