Collect. Math. **38** (1987), 271–278

SOBRE LA TOPOLOGIA DEBIL EN COMPONENTES DEL IDEAL DE LOS OPERADORES p-COMPACTOS DE SAPHAR, CON $1<p<\infty$

*María José Rivera Ortún**

ABSTRACT. We present in this paper some results on the weak topology in components of the Saphar's p compact operators ideals, when these spaces are not necessarily ϵ_p tensor products. We study the dual space, the weak convergence, the weak compactness and related questions.

Introducción

El ideal inyectivo asociado al ideal de los operadores p nucleares entre espacios de Banach (N_p, n_p), aparece en la literatura con dos nombres: Pearsson y Pietsch [7] lo denominan el ideal de los operadores quasi p-nucleares (QN_p, qn_p) y Saphar [13] el ideal de los operadores p-compactos (K_p, k_p). Nosotros usaremos la nomenclatura de Saphar, y cabe señalar que K_∞ coincide con el ideal de los operadores compactos, comúnmente denotado por K.

El propósito de esta nota es considerar el siguiente problema propuesto por W. Ruess ([11], prob. 6.5, pág. 74): "To what extend can geometric and topological properties of particular operator spaces other than $K(X,Y)$, ..., be recovered from those of the factor spaces X and Y and their duals?". Nuestro objetivo es dar algunas aportaciones a esta cuestión cuando los espacios de operadores son componentes de K_p, $1<p<\infty$.

* Subvencionado por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica, Proyecto 341-85.

Notaciones, definiciones y consideraciones previas

Denotaremos (B), (AP), (AP_p) y (RN) a las clases de todos los espacios de Banach, espacios de Banach que verifican la propiedad de aproximación, espacios de Banach que poseen la propiedad de aproximación de orden p y espacios de Banach que satisfacen la propiedad de Radon-Nikodym, respectivamente. Si $E \in (B)$, denotaremos por E' a su espacio de Banach dual. Usaremos definiciones standard de ideales de operadores y normas como en [8] y de tensor-normas como en [4]. Por $(W, \|\cdot\|)$, (S_p, s_p) e (I_p, i_p) denotaremos a los ideales de los operadores débilmente compactos, absolutamente p sumantes y p–integrables, respectivamente. Definiciones y propiedades de las tensor-normas g_p y ϵ_p pueden encontrarse en [12] y [13].

Resultados referentes a los problemas que nos proponemos abordar son los obtenidos en [5] (completitud débil sucesional) y en [9] (completitud débil, compacidad débil y otras cuestiones relacionadas con ellas), siempre en el caso en que $K_p(E,F) = E'\hat{\otimes}_{\epsilon_p}F$ (esto sucede por ejemplo si E' o $F \in (AP)$, ver[7], o si $E'' \in (AP_p)$, ver [13]). Nosotros estamos interesados en estudiar algunas propiedades de la topología débil de $K_p(E,F)$ en un caso en que éste no coincide necesariamente con $E'\hat{\otimes}_{\epsilon_p}F$. Finalmente por [12] sabemos que para cualquier par de espacios de Banach E y F, $S_p(E'',F''') = (F'\hat{\otimes}_{g_{p'}}E'')'$. Como además $K_p(E,F)$ puede considerarse como subespacio lineal y normado de $S_p(E'',F''')$ (ver [13]), por dualidad la aplicación V de $F'\hat{\otimes}_{g_{p'}}E''$ en $(K_p(E'',F''))'$ definida de modo que

$$\langle V(v), T\rangle = \operatorname{tr}(T''v), \qquad v \in F'\hat{\otimes}_{g_{p'}}E'',\ T \in K_p(E,F),$$

es lineal y continua con norma no superior a uno.

1. Sobre el dual de $K_p(E,F)$

Proposición 1. *Sean $E, F \in (B)$ tales que F sea subespacio lineal y normado de un espacio de Banach G tal que $G \in (AP)$ y $G' \in (RN)$. Entonces V es una aplicación cociente.*

Demostración. Denotamos por j a la inyección natural de F en G. Por [13] la aplicación

$$Q : K_p(E,F) \longrightarrow K_p(E,G) = E'\hat{\otimes}_{\epsilon_p}G$$

tal que $Q(T) = jT$ es una isometría, por lo que

$$Q' : (E'\hat{\otimes}_{\epsilon_p} G)' \longrightarrow (K_p(E,F))'$$

es una aplicación cociente. Ahora bien por [13] sabemos que $(E'\hat{\otimes}_{\epsilon_p} G)' = I_{p'}(G, E'')$, e $I_{p'}(G, E'') = N_{p'}(G, E'')$ puesto que $G' \in (RN)$.

Sea el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G'\hat{\otimes}_{g_{p'}} E'' & \xrightarrow{B_{p'}} & N_{p'}(G, E'') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j'\hat{\otimes} 1_{E''}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q'} \\ F'\hat{\otimes} g_{p'} E'' & \xrightarrow{V} & (K_p(E,F))' \end{array}$$

donde $B_{p'}$ es la aplicación tal que si $u \in G'\hat{\otimes}_{g_{p'}} E''$ con representación

$$u = \sum_i g_i' \otimes x_i'' \ ,$$

entonces

$$B_{p'}(u) = \sum_i \langle g_i', \cdot \rangle \, x_i'' \ ,$$

ver [13]. Es fácil probar que $V(j'\hat{\otimes} 1_{E''}) = Q' B_{p'}$, luego V es sobre. Sea $S \in (K_p(E,F))'$. Como Q' es aplicación cociente, dado $\epsilon > 0$ existe $T_\epsilon \in N_{p'}(G, E'')$ tal que

$$\|S\| \geq n_{p'}(T_\epsilon) - \epsilon/2$$

con $Q'(T_\epsilon) = S$. Como $B_{p'}$ es aplicación cociente, existe $u_{T_\epsilon} \in G'\hat{\otimes}_{g_{p'}} E''$ tal que

$$n_{p'}(T_\epsilon) \geq g_{p'}(u_{T_\epsilon}) - \epsilon/2,$$

con $B_{p'}(u_{T_\epsilon}) = T_\epsilon$. De ahí que tengamos

$$S = Q' \, B_{p'}(u_{T_\epsilon}) = V(j'\hat{\otimes} 1_{E''})(u_{T_\epsilon}),$$

con

$$\|S\| \geq g_{p'}(u_{T_\epsilon}) - \epsilon.$$

Sea

$$v_{T_\epsilon} = (j'\hat{\otimes} 1_{E''})(u_{T_\epsilon}) \in F'\hat{\otimes}_{g_{p'}} E''.$$

Como $\|j'\hat{\otimes}1_{E''}\| \leq 1$, $g_{p'}(u_{T_\epsilon}) \geq g_{p'}(v_{T_\epsilon})$, de donde

$$\|S\| \geq \inf\{g_{p'}(v),\ v \in F'\hat{\otimes}_{g_{p'}}E'' : V(v) = S\} - \epsilon.$$

Como esto sucede para todo ϵ y como a su vez $\|V\| \leq 1$, entonces

$$\|S\| = \inf\{g_{p'}(v),\ v \in F'\hat{\otimes}_{g_{p'}}E'' : V(v) = S\},$$

y por tanto V es una aplicación cociente.

Nota. De entre los ejemplos de espacios F que verifican las hipótesis de la Proposición 1, destacaríamos a todos los subespacios de ℓ_q, $1 < q < \infty$, especialmente para $q \neq 2$ a aquellos que no verifican la propiedad de aproximación como sabemos que existen según los ejemplos de Davie [1], Figiel-Pełczyński [3] y Kwapien [6] para $2 < q < \infty$ y Szankowski [14] para $1 < q < 2$, puesto que para ellos $K_p(E, F)$ no coincide necesariamente con $E'\hat{\otimes}_{\iota_p}F$.

Una vez caracterizado el dual de $K_p(E, F)$ en las condiciones de la Proposición 1, es inmediata la siguiente caracterización de su convergencia débil (ver en [2]) idéntico argumento para espacios de operadores compactos).

Proposición 2. *Sean $E, F \in (B)$ tales que F verifica las condiciones de la Proposición 1, y sea $\{T_a,\ a \in A\}$ una red acotada en $K_p(E, F)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a1) *$\{T_a,\ a \in A\}$ converge débilmente acero.*

a2) *$\{\langle T_a'''(x''), y'\rangle,\ a \in A\} \longrightarrow 0$, para todo $x'' \in E''$, $y' \in F'$.*

Y también son equivalentes:

b1) *$\{T_a,\ a \in A\}$ es débilmente de Cauchy.*

b2) *$\{\langle T_a'''(x''), y'\rangle,\ a \in A\}$ es convergente para todo $x'' \in E''$, $y' \in F'$.*

Utilizaremos esta caracterización de la convergencia débil para estudiar algunas propiedades de la topología débil.

2. Reflexividad y compacidad débil en $K_p(E, F)$

Proposición 3. *Con las condiciones de la Proposición 1, $K_p(E, F)$ es reflexivo si y sólo si E y F son reflexivos.*

Demostración. Si $K_p(E, F)$ es reflexivo también lo será su subespacio lineal normado y cerrado $E'\hat{\otimes}_{\iota_p}F$, y por tanto E y F serán reflexivos. Recíprocamente, si E y F son reflexivos, por [13] $K_p(E,F) = S_p(E,F)$. Entonces

$$V' : (K_p(E,F))'' \longrightarrow (F\hat{\otimes}_{g_{p'}}E)' = S_p(E,F) = K_p(E,F)$$

es una isometría a puesto que V es una aplicación cociente, y además es sobre ya que $V'(T) = T$, luego $(K_p(E,F))'' = K_p(E,F)$.

De la Proposición 3 se deduce fácilmente:

Corolario 1. *Si E y F son espacios de Banach reflexivos tales que F verifica las condiciones de la Proposición 1, entonces*

$$S_p(E,F) = E'\hat{\otimes}_{\epsilon_p}F.$$

Demostración. La prueba es inmediata si tenemos en cuenta que en estas condiciones $S_p(E,F)$ es reflexivo y en [13] se prueba que esto sucede si y sólo si coincide con $E'\hat{\otimes}_{\epsilon_p}F$. Es de destacar que para ello no hemos precisado directamente sobre E, E' o F ninguna propiedad de aproximación.

Proposición 4. *Sean $E, F \in (B)$ tales que F verifica las condiciones de la Proposición 1 y de modo que F' sea $\sigma(F',F)$-separable, y sea M un conjunto acotado en $K_p(E,F)$. Entonces M es condicionalmente débilmente compacto (cdc) si se verifican:*

1) $\{T''(x''),\ T \in M\} \subset F$ *(ya que $K_p \subset K \subset W$) es relativamente débilmente compacto (rdc), para todo $x'' \in E''$.*
2) $\{T'(y'),\ T \in M\} \subset E'$ *es cdc, para todo $y' \in F'$.*

Demostración. Sea $D = \{y_1', y_2', \ldots\}$ un conjunto numerable en F' tal que $\langle D\rangle$ es $\sigma(F',F)$- denso en F'. Esto implica que $\langle D\rangle$ es denso en F' con la topología de Mackey $\mu(F',F)$. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de M. Por 2), $\{T_n'(y_1')\}$ tiene una subsucesión débilmente de Cauchy $\{T_{n1}'(y_1')\}$. También por 2), $\{T_{n1}'(y_2')\}$ tiene una subsucesión débilmente de Cauchy $\{T_{n2}'(y_2')\}$. Procediendo por recurrencia y por el método diagonal $\{T_{nn}'(y')\}$ es débilmente de Cauchy para todo $y' \in F'$. Dados $x'' \in E''$, $z' \in F'$, por 1), para cada $\epsilon > 0$ existe $y' \in \langle D\rangle$ tal que

$$\sup_n |\langle T_{nn}''(x''), z' - y'\rangle| < \epsilon/3.$$

También existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i,j \geq n_0$ entonces

$$\left|\langle (T_{ii}' - T_{jj}')(y'), x''\rangle\right| \leq \epsilon/3.$$

Por tanto si $i,j \geq n_0$,

$$\left|\langle (T_{ii}'' - T_{jj}'')(x''), z'\rangle\right| \leq \epsilon,$$

y por la Proposición 2 $\{T_{nn}\}$ es débilmente de Cauchy y subsucesión de $\{T_n\}$ lo que prueba que M es cdc.

Corolario 2. *Si $E, F \in (B)$, de modo que F sea un espacio reflexivo que verifica las condiciones de la Proposición 1 con F' débilmente separable, entonces $\ell_1 \not\subset K_p(E, F)$ si y sólo si $\ell_1 \not\subset E'$.*

Demostración. La prueba es una consecuencia del resultado de Rosenthal [10]: si $\ell_1 \not\subset E'$, entonces cada sucesión de E' tiene una subsucesión débilmente de Cauchy.

Proposition 5. *Sean $E, F \in (B)$ tales que se verifican las condiciones de la Proposición 1, y sea M un conjunto acotado de $K_p(E, F)$. Entonces son equivalentes:*

1) $\{T''(x''),\ T \in M\} \subset F$ *es rdc para todo* $x'' \in E''$.

2) *Cada red tiene una subred débilmente de Cauchy cuya bitraspuesta es convergente en la toplogía débil de operadores de* $\mathcal{L}(E'', F)$.

Demostración.
1) $\longrightarrow$ 2): Sea $\{T_a,\ a \in A\}$ una red en M. Sea

$$P = \prod_{x'' \in E''} \overline{\{T''(x''),\ T \in M\}}$$

donde la clausura está tomada en $\left(F, \sigma(F, F')\right)$. Por 1) y el teorema de Tijonov P es un espacio compacto. Como $\{T''_a,\ a \in A\}$ puede considerarse como una red en P, sea $p = (y_{x''})$ un punto adherente suyo y sea $\{T''_{a(b)},\ b \in B\}$ una subred suya que converge a p en P. Sea $S : E'' \to F$ tal que $S(x'') = y_{x''}$. Es inmediato ver que $S \in \mathcal{L}(E'', F)$ y que $\{T''_{a(b)},\ b \in B\}$ converge a S en la topología débil de operadores de $\mathcal{L}(E'', F)$.

2) $\longrightarrow$ 1) Es obvio por la propia definición de topología débil de operadores en $\mathcal{L}(E'', F)$.

Como consecuencia de la Proposición 5, obtenemos la siguiente caracterización de la compacidad débil relativa en $K_p(E, F)$:

Proposición 6. *Sean $E, F \in (B)$ tales que F verifica las condiciones de la proposición 1, y sea M un conjunto acotado en $K_p(E, F)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *M es rdc.*

b) b1) $\{T''(x''),\ T \in M\}$ *es rdc para todo* $x'' \in E''$.

b2) *Si denotamos $M'' = \{T'',\ T \in M\}$ y si R es un elemento de la clausura de M'' en la toplogía débil de operadores de $\mathcal{L}(E'', F)$, entonces existe $T \in K_p(E, F)$ tal que $T'' = R$.*

c) c1) $=$ b1).

c2) $\{T'(y'),\ T \in M\} \subset E'$ *es rdc para todo* $y' \in F'$.

c3) *La clausura de* M *en la topología débil de operadores de* $\mathcal{L}(E,F)$ *está contenida en* $K_p(E,F)$.

Demostración.
a) $\longrightarrow$ b):

b1): Si $x'' \in E''$, sea $Q_{x''} : K(E,F) \to F$ con $Q_{x''}(T) = T(x'')$. Como $Q_{x''}$ es lineal y acotada, $Q_{x''}(M) = \{T''(x''),\ T \in M\}$ es rdc en F.

b2): Sea R un elemento de la clausura de M'' en la topología débil de operadores de $\mathcal{L}(E'',F)$ y sea una red $\{T''_a,\ a \in A\}$ de M'' que converge a R en dicha topología. La red $\{T_a,\ a \in A\}$ es débilmente de Cauchy y por a) converge débilmente a $T \in K_p(E,F)$. Entonces $\{T''_a,\ a \in A\}$ también converge a T'' en la topología débil de operadores de $\mathcal{L}(E'',F)$, y como ésta es Hausdorff $T'' = R$.

b) $\longrightarrow$ a): Si $\{T_a,\ a \in A\}$ es una red en M, por b1) y la Proposición 5 tiene una subred $\{T_{a(b)},\ b \in B\}$ tal que la red $\{T''_{a(b)},\ b \in B\}$ converge a $R \in \mathcal{L}(E'',F)$ en la topología débil de operadores. Por b2) existe $T \in K_p(E,F)$ tal que $T'' = R$, y $\{T_{a(b)},\ b \in B\}$ converge débilmente a T.

a) $\longrightarrow$ c):

c1): Ya probado en a) $\longrightarrow$ b1).

c2): Es evidente.

c3): Sea R un elemento de la clausura de M en la topología débil de operadores de $\mathcal{L}(E,F)$ y sea $\{T_a,\ a \in A\}$ una red que converge a R en esa topología. Por a) tiene una subred que converge débilmente a un $T \in K_p(E,F)$. Entonces $R = T$ y por tanto $R \in K_p(E,F)$.

c) $\longrightarrow$ a): Sea una red en M. Por c1) sea la subred que verifica la condición 2) de la Proposición 1 a la que denotaremos $\{T_{a(b)},\ b \in B\}$. Por c2). $\{T'_{a(b)}(y'),\ b \in B\}$ converge a $x' \in E'$. Sea $S : F' \to E'$ tal que $S(y') = x'$. Se prueba fácilmente que si $T = R_{|E}$, entonces $T' = S$ y $S' = R$, luego $T'' = R$, lo que implica que la subred $\{T_{a(b)},\ b \in B\}$ converge débilmente a $T \in K_p(E,F)$.

Referencias

[1] A. M. DAVIE, The approximation problem for Banach spaces, *Bull. London Math. Soc.* 5 (1973), 261–266.

[2] M. FEDER AND P. SAPHAR, Spaces of compact operators and their dual space,

Israel J. Math. **21** (1975), 38–49.

[3] T. FIGIEL AND A. PEŁCZYŃSKI, On Enflo's method of construction of Banach spaces without the AP, *Mat. Nauk SSSR* **28** (1973), 95–108.

[4] A. GROTHENDIECK, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo* **8** (1956), 1–79.

[5] S. HEINRICH, Weak sequential completeness of Banach operator ideals, *Sib. Math. J.* **17** (1976), 857–862.

[6] S. KWAPIEN, On Enflo's example of Banach spaces without approximation property, in *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, Paris, 1972–1973.

[7] A. PEARSSON AND A. PIETSCH, p nukleare und p–integrale Abbildungen in Banachraümen, *Studia Math.* **33** (1969), 19–62.

[8] A. PIETSCH, *Operator Ideals*. North-Holland, Amsterdam, 1980.

[9] M. J. RIVERA, The weak topology in ϵ_p-tensor products of Banach spaces, Preprint.

[10] H. P. ROSENTHAL, A characterization of Banach spaces containing ℓ_1, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **71** (1974), 2411–2413.

[11] W. RUESS, Duality and geometry in spaces of compact operators, in *Functional Analysis: Surveys and Recent Results III*, 1984, pages 59–78.

[12] P. SAPHAR, Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires, *Studia Math.* **38** (1970), 71–100.

[13] P. SAPHAR, Hipothèse d'approximation à l'ordre p dans les espaces de Banach et approximation d'applications p absolument sommants, *Israel J. Math.* **13** (1972), 379–398.

[14] A. SZANKOWSKI, Subspaces without the approximation property, *Israel J. Math.* **30** (1978), 123–129.

Received 16/FEB/88

María José Rivera Ortún
E. T. S. Ingenieros Agrónomos
Cátedra Ampliación Matemáticas
Camino de Vera
46022 Valencia
SPAIN