*Collect. Math.* **38** (1987), 257–266

# SOBRE LA DERIVABILIDAD DEL PRODUCTO DE MEDIDAS VECTORIALES

*Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo*

ABSTRACT. The main object of this paper is to determine, under certain conditions, the Radon-Nikodym derivative of the tensor product of measures valued in locally convex spaces, from the Radon-Nikodym derivatives of the factors.

## 1. Introducción

En un reciente trabajo [9] (ver también [8]), presentamos teoremas de Fubini para la integral vectorial bilineal desarrollada en 1.983 por S. A. Sivasankara [12] (y expuesta también por R. Chivukula y Sastry [11]). Para esta integral, en la que se consideran espacios localmente convexos, tanto el propio Sivasankara como R. Chivukula y Sastry, habían conseguido obtener condiciones suficientes para garantizar la existencia y la representación integral del producto de dos medidas $\alpha$ y $\beta$ (con respecto a una cierta aplicación bilineal), generalizando y unificando así los resultados anteriores de Duchon [6], Duchon y Kluvanek [7], Swartz [13], [14], y Huneycutt [10]; pero no ofrecían teoremas de tipo Fubini semejantes al dado por Huneycutt [10] para una integral de tipo Bochner.

El objetivo del presente artículo es probar, en este contexto, que, bajo ciertas condiciones, si las medidas $\alpha$ y $\beta$ tienen derivadas de Radon-Nikodym ($F_1$ y $F_2$, respectivamente) con respecto a sendas medidas $\mu_1$ y $\mu_2$, entonces la medida producto $\alpha \otimes \beta$ tiene derivada de Radon-Nikodym con respecto al producto $\mu_1 \otimes \mu_2$; y una tal derivada es, en el sentido que cabría esperar, el "producto" de $F_1$ y $F_2$. En la demostración de este resultado juega un papel esencial un teorema de tipo Fubini obtenido en [9].

Se aborda después un problema distinto: Si la función $F$ es una derivada de Radon-Nikodym de la medida $\alpha$ respecto a una medida $\mu$, ¿la extensión de $F$ al espacio producto es una derivada de Radon-Nikodym de la medida producto $\alpha \otimes \beta$ con respecto a $\alpha \otimes \mu$? Con determinadas hipótesis, de nuevo la respuesta es afirmativa.

Por último, se incluye un ejemplo sencillo de aplicación del principal teorema obtenido.

## 2. Preliminares

Utilizaremos, como antes se indicó, la integral bilineal definida por S. A. Sivasankara [12].

En lo sucesivo, $X$, $Y$, $Z$, $U$, $V$, $W$ y $T$ serán espacios vectoriales topológicos localmente convexos y separados; $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ y $\mathcal{T}$ denotarán sendas familias generantes de seminormas continuas de estos espacios; supondremos que $X$, $Y$, $Z$ y $T$ son completos; $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(E, \mathcal{E})$ serán espacios medibles; $\alpha : \mathcal{A} \to X$, $\beta : \mathcal{E} \to Y$, $\mu_1 : \mathcal{A} \to V$ y $\mu_2 : \mathcal{E} \to W$ serán medidas contablemente aditivas; $F_1 : \Omega \to U$ y $F_2 : E \to V$, funciones fuertemente integrables; $\phi_1 : U \times V \to X$, $\phi_2 : V \times W \to Y$, $\phi : X \times Y \to Z$, $\phi_3 : X \times V \to T$ y $\phi_4 : T \times W \to Z$ serán aplicaciones bilineales y continuas, verificando:

I) $\phi(x, \phi_2(v, w)) = \phi_4(\phi_3(x, v), w)$, para todo $x \in X$, $v \in V$, $w \in W$.

II) $\phi_3(\phi_1(u, v), v') = \phi_3(\phi_1(u, v'), v)$, para todo $u \in U$, $v \in \mu_1(\mathcal{A})$, $v' \in F_2(E)$.

Del mismo modo que en [9] y [8], diremos que una función $F : \Omega \to U$ es fuertemente integrable si existen un conjunto absolutamente convexo y acotado $B \subset U$, una sucesión $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de funciones simples (de $\Omega$ en $U$), y $K > 0$, tales que $F_n(\Omega) \subset U_B$, para todo $n \in \mathbf{N}$, y $F(\Omega) \subset U_B$; la sucesión $\big(p_B(F - F_n)\big)_{n \in \mathbf{N}}$ converge puntualmente a cero; y

$$\sup_{t \in \Omega} p_B\big(F_n(t)\big) \leq K, \qquad \text{para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Siguiendo la notación de Grothendieck, denotamos por $U_B$ al subespacio vectorial generado por $B$; $p_B$ es el funcional de Minkowski asociado a $B$.

Supondremos que: $T$ es un espacio de Banach; las medidas $\alpha$ y $\mu_1$ son Mackey-acotadas (ver [11] y [12]) (en particular, $\alpha$ y $\mu_1$ son Mackey-acotadas si $X$ y $V$ son metrizables); $\mu_1$ tiene la $*'$ propiedad respecto de $\phi_1$ y también respecto de $\phi_3$; $\mu_2$ tiene la $**$-propiedad respecto de $\phi_2$ y también respecto de $\phi_4$; y $\beta$ tiene la $(**, \phi)$- propiedad.

Siguiendo a [2] – ver también [11] y [12] – diremos que que la medida $\mu_1$ tiene la $*'$-propiedad respecto de $\phi_1$ (o la $(*',\phi_1)$–propiedad) si para cada conjunto absolutamente convexo y acotado $B \subset U$, y para cada seminorma continua $p \in \mathcal{P}$, existe una medida finita contablemente aditiva $\nu_{B,p} : \mathcal{A} \to \mathbf{R}^+$ tal que la $(B,p)$-semivariación de $\mu_1$, $\|\mu_1\|_{B,p}$, está absolutamente controlada por $\nu_{B,p}$. Si $\nu_{B,p}$ no depende de $p \in \mathcal{P}$ (respectivamente de $B \in \mathcal{B}_U$), diremos que que la medida $\mu_1$ tiene la $(**',\phi_1)$ propiedad (resp. la $(*,\phi_1)$–propiedad); y si $\nu_{B,p}$ es independiente de $p \in \mathcal{P}$ y de $B \in \mathcal{B}_U$, diremos que $\mu_1$ tiene la $(**,\phi_1)$-propiedad.

Ya que $T$ es normado, la $(*',\phi_3)$–propiedad y la $(**,\phi_4)$ propiedad son equivalentes, respectivamente, a las propiedades $(**',\phi_3)$ y $(**',\phi_4)$.

Como sabemos, en estas condiciones existen las medidas producto

$$\alpha \otimes \beta : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to Z \quad \text{y} \quad \mu_1 \otimes \mu_2 : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to Y.$$

Además, $\mu_1 \otimes \mu_2$ tiene la $(**',\phi)$–propiedad, según resulta del Lema 6 de [9] (ver también [8]).

Se tiene pues:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc} \Omega & & \mathcal{A} \\ \downarrow{\scriptstyle F_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_1} \\ U & \times & V \\ & \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & \\ & X & \end{array}
\qquad &
\begin{array}{ccc} E & & \mathcal{E} \\ \downarrow{\scriptstyle F_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2} \\ V & \times & W \\ & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} & \\ & Y & \end{array}
\qquad &
\begin{array}{ccc} X & \times & V \\ & \downarrow{\scriptstyle \phi_3} & \\ T & \times & W \\ & \downarrow{\scriptstyle \phi_4} & \\ & Z & \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \Omega \times E \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1(F_1,F_2)} \\ X \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathcal{A} \end{array}
\qquad &
\begin{array}{c} \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_1 \otimes \mu_2} \\ Y \\ \uparrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathcal{E} \end{array}
\qquad &
\begin{array}{c} X \times Y \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Z \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha \otimes \beta} \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \end{array}
\end{array}$$

## 3. Resultados

**3.1. Lema.** *Si $F : E \to V$ es una aplicación fuertemente integrable, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \phi_3(x,F): & E & \longrightarrow & T \\ & s & \longmapsto & \phi_3(x,F(s)) \end{array}$$

*es fuertemente integrable, para cada $x \in X$, y además*

$$\int_E \phi_3(x,F)\,d\mu_2 = \phi\left(x, \int_E F\,d\mu_2\right). \tag{1}$$

*Demostración.* Si $F$ es simple, entonces $\phi_3(x,F)$ también lo es, para cualquier $x \in X$; y la igualdad (1) resulta de I).

Si $F$ es cualquier función fuertemente integrable (y, por tanto, $\mu_2$-integrable), no es difícil probar que $\phi_3(x,F)$ ($x \in X$) también lo es (ver [8]); y la igualdad (1) se obtiene tomando límites de la manera habitual. ■

Teniendo en cuenta ahora II) en lugar de I), se demuestra de manera análoga el siguiente

**3.2. Lema.** *Si $F : \Omega \to U$ es una función fuertemente integrable, entonces, para cada $v \in V$, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \phi_1(F,v): & \Omega & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \phi_1(F(t),v) \end{array}$$

*es fuertemente integrable; y si $v \in F_2(E) \cup \{0\}$, entonces*

$$\int_\Omega \phi_1(F,v)\,d\mu_1 = \phi_3\left(\int_\Omega F\,d\mu_1, v\right).$$

**3.3. Lema.** *Si $F : E \to V$ es una función fuertemente integrable, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \phi_1(F_1,F): & \Omega \times E & \longrightarrow & X \\ & (t,s) & \longmapsto & \phi_1(F_1(t),F(s)) \end{array}$$

*es fuertemente integrable.*

*Demostración.* Por ser $F$ fuertemente integrable, existen un conjunto acotado y absolutamente convexo $B \subset V$, una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de funciones simples (de $E$ en $V$), y $K > 0$, verificando:

i) $F(\Omega \times E) \subset V_B$; y $f_n(\Omega \times E) \subset V_B$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

ii) La sucesión $\big(p_B(F - f_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge puntualmente a cero.

iii) $\sup_{(t,s)\in\Omega\times E} p_B\big(f_n(t,s)\big) \leq K$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

Ya que $F_1$ es fuertemente integrable, existen un conjunto absolutamente convexo y acotado $C \subset U$, una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de funciones simples (de $\Omega$ en $U$), y $M > 0$, verificando condiciones análogas.

Sean

$$\phi_1(C \times B) = \{\phi_1(c,b) : c \in C,\ b \in B\},$$

y $B_1$ la envoltura equilibrada y convexa de $\phi_1(C \times B)$, que evidentemente es acotada (por serlo $C \times B$ y, por tanto, $\phi_1(C \times B)$). (Ya que $\phi_1(C \times B)$ es equilibrado, $B_1$ coincide con su envoltura convexa).

Puesto que $\phi_1$ es bilineal, se verifica que

$$\phi_1(U_C \times V_B) \subset X_{B_1};$$

y además,

$$P_{B_1}\big(\phi_1(u,v)\big) \leq p_C(u)\,p_B(v),$$

cualesquiera que sean $u \in U_C$ y $v \in V_B$.

Se sigue que

$$\phi_1\big(F_1(\Omega) \times F(E)\big) = \phi_1(F_1, F)(\Omega \times E) \subset X_{B_1};$$

y para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$\phi_1(g_n, f_n)(\Omega \times E) \subset X_{B_1},$$

y

$$\sup_{(t,s)\in\Omega\times E} p_{B_1}\big(\phi_1(g_n(t), f_n(s))\big) \leq MK.$$

Además, las funciones $\phi_1(g_n, f_n)$ son simples, como trivialmente se comprueba.

Por otra parte, la sucesión $\big(P_{B_1}(\phi_1(F_1, F) - \phi_1(g_n, f_n))\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge puntualmente a cero, ya que

$$p_{B_1}\big(\phi_1(F_1, F) - \phi_1(g_n, f_n)\big)(t,s) \leq M\,p_B\big(F(s) - f_n(s)\big) + K\,p_C\big(F_1(t) - g_n(t)\big),$$

para todo $(t,s) \in \Omega \times E$ y todo $n \in \mathbf{N}$.

Por consiguiente, la aplicación $\phi_1(F_1, F)$ es fuertemente integrable, como queríamos demostrar. ■

En particular, la aplicación $\phi_1(F_1, F_2) : \Omega \times E \to X$ es fuertemente integrable; y, por tanto, es $(\mu_1 \otimes \mu_2)$–integrable. (Nótese que la medida $\mu_1 \otimes \mu_2$ tiene la $(**', \phi)$–propiedad).

**3.4. Teorema.** *Si $F_1$ y $F_2$ son sendas derivadas de Radon-Nikodym de $\alpha$ con respecto a $\mu_1$ y de $\beta$ con respecto a $\mu_2$, entonces $\phi_1(F_1, F_2)$ es una derivada de Radon-Nikodym de la medida producto $\alpha \otimes \beta$ con respecto a $\mu_1 \otimes \mu_2$.*

*Demostración.* Tanto $\alpha \otimes \beta$ como la aplicación $H : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to Z$ definida por:

$$H(G) = \int_G \phi_1(F_1, F_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \qquad \text{para } G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{E},$$

son medidas vectoriales contablemente aditivas (ver [11]). Por tanto, para probar que son iguales bastará ver que coinciden sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$.

Del Teorema 8.2 de [9] y los lemas 2 y 1 resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{A \times B} \phi_1(F_1, F_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega \times E} \phi_1(F_1, F_2)\, \chi_{A \times B}\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \int_E \left( \int_\Omega (\phi_1(F_1 \chi_a, F_2 \chi_B))\, (\cdot, -)\, d\mu_1 \right) d\mu_2 \\
&= \int_E \phi_3 \left( \int_\Omega F_1\, \chi_A\, d\mu_1, F_2\, \chi_B \right) d\mu_2 \\
&= \phi \left( \int_A F_1\, d\mu_1, \int_B F_2\, d\mu_2 \right) \\
&= \phi(\alpha(A), \beta(B)) \\
&= (\alpha \otimes \beta)(A \times B),
\end{aligned}$$

para todo $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{E}$. ■

Supongamos ahora que se tiene:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega & & \mathcal{A} \\
\downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
U & \times & V \\
& \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & \\
& X &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{A} & & \mathcal{E} \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\
X & \times & Y \\
& \downarrow{\scriptstyle \phi} & \\
& Z &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
& V \times & Y \\
& & \downarrow{\scriptstyle \psi_1} \\
U & \times & T \\
& \downarrow{\scriptstyle \psi} & \\
& Z &
\end{array}$$

donde las aplicaciones $\phi_1$, $\phi$, $\psi_1$ y $\psi$ son bilineales y continuas, verificando que

$$\phi(\phi_1(u,v),y) = \psi(u,\psi_1(v,y)), \qquad \text{para todo } u \in U,\ v \in V,\ y \in Y;$$

los espacios localmente convexos $X$, $Z$ y $T$ son completos; $F : \Omega \to U$ es una función fuertemente integrable; y $\mu : \mathcal{A} \to V$ es una medida contablemente aditiva, que tiene la $(*', \phi_1)$- propiedad.

Supondremos también que las medidas producto $\alpha \otimes \beta : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to Z$ y $\mu \otimes \beta : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to T$ existen, y esta última tiene la $(*', \psi)$–propiedad. (Estas últimas hipótesis se verifican, en particular, si $X$ es normado, $\mu$ es Mackey-acotada, y $\beta$ tiene la $**$ propiedad respecto de $\phi$ y respecto de $\psi_1$. Obsérvese que , en este caso, la medida producto $\mu \otimes \beta$ tiene la $(**', \psi)$-propiedad: y que, por ser $X$ normado, $\alpha$ es Mackey-acotada y $\mu$ tiene la $**'$–propiedad respecto de $\phi_1$). (Ver [8], [9], [11], [12]).

Se comprueba trivialmente que la aplicación $\underline{F} : \Omega \times E \to U$ definida por

$$\underline{F}(t,s) = F(t) \qquad \text{para } (t,s) \in \Omega \times E$$

es fuertemente integrable (y, por tanto, $(\mu \otimes \beta)$–integrable).

Por otra parte, la igualdad

$$\phi\left(\int_A F\,d\mu, \beta(B)\right) = \int_{A \times B} \underline{F}\,d(\mu \otimes \beta), \qquad \text{para } A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}, \tag{2}$$

se demuestra fácilmente si la función $F$ es simple; y si $F$ es cualquier función fuertemente integrable, la igualdad anterior se obtiene tomando límites de la manera habitual.

**3.5. Proposición.** *Si $F$ es una derivada de Radon-Nikodym de $\alpha$ con respecto a $\mu$, entonces $\underline{F}$ lo es de $\alpha \otimes \beta$ con respecto a $\mu \otimes \beta$.*

*Demostración.* De la igualdad (2) resulta que

$$\begin{aligned}\int_{A \times B} \underline{F}\,d(\mu \otimes \beta) &= \phi\left(\int_A F\,d\mu, \beta(B)\right)\\ &= \phi(\alpha(A), \beta(B))\\ &= (\alpha \otimes \beta)(A \times B).\end{aligned}$$

para todo $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{E}$.

Y puesto que la aplicación $H : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to Z$ definida por

$$H(G) = \int_G \underline{F}\, d(\mu \otimes \beta), \qquad \text{para } G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{E},$$

es una medida contablemente aditiva (ver [11]), el resultado se sigue trivialmente. ■

**3.6.** *Un ejemplo en que se verifican las condiciones pedidas anteriormente, para garantizar la derivabilidad del producto de medidas.*

Sean:

$$U = T = X = L_c(\ell_\infty, \ell_1), \qquad V = End_c(\ell_1),$$
$$W = Y = L_c(\ell_1, c_0), \qquad Z = L_c(\ell_\infty, c_0)$$
$$\Omega = E = \mathbf{N}, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbf{N}).$$

Consideramos las medidas

$$\alpha : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to L_c(\ell_\infty, \ell_1), \qquad \beta : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to L_c(\ell_1, c_0),$$

$$\mu_1 : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to End_c(\ell_1), \qquad \mu_2 = \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to L_c(\ell_1, c_0)$$

dadas por

$$\alpha(A)\big((y_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) = \left(\frac{y_n}{2^n}\,\chi_A(n)\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

$$\beta(A)\big((x_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) = \left(\frac{x_n}{n+1}\,\chi_A(n)\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

$$\mu_1(A)\big((x_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) = \left(\frac{x_n}{2^{n/2}}\,\chi_A(n)\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

y

$$\mu_2(A)\big((x_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) = \left(\frac{x_n}{\sqrt{n+1}}\,\chi_A(n)\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

para $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell_\infty$. $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell_1$.

Definimos las aplicaciones $h_1 : \ell_\infty \to \ell_1$ y $h_2 : \ell_1 \to \ell_1$ por

$$h_1\big((x_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) = \left(\frac{x_n}{2^{n/2}}\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

$$h_2\big((x_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) = \left(\frac{x_n}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

que son obviamente lineales y continuas; y consideramos las funciones simples

$$F_1 = h_1\,\chi_{\mathbf{N}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & L_c(\ell_\infty, \ell_1) \\ n & \longmapsto & h_1 \end{array}$$

y

$$F_2 = h_2\,\chi_{\mathbf{N}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & End_c(\ell_1) \\ n & \longmapsto & h_2 \end{array}$$

Las medidas $\alpha$, $\beta$, $\mu_1$ y $\mu_2$ son contablemente aditivas para la topología de la convergencia en norma. Además, $F_1$ (resp. $F_2$) es una derivada de Radon-Nikodym de $\alpha$ (resp. de $\beta$) con respecto a $\mu_1$ (resp. a $\mu_2$). Por otra parte, $h_2\mu_1(A) = \mu_1(A)h_2$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Y se comprueba trivialmente que se verifican las restantes hipótesis consideradas en el trabajo.

Un sencillo cálculo muesta directamente que la función simple

$$F_1 \circ F_2 = (h_2 \circ h_1)\chi_{\mathbf{N}\times\mathbf{N}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \longrightarrow & L_c(\ell_\infty, \ell_1) \\ (n,m) & \longmapsto & h_2 \circ h_1 \end{array}$$

es en efecto una derivada de Radon-Nikodym de la medida producto $\alpha \otimes \beta : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to L_c(\ell_\infty, c_0)$ con respecto a la medida $\mu_1 \otimes \mu_2 : \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \to L_c(\ell_1, c_0)$. (Nótese que

$$(\alpha \otimes \beta)(G)((y_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \left(\frac{y_n}{2^n(n+1)}\chi_G((n,n))\right)_{n\in\mathbf{N}}.$$

y

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(G)((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \left(\frac{x_n}{\sqrt{2^n(n+1)}}\chi_G((n,n))\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

para cada $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell_\infty$ y $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell_1$).

## Bibliografía

[1] A. Balbás and P. Jiménez Guerra, Un teorema de Radon-Nikodym para integrales bilineales, *Rev. R. Acad. Ci. Madrid* **78** (1984), 217–220.

[2] R. Bravo de la Parra, *Tópicos en Integración Bilineal Vectorial*, Tesis Doctoral, Madrid, 1986.

[3] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector Measures*. Math. Surveys 15, American Mathematical Society, Providence. 1977.

[4] I. Dobrakov, On integration in Banach spaces, I, *Czech Math. J.* **20** (1970). 511–536.

[5] M. Duchoň, On the projective tensor product of vector-valued measures, I, *Mat. Čas.* **17** (1967), 113–120.

[6] M. DUCHOŇ , On the projective tensor product of vector-valued measures, II, *Mat. Čas.* **19** (1969), 228-234.

[7] M. DUCHOŇ AND I. KLUVANEK, Inductive tensor product of vector-valued measures, *Mat. Čas.* **17** (1967), 108-112.

[8] F. J FERNÁNDEZ Y FERNÁNDEZ-ARROYO, *Producto de Medidas Valoradas en Espacios Localmente Convexos*, Tesis Doctoral, Madrid, 1987.

[9] F. J FERNÁNDEZ Y FERNÁNDEZ-ARROYO, Teoremas de Fubini en integración vectorial, *Rev. R. Acad. Ci. Madrid* **82** (1988), 101-114.

[10] J. E. HUNEYCUTT, JR., Products and convolutions of vector-valued set functions, *Studia Math.* **41** (1972), 119-129.

[11] R. RAO CHIVUKULA AND A. S. SASTRY, Product vector measures via Bartle integrals, *J. Math. Anal. Appl.* **96** (1983), 180-195.

[12] S. A. SIVASANKARA, *Vector Integrals and Product of Vector Measures*, Ph. D. Thesis, Univ. Microfilm Inter., Michigan, 1983.

[13] C. SWARTZ, Products of vector measures, *Mat. Čas.* **24** (1974), 289-299.

[14] C. SWARTZ, A generalization of a theorem of Duchoň on products of vector measures, *J. Math. Anal. Appl.* **51** (1975), 621-628.

Received 9/NOV/87

Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo
Departamento de Matemáticas Fundamentales
U. N. E. D.
Ciudad Universitaria
28040 Madrid
SPAIN