Collect. Math. **38** (1987), 249–256

UNA NOTA SOBRE LOS ESPACIOS DE SOBOLEV ANISOTROPOS VECTORIALES $L^p_\Gamma(E)$ *

Joaquín Motos and María Jesús Planells

ABSTRACT. Let E be a Fréchet space and let Γ be a finite non-empty subset of $\mathbb{N}^n$ such that if $(\alpha_j) \in \Gamma$ then $(\beta_j) \in \Gamma$ whenever $0 \le \beta_j \le \alpha_j$ for $j = 1, \ldots, n$. In this note we prove that the vector-valued anisotropic Sobolev spaces
$L^p_\Gamma(E) := \{f \in L^p(E) : D^\alpha f \in L^p(E) \text{ for } \alpha \in \Gamma\}$, $1 \le p < \infty$,
have the approximation property if E has this property.

Sea E un espacio de Fréchet y sea Γ un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{N}^n$ tal que si $(\alpha_j) \in \Gamma$ entonces $(\beta_j) \in \Gamma$ cuando $0 \le \beta_j \le \alpha_j$ para $j = 1, \ldots, n$. En esta nota probamos que los espacios de Sobolev anisótropos vectoriales $L^p_\Gamma(E)$, $1 \le p < \infty$, tienen la propiedad de aproximación cuando el espacio E la posee. La prueba está basada en el argumento que L. Schwartz emplea en [9], pp. 9,10, para demostrar que los espacios de distribuciones escalares, normales y que tienen la propiedad de aproximación por truncamiento y regularización, poseen la propiedad de aproximación estricta.

Los espacios vectoriales que utilizaremos están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. La palabra espacio significará espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Si E es un espacio, denotamos por $sc(E)$ el conjunto de todas las seminormas continuas sobre E. Si E y F son espacios, $L_s(E, F)$ (resp. $L_c(E, F)$) denota el espacio de los operadores lineales continuos de E en F provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos finitos (resp. precompactos) de E; cuando $E = F$ simplemente escribimos $L_s(E)$ (resp. $L_c(E)$). $E \hat{\otimes}_\epsilon F$ denota la complección del producto tensorial inyectivo de los espacios

* Subvencionado parcialmente por la CAICYT, Proyecto PB85–0341

E y F. $E \simeq F$ significa que los espacios E y F son topológicamente isomorfos. Si A es un conjunto no vacío, E^A denota el producto topológico de A copias del espacio E. Se dice que el espacio E tiene la propiedad de aproximación (ver [3], p. 232) si los operadores lineales continuos de rango finito en E forman un subespacio denso de $L_c(E)$. $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los enteros no negativos, ℓ^2 el espacio de Hilbert de las sucesiones de números complejos de cuadrado sumable, y s el espacio de Fréchet nuclear de las sucesiones de números complejos de decrecimiento rápido.

Si E es un espacio casi-completo, los espacios funcionales $\mathcal{E}(E)$ (funciones indefinidamente diferenciables sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con valores en E), $\mathcal{D}_K(E)$ (funciones de $\mathcal{E}(E)$ cuyo soporte cae en el compacto K), $\mathcal{D}(E)$ (unión de los $\mathcal{D}_K(E)$) y $\mathcal{B}(E)$ (funciones de $\mathcal{E}(E)$ con derivadas acotadas) están provistos de sus topologías habituales (ver [7] y [8]); como es usual, cuando $E = \mathbb{C}$, escribimos $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Si E es un espacio denotamos por $\mathcal{D}'(E)$ el espacio de las distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$ con valores en E, es decir, el espacio $L_c(\mathcal{D}, E)$ (ver [9]). Si ϕ es una función compleja en $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_x\phi$ y $\check{\phi}$ serán las funciones definidas por

$$(\tau_x\phi)(y) = \phi(y - x), \qquad \check{\phi}(y) = \phi(-y), \qquad \text{para } y \in \mathbb{R}^n.$$

Si E es un espacio de Fréchet y $p \in [1, \infty[$, $L^p(E)$ denota el conjunto de todas las funciones medibles Bochner de $\mathbb{R}^n$ en E, f, tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty$$

para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$. Provisto de la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_p : \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$, $L^p(E)$ es un espacio de Fréchet. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} L^p(E) &\longrightarrow \mathcal{D}'(E) \\ f &\longmapsto \left\{\phi \to \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, f(x)\, dx\right\} \end{aligned}$$

está bien definida y es lineal, inyectiva y continua. Por consiguiente, las funciones de $L^p(E)$ admiten derivadas (débiles o distribucionales) de cualquier orden. (Ver [2] para la teoría de integración de funciones con valores vectoriales y [9], [10] para la teoría de distribuciones con valores vectoriales). Si Γ es un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{N}^n$ tal que si $(\alpha_j) \in \Gamma$ entonces $(\beta_j) \in \Gamma$ cuando $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$ para $j = 1, \ldots, n$, el espacio de Sobolev (anisótropo) sobre $\mathbb{R}^n$ con valores en E (de tipo p, Γ) es el subespacio lineal de $L^p(E)$

$$L^p_\Gamma(E) := \{f \in L^p(E) : D^\alpha f \in L^p(E) \text{ para } \alpha \in \Gamma\}.$$

Con la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_{p,\Gamma} : \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}$, donde

$$\|f\|_{p,\Gamma} = \left(\sum_{\alpha\in\Gamma} \|D^\alpha f\|_p^p\right)^{1/p},$$

$L^p_\Gamma(E)$ llega a ser un espacio de Fréchet (ver [4] para un análisis detallado de los espacios de Sobolev anisótropos escalares y [5] para un estudio de diferentes propiedades de los espacios $L^p_\Gamma(E)$ cuando el espacio E es un (LF)-estricto).

En el lema que sigue E es un espacio de Fréchet y

$$\mathcal{D}_{L^p}(E) = \{f \in \mathcal{E}(E) : D^\alpha f \in L^p(E) \text{ para todo } \alpha \in \mathbf{N}^n\}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Lema 1. (1) *Si $\theta \in \mathcal{D}$ y $f \in L^p(E)$, la función $\theta * f$ dada por*

$$\theta * f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \theta(x-y)\, f(y)\, dy, \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

está en $\mathcal{E}(E)$, $D^\alpha(\theta * f) = (D^\alpha\theta) * f$ para todo $\alpha \in \mathbf{N}^n$, y para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$ se verifica

$$\|\theta * f\|_p \le \|f\|_p\, \|\theta\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}.$$

(2) *Si $\theta \in \mathcal{D}$ y $f \in L^p(E)$ entonces $\theta * f \in \mathcal{D}_{L^p}(E)$.*

(3) *Si $(\theta_j)_1^\infty$ es una sucesión regularizante en $\mathcal{D}$, es decir, tal que*

a) $\theta_j \ge 0$,

b)

$$\int_{\mathbf{R}^n} \theta_j(x)\, dx = 1,$$

c) *$\theta_j(x) = 0$ para $|x| > \epsilon_j$ con $\epsilon_j \to 0+$ cuando $j \to \infty$,*

entonces $(\theta_j * f)_1^\infty$ converge a f en $L^p(E)$ para cada $f \in L^p(E)$.

Prueba. Basta razonar como en el caso escalar, teniendo en cuenta que las funciones continuas y de soporte compacto de $\mathbf{R}^n$ en E forman un subespacio denso de $L^p(E)$. ■

Lema 2. *Sea E un espacio y F un subespacio de E equipado de una topología localmente convexa más fina que la topología inducida por E. Si en $L_c(E)$, I es adherente a $L(E, F)$, y si F tiene la propiedad de aproximación, entonces E también tiene dicha propiedad.*

Prueba. Este lema es la Proposición 2 de [9], p. 7. ■

Teorema. *Sea E un espacio de Fréchet y sea Γ un subconjunto finito no vacío de $\mathbf{N}^n$ con la propiedad que hemos indicado anteriormente. Entonces los espacios $L^p_\Gamma(E)$, $1 \leq p < \infty$, tienen la propiedad de aproximación cuando el espacio E posee dicha propiedad.*

Prueba. Demostraremos primero que el espacio $L^p_\Gamma(E)$ tiene la propiedad de aproximación por regularización (Schwartz [9], p. 8). Sea $\eta \in \mathcal{D}$. Para cada $f \in L^p_\Gamma(E)$, la función $\eta * f$ está en $\mathcal{D}_{L^p}(E)$ en virtud del lema 1 y, por consiguiente, en $L^p_\Gamma(E)$. Además, para cada $\alpha \in \Gamma$, se verifica

$$\begin{aligned}
\eta * D^\alpha f(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} (\tau_x \check{\eta})(y)\, D^\alpha f(y)\, dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^n} D^\alpha (\tau_x \check{\eta})(y)\, f(y)\, dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^n} (-1)^{|\alpha|} \tau_x \big((D^\alpha \eta)^\vee\big)(y)\, f(y)\, dy \\
&= \big(D^\alpha \eta\big) * f(x) \\
&= D^\alpha (\eta * f)(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n;
\end{aligned}$$

por ello, para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$, se tiene

$$\|\eta * f\|_{p,\Gamma} = \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \big\| D^\alpha (\eta * f)\big\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \big\| \eta * D^\alpha f\big\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Utilizando nuevamente el lema 1 tenemos que

$$\|\eta * f\|_{p,\Gamma} \leq \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \big\| D^\alpha f\big\|_p^p \|\eta\|^p_{L^1(\mathbf{R}^n)}\right)^{1/p} = \|\eta\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \|f\|_{p,\Gamma}$$

para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$. Esto demuestra que la aplicación $\{\eta\} : L^p_\Gamma(E) \to L^p_\Gamma(E)$, definida por $\{\eta\}(f) = \eta * f$, es un operador continuo en $L^p_\Gamma(E)$. Sea ahora $(\eta_j)_1^\infty$ una sucesión regularizante en $\mathcal{D}$. Para probar que $(\{\eta_j\})_1^\infty$ converge hacia la identidad I en $L_c\big(L^p_\Gamma(E)\big)$ bastará demostrar, teniendo en cuenta la tonelación del espacio $L^p_\Gamma(E)$ y (2) p. 137, (2) p. 139 de [3], que $(\{\eta_j\})_1^\infty$ converge hacia la identidad I en $L_s\big(L^p_\Gamma(E)\big)$. Pero esto último se deduce de que, para cada $f \in L^p_\Gamma(E)$, se verifica

$$D^\alpha(\eta_j * f) = \eta_j * D^\alpha f \longmapsto D^\alpha f, \qquad \alpha \in \Gamma.$$

en $L^p(E)$ por el punto (3) del lema 1.

A continuación demostraremos que $L^p_\Gamma(E)$ tiene la propiedad de aproximación por truncamiento (Schwartz [9], p. 7). Sea $\theta \in \mathcal{D}$. Si $f \in L^p_\Gamma(E)$ la función θf está en $L^p(E)$ pues, evidentemente, es medible Bochner y, para cada $\|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)$, verifica

$$\|\theta f\|_p \leq \|\theta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \|f\|_p < \infty;$$

debido a que

$$D^\alpha(\theta f) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\theta\, D^\beta f, \qquad \alpha\in\Gamma,$$

la función θf llega a estar en $L^p_\Gamma(E)$. Puesto que, para cada $\|\cdot\|\in \mathrm{sc}(E)$, se verifica

$$\begin{aligned}
\|\theta f\|_{p,\Gamma} &= \left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\left\|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\theta\, D^\beta f\right\|_p^p\right)^{1/p}\\
&\leq \sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\|D^{\alpha-\beta}\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|D^\beta f\|_p\\
&\leq \text{cte.}\max_{\alpha\in\Gamma}\|D^\alpha\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{\beta\leq\alpha}\|D^\beta f\|_p\\
&\leq \text{cte.}\max_{\alpha\in\Gamma}\|D^\alpha\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\mathrm{card}\,\Gamma\sum_{\alpha\in\Gamma}\|D^\alpha f\|_p\\
&\leq \text{cte.}\max_{\alpha\in\Gamma}\|D^\alpha\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,(\mathrm{card}\,\Gamma)^{(1/p')+1}\,\|f\|_{p,\Gamma}\,,
\end{aligned}$$

siendo p' el exponente conjugado de p, vemos que la aplicación $[\theta] : L^p_\Gamma(E) \longrightarrow L^p_\Gamma(E)$, definida por $[\theta](f) = \theta f$, también es un operador continuo en $L^p_\Gamma(E)$. Sea ahora $(\theta_j)_1^\infty$ una sucesión en $\mathcal{D}$ tal que $\lim_j \theta_j = 1$ en $\mathcal{E}$ y tal que el conjunto $\{\theta_j : 1, 2, \ldots\}$ sea acotado en $\mathcal{B}$. Demostraremos que $([\theta_j])_1^\infty$ converge hacia la identidad I en $L_c(L^p_\Gamma(E))$. Razonando como antes será suficiente probar que $([\theta_j])_1^\infty$ converge hacia la identidad I en $L_s(L^p_\Gamma(E))$ o, lo que es equivalente, que para cada $f\in L^p_\Gamma(E)$ se verifica que

$$\|\theta_j f - f\|_{p,\Gamma} \longrightarrow 0$$

para cada $\|\cdot\|\in\mathrm{sc}(E)$. Dados tales f y $\|\cdot\|$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|\theta_j f - f\|_{p,\Gamma} &= \left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\|D^\alpha((\theta_j-1)f)\|_p^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\left\|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}(\theta_j-1)\, D^\beta f\right\|_p^p\right)^{1/p}\\
&\leq \sum_{\alpha\in\Gamma}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|D^{\alpha-\beta}(\theta_j-1)(x)\right|^p\left\|D^\beta f(x)\right\|^p dx\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

y el segundo miembro de esta desigualdad tiende a 0 cuando $j\to\infty$ en virtud de las propiedades de la sucesión $(\theta_j)_1^\infty$ y del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Sean $(\eta_j)_1^\infty$ y $(\theta_j)_1^\infty$ sucesiones en $\mathcal{D}$ como las que acabamos de considerar. La sucesión $(\{\eta_k\})_1^\infty$ converge hacia la identidad I en $L_c(L_\Gamma^p(E))$ y, para cada k, la sucesión $(\{\eta_k\} \circ [\theta_j])_{j=1}^\infty$ converge hacia $\{\eta_k\}$ en $L_c(L_\Gamma^p(E))$ (para $f \in L_\Gamma^p(E)$ y $\|\cdot\| \in sc(E)$ se tiene

$$\|\eta_k * \theta_j f - \eta_k * f\|_{p,\Gamma} \leq \|(1 - \theta_j) f\|_{p,\Gamma}).$$

Por consiguiente, la identidad I es adherente al conjunto $\{\{\eta_k\} \circ [\theta_j] : j, k = 1, 2, \ldots\}$ en el espacio $L_c(L_\Gamma^p(E))$. (Obsérvese que también hemos establecido la densidad de $\mathcal{D}(E)$ en $L_\Gamma^p(E)$ ya que las funciones $\eta_k * \theta_j f$ son indefinidamente diferenciables y de soporte compacto para todo $f \in L_\Gamma^p(E)$). Teniendo en cuenta que las funciones que aparecen en el diagrama

$$\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad T \longmapsto \eta_k * \theta_j T \\[1ex]
L_\Gamma^p(E) \xrightarrow{q} L^p(E) \longrightarrow \mathcal{D}'(E) \longrightarrow \mathcal{D}(E) \xrightarrow{r} L_\Gamma^p(E) \\
f \longmapsto \left\{ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \right\}
\end{array}$$

(siendo q y r las inyecciones canónicas) son continuas, resulta que

$$\{\{\eta_k\} \circ [\theta_j] : j, k = 1, 2, \ldots\} \subset L(L_\Gamma^p(E), \mathcal{D}(E))$$

y así la identidad I llega a ser adherente al conjunto $L(L_\Gamma^p(E), \mathcal{D}(E))$ en el espacio $L_c(L_\Gamma^p(E))$. Además el espacio $\mathcal{D}(E)$ tiene la propiedad de aproximación: $\mathcal{D}(E)$ es topológicamente isomorfo a la suma directa localmente convexa de una cantidad numerable de copias de $s(E) \simeq s\tilde{\otimes}_\epsilon E$ (ver [1] Teor. 4), por tanto $\mathcal{D}(E)$ tiene la propiedad de aproximación en virtud de [6] Cor. 2, p. 110, [3] (7), p. 284 y [3] (2), p. 245. Basta ahora aplicar el lema 2 para terminar la prueba del teorema. ■

Nota. En algunos casos podemos utilizar técnicas distintas a las empleadas en el teorema. Por ejemplo, si E es un espacio de Fréchet topológicamente isomorfo a un subespacio de $(\ell^2)^{\mathbb{N}}$ (E nuclear, E Hilbert separable, ...) entonces el espacio $L_\Gamma^2(E)$ también es topológicamente isomorfo a un subespacio de $(\ell^2)^{\mathbb{N}}$ (ver [5]) por lo que $L_\Gamma^2(E)$ tiene la propiedad de aproximación en virtud de [3] (4), p. 245. Si E es un espacio de Fréchet débilmente completo entonces

$$L_\Gamma^p(E) \simeq (L_\Gamma^p)^{\mathbb{N}} \qquad (L_\Gamma^p := L_\Gamma^p(\mathbb{C})), \qquad 1 \leq p < \infty$$

(ver [5]): entonces $L_\Gamma^p(E) \simeq (L^p(0,1))^{\mathbb{N}}$ cuando $1 < p < \infty$ (utilícese [4] Th. C) y $L_\Gamma^1(E) \simeq (L^1(0,1))^{\mathbb{N}}$ cuando Γ es un intervalo (es decir, existe un $(c_j) \in \mathbb{N}^n$ tal que

$$\Gamma = \{(\alpha_j) \in \mathbb{N}^n : 0 \leq \alpha_j \leq c_j \text{ para } j = 1, \ldots, n\}\ )$$

(utilícese [4] Th. B). En estas condiciones los espacios $L^p_\Gamma(E)$ tienen la propiedad de aproximación en virtud de [3] (3), p. 245 y [3] (10), p. 259.

Sea E un espacio de Fréchet, $p \in [1, \infty[$, y $(\Gamma_m)_1^\infty$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos no vacíos de $\mathbb{N}^n$ tales que, para cada m, si $(\alpha_j) \in \Gamma_m$ entonces $(\beta_j) \in \Gamma_m$ cuando $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Definimos

$$L^p_{(\Gamma_m)}(E) := \bigcap_{m=1}^{\infty} L^p_{\Gamma_m}(E)$$

y equipamos a este espacio de la topología generada por la familia de seminormas

$$\{\|\cdot\|_{p,\Gamma_m} : m = 1, 2, \ldots, \ \|\cdot\| \in \mathrm{sc}(E)\}.$$

Con estas notaciones se tiene el siguiente

Corolario. *$L^p_{(\Gamma_m)}(E)$ tiene la propiedad de aproximación si el espacio E posee dicha propiedad.*

Prueba. Si para $n \geq m$ denotamos por I_{mn} la inyección canónica de $L^p_{\Gamma_n}(E)$ en $L^p_{\Gamma_m}(E)$ entonces $\left(L^p_{\Gamma_m}(E), I_{mn}\right)$ es una sucesión proyectiva. Además, el espacio $L^p_{(\Gamma_m)}(E)$ es topológicamente isomorfo al límite proyectivo de esta sucesión. Puesto que $\mathcal{D}(E)$ es denso en cada $L^p_{\Gamma_m}(E)$ (ver prueba del teorema) ese límite proyectivo es reducido. Por consiguiente, el espacio $L^p_{(\Gamma_m)}(E)$ es un Fréchet con la propiedad de aproximación en virtud del teorema y de [3] (7), p. 247. ■

Bibliografía

[1] J. BONET. Representaciones de los espacios $\mathcal{E}^k(V, E)$ y $\mathcal{D}^k(V, E)$. *Rev. Real Acad. Ci. Madrid* **76** (1982), 121–129.

[2] H. G. GARNIR, M. DE WILDE AND J. SCHMETS, *Analyse Fonctionnelle* vol. 2 and 3, Birkhäuser, Basel-Stuttgart. 1972–73.

[3] G. KÖTHE. *Topological Vector Spaces II*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[4] A. PEŁCZYŃSKI AND K. SENATOR, On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with "classical Banach spaces" and a Sobolev type embedding theorem, *Studia Math.* **84** (1986), 169–215.

[5] M. J. PLANELLS. Sobre espacios de Sobolev anisótropos con valores vectoriales, Preprint.

[6] H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*. Springer, New York, 1971.

[7] L. SCHWARTZ, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *J. Analyse Math.* **4** (1954-55), 88–148.

[8] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[9] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ch. I, *Ann. Inst. Fourier* **7** (1957), 1–141.

[10] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ch. II, *Ann. Inst. Fourier* **8** (1958), 1–209.

Received 11/APR/88

Joaquín Motos and M. Jesús Planells
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n
46022 Valencia
SPAIN