Collect. Math. **38** (1987), 177–191

ALGÈBRES À BASES BORNÉES

M. Akkar, L. Oubbi and M. Oudadess

ABSTRACT. In this paper, we introduce a new class of locally-convex algebras containing the one of unital uniformly A-convex algebras. It is the collection of those separated locally-convex algebras which have an algebraic basis whose idempotent hull is is bounded. Such algebras are said to be "with m-bounded bases". Under different notions of completeness, we endow these algebras with a complete algebra norm which has the same bounded sets of different kinds. Different questions on the factorization and commutativity are considered.

I. Introduction

En général, l'étude des algèbres localement convexes, A-convexes, uniformément A-convexes ou multiplicativement convexes a été faite séparément. Nous introduisons ici une classe d'algèbres appelées "algèbres à bases bornées" dont l'étude englobe certains aspects des algèbres citées ci-dessus. Ce sont les algèbres localement convexes séparées dont une base algébrique est bornée. Nous en distinguons une sous-classe, celle des algèbres localement convexes séparées dont l'enveloppe idempotente d'une base est bornée, dites algèbres à bases multiplicativement bornées (m-bornées). Nous montrons que dans le cas bornologiquement complet (b-complet), toute algèbre à base bornée est à base m-bornée (corollaire V.4). Par ailleurs, nous montrons que toute algèbre uniformément localement A-convexe à unité approchée bornée et toute algèbre A-normée sont des algèbres à base m-bornée. C'est en fait ce qui explique les bons résultats sur la théorie spectrale des a.u.l. A-convexes ([10], [13], [14], ...). Dans [12], on munit toute a.u.l. A-convexe (E,τ) unitaire et séquentiellement complète d'une norme d'algèbre de Banach plus fine et ayant les mêmes bornés que τ. Ce résultat a été obtenu dans [10] avec la même notion de complétude mais avec seulement une unité approchée bornée. Dans le cas des algèbres à bases bornées nous examinons cette question sous différentes notions de complétude et améliorons les résultats ci-dessus. Nous munissons toute algèbre à base m-bornée (E,τ) d'une norme d'algèbre plus fine que τ. Ceci donne que tout élément d'une telle algèbre est régulier (au sens de [9]). Par ailleurs, cette norme est complète dès que (E,τ) est pseudo-complète. Dans ce cas, la norme et τ n'ont pas nécessairement les mêmes bornés mais elles ont toujours les mêmes bornés réguliers (au sens de [9]). Cependant dès que (E,τ) est bornologiquement complète la norme et τ ont les mêmes bornés. Ainsi toute algèbre à bases m-bornées bornologiquement complète munie de sa bornologie de Von Neumann est une algèbre bornologique multiplicativement convexe (a.b.m.c.) au sens de Akkar [1] ou de Hogbé [9] ou une pseudo-Banach algebra au sens de [3]. Ceci améliore un résultat de [15]. Il le généralise aussi puisqu'il existe des algèbres à bases m-bornées qui ne sont même pas localement A-convexes. A la fin de cet article, nous examinons des questions sur la factorisation et la commutativité des algèbres à bases bornées. Ceci nous permet de construire une algèbre uniformément localement A-convexe à base m-bornée complète mais qui n'admet aucune unité approchée ni à gauche ni à droite. Cet example échappe à l'approche de [10] et de [15].

II. Préliminaires

On désignera par E une algèbre sur le corps $\mathbf{K}$ ($= \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), par E^* son dual algébrique et par τ une topologie d'espace localement convexe (e.l.c.) séparé sur E.

On dira qu'un sous-espace vectoriel de E^* est total s'il sépare les points sur E.

On dira que (E,τ) est une algèbre localement convexe (a.l.c.) si la multiplication de E est séparément continue. Si τ peut être définie par une famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de semi-normes vérifiant pour tout x et y dans E,

$$P_\lambda(x\,y) \leq P_\lambda(x)\,P_\lambda(y)$$

et ceci pour $\lambda \in \Lambda$, alors on dit que (E,τ) est une algèbre localement multiplicativement convexe (a.l.m.c.).

On dira qu'une a.l.c. (E,τ) est une algbre localement A-convexe (a.l. A-convexe) à gauche (resp. à droite) si τ peut être définie par une famille de semi-normes $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que:

$$\forall x \in E,\ \forall\lambda \in \Lambda,\ \exists M(x,\lambda) > 0 \qquad (\text{resp. } N(x,\lambda) > 0):$$
$$P_\lambda(x\,y) \leq M(x,\lambda)\,P_\lambda(y)\ \forall y \in E \qquad (\text{resp. } P_\lambda(y\,x) \leq N(x,\lambda)\,P_\lambda(y)\ \forall y \in E).$$

Si la constante $M(x,\lambda)$ (resp. $N(x,\lambda)$) peut être prise indépendante de λ i.e.

$$M(x,\lambda) = M(x) \qquad (\text{resp. } N(x,\lambda) = N(x)),$$

alors on dit que (E,τ) est une algèbre uniformément localement A-convexe (a.u.l. A-convexe) à gauche (resp. à droite).

Une a.l. A-convexe (resp. a.u.l. A-convexe) à la fois à gauche et à droite est dite simplement une a.l. A-convexe (resp. a.u.l. A-convexe).

Un disque borné B d'un e.l.c. séparé F est dit complétant si le sous-espace vectoriel F_B de F engendré par B muni de la jauge de B est un espace de Banach.

On dira qu'un e.l.c. séparé (F,T) est bornologiquement complet (b-complet) si tout borné de F est contenu dans un disque borné complétant.

Une a.l.c. séparée (E,τ) est dite pseudo-complète [2] si tout disque borné fermé et idempotent de E est complétant.

Un borné d'une a.l.c. est dit régulier [9] s'il est absorbé par un disque borné idempotent.

Un élément x d'une a.l.c. est dit régulier au sens de [9] ou borné au sens de [2] si le singleton $\{x\}$ est régulier.

III. Algèbres à bases bornées. Définitions et exemples

Proposition III.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *τ peut être définie par une famille de semi-normes $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que pour tout x dans E on ait:*

$$\sup\{P_\lambda(x),\ \lambda\in\Lambda\}<+\infty.$$

ii) *(E,τ) est un espace subnormable au sens de J. Esterle* [7].

iii) *Il existe une base algébrique de E qui est bornée.*

iv) *E contient un tonneau (disque fermé et absorbant) qui est borné.*

Preuve. i) implique ii) car si on considère, pour tout x dans E, la quantité

$$\|x\|=\sup\{P_\lambda(x),\ \lambda\in\Lambda\}$$

on obtient une norme d'espace vectoriel sur E plus fine que τ.

ii) entraine iii). En effet, soit $(a_i)_{i\in I}$ une base algébrique de E. Soit pour tout $i\in I$, $e_i=\|a_i\|^{-1}\,a_i$. Alors la base $(e_i)_{i\in I}$ est bornée dans $(E,\|\cdot\|)$. Donc aussi dans (E,τ).

iii) implique iv). Car si $(e_i)_{i\in I}$ est une base bornée, son enveloppe disquée fermée B est un tonneau qui est encore borné; B est absorbant car si

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_{ij}$$

alors $\left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\right)^{-1} x$ est dans B puisque

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\right)^{-1} |\alpha_{ij}| = 1.$$

Enfin iv) entraine i) car si B est un tonneau borné de (E,τ), si τ est définie par la famille $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de semin-normes et si x est dans E, alors on a:

a) $\forall\lambda \in \Lambda,\ \exists M(\lambda) > 0 :\ \sup\{q_\lambda(y),\ y \in B\} \leq M(\lambda)$;

b) $\exists M(x) > 0 :\ x \in M(x)\, B$.

Donc pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$q_\lambda(x) \leq M(x)\, M(\lambda).$$

Posons $P_\lambda(x) = M(\lambda)^{-1}\, q_\lambda(x)$. Alors τ est encore définie par la famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et l'on a pour tout x dans E:

$$\sup\{P_\lambda(x),\ \lambda \in \Lambda\} \leq M(x) < \infty.$$

Définition III.2. Une a.l.c. séparée (E,τ) est dite *algèbre à base bornée* si elle vérifie l'une des assertions équivalentes de la proposition ci-dessus.

La proposition suivante se démontre de manière analogue à la précédente.

Proposition III.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *E peut être munie d'une norme d'algèbre plus fine que τ.*

ii) *Il existe un tonneau V idempotent ($V^2 = V\,V \subset V$) et borné de E.*

iii) *E admet une base algébrique dont l'enveloppe idempotente est bornée.*

Définition III.4. Une a.l.c. séparée est dite à *base multiplicativement -bornée (m-bornée)* si elle vérifie l'une des assertions équivalentes de la proposition III.3.

Exemple III.5. Toute algèbre normée est à base m-bornée.

Exemple III.6. Soit E l'algèbre des plynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbf{C}$. Soit D l'ensemble des nombres rationnels positifs plus petits que 1. Soit

$$L = \{f_\lambda : E \to \mathbf{C} : \; f_\lambda(x^n) = \lambda^n \text{ et } f_\lambda \text{linéaire}\}.$$

On considère E l'espace vectoriel engendré par L. C'est un sous-espace total du dual algébrique E^* de E (cf. [19]). On munit E de la topologie faible $\sigma(E, E')$ définie par E'. Alors $(E, \sigma(E, E'))$ est une a.l.m.c. métrisable (cf. [19]). De plus elle est à base m-bornée. En effet, $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base idempotente bornée.

Exemple III.7. Nous donnons maintenant une algèbre à base m-bornée qui n'est pas localement A-convexe.

Soit $E = C[0,1]$ l'algèbre des fonctions complexes définies et continues sur $[0,1]$. On munit E de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. Soit E' le dual topologique de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Alors $(E, \sigma(E, E'))$ est une algèbre à base m-bornée non localement A-convexe.

Exemple III.8. Voici maintenant un exemple d'a.l.m.c. de Fréchet commutative et unitaire mais qui n'admet aucune base bornée.

Soit $\mathcal{H}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω de $\mathbf{C}$. Munie de la topologie de la convergence sur les compacts de Ω, $\mathcal{H}(\Omega)$ devient une a.l.m.c. de Fréchet admettant la propriété de Heine-Borel [17]. Si E était à base bornée, elle serait de dimension finie ce qui n'est pas le cas. En fait $\mathcal{H}(\Omega)$ est tonnelée. Donc si elle est à base bornée, elle admettra un voisinage fermé et borné de zéro qui sera compact.

Nous donnons maintenant la proposition suivante fournissant d'autres algèbres à bases m-bornées.

Proposition III.9. *Toute a.u.l. A-convexe à gauche (resp. à droite) à base bornée est à base m-bornée.*

Preuve. Nous allons le prouver pour le coté gauche. Le coté droit se fait de la même manière. Soit alors $(E, (P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ une a.u.l. A-convexe à gauche et à base bornée $(a_i)_{i\in I}$. Alors, pour tout $i \in I$, il existe $M_1(i) > 0$ et $M_2(i) > 0$ telles que:

$$\sup\{P_\lambda(a_i), \; \lambda \in \Lambda\} \leq M_1(i)$$

et

$$P_\lambda(a_i\, x) \leq M_2(i)\, P_\lambda(x)$$

et ceci pour tout λ dans Λ et tout x dans E. Considérons, pour tout i dans I, le réel

$$M(i) = \max(M_1(i), M_2(i))$$

et $e_i = (M(i))^{-1}\, a_i$. Alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E dont l'enveloppe idempotente A est bornée. Or, d'après [18],

$$A = \left\{ \prod_{j=1}^{n} e_{i_j},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$$

et on montre que A est contenue dans l'intersection B des boules unité des semi-normes P_λ.

Corollaire III.10.

1) *Toute algèbre A-normée est à base m-bornée;*

2) *Toute a.u.l. A-convexe à gauche (resp. à droite) à unité approchée à droite (resp. à gauche) bornée est à base m-bornée.*

Preuve. 1) Toute algèbre A-normée est à base bornée. Et comme c'est une a.u.l. A-convexe, la proposition III.9 donne qu'elle est à base m-bornée.

2) Nous raisonnons encore pour le côté gauche, le côté droit se fait de manière analogue.

Soit $(E, (P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ une a.u.l. A-convexe à gauche à unité approchée à droite $(e_i)_{i\in I}$. Comme $(e_i)_{i\in I}$ est bornée, il existe une constante $M(\lambda) > 0$ telle que

$$\sup\{P_\lambda(e_i),\ i \in I\} \leq M(\lambda).$$

Posons, pour tout x de E et tout $\lambda \in \Lambda$,

$$q_\lambda(x) = (M(\lambda))^{-1}\, P_\lambda(x).$$

Alors la topologie de E est encore définie par la famille $(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et l'on a, pour tout x de E:

$$\exists M(x) > 0 :\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall i \in I\ \ P_\lambda(x\, e_i) \leq M(x)\, P_\lambda(e_i) \leq M(\lambda)\, M(x).$$

Donc en passant à la limite sur i, on obtient que

$$P_\lambda(x) \leq M(x)\, M(\lambda).$$

Donc $q_\lambda(x) \leq M(x)$. Il en résulte que

$$\sup\{q_\lambda(x),\ \lambda \in \Lambda\} \leq M(x) < +\infty.$$

IV. Propriétés et propriétés de stabilité des algèbres à bases bornées

Proposition IV.1. *Soit (E, τ) une algèbre à base bornée. Alors on a:*

a) *Si E est tonnelée, sa topologie peut être définie par une norme d'algèbre.*

b) *Si E est à base m-bornée, elle est à éléments réguliers.*

Preuve. a) Comme E admet un tonneau borné, elle sera localement bornée. Donc τ peut être définie par une norme d'espace vectoriel. Or le produit est séparément continu pour τ. Donc aussi pour la norme. Ainsi, E, munie de cette norme, est une algèbre A-normée. D'où elle est à base m-bornée. Mais puisque (E, τ) est tonnelée, elle admettra un voisinage idempotent borné V. Alors la jauge $\|\cdot\|$ de V est une norme d'algèbre sur E définissant la topologie τ.

b) Comme tout élément d'une algèbre normée est régulier et puisque E est à base m-bornée, elle est à éléments réguliers.

Corollaire IV.2. *Une algèbre A-normée tonnelée est normée.*

Nous regardons dans ce qui suit si la propriété "à base bornée" est conservée par certaines opérations. Ainsi, obtenons-nous:

Proposition IV.3.

1) *Toute sous-algèbre d'une algèbre à base bornée (resp. m-bornée) est du même type.*

2) *Tout produit fini d'algèbres à bases bornées (resp. m-bornées) est encore du même type.*

3) *Tout quotient d'une algèbre à base bornée (resp. m-bornée) par un idéal fermé est encore du même type.*

Nous allons voir cependant que cette notion n'est pas conservée par passage à une limite projective, donc aussi à un produit quelconque, ou à une limite inductive.

On sait que toute a.l.m.c. complète est limite projective d'algèbres de Banach ([11]); donc, d'algèbres à bases m-bornées. Et puisqu'une a.l.m.c. complète n'est pas toujours à base bornée (cf. exemple III.8) le passage à la limite projective ne conserve pas la propriété "à base bornée". Mais toute telle limite projective est une sous-algèbre d'un produit d'algèbres de Banach. Donc le passage au produit ne conserve pas aussi cette propriété.

Si par ailleurs, on munit l'algèbre $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et à supports compacts, de la topologie limite inductive stricte des algèbres de Banach $\mathcal{K}_n(\mathbf{R})$ des éléments de $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ et à supports dans $[-n, n]$, alors $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ est limite inductive d'algèbres à bases m-bornées. Cependant, elle n'est pas à base bornée. Car sinon, puisque tout borné de $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ est contenu dans un certain $\mathcal{K}_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{K}(\mathbf{R})$ serait égale à $\mathcal{K}_n(\mathbf{R})$, ce qui n'est pas le cas.

V. Norme d'algèbre de Banach sur des algèbres à bases bornées

Dans [15], M. Oudadess montre que toute a.u.l. A-convexe unitaire et séquentiellement complète (E,τ) peut être munie d'une norme d'algèbre de Banach plus fine et ayant les mêmes bornés que τ. Ce résultat a été étendu par H. Kemmoun [10] au cas séquentiellement complet à unité approchée bornée. Nous obtenons, ici, et dans le cadre des algèbres à bases bornées, un résultat permettant de comprendre ce qui se passe sous différentes notions de complétude. Pour ce faire, on montre le lemme suivant, améliorant, dans le cas topologique, un résultat donné dans [8].

Lemme V.1. *Dans un e.l.c. séparé (E,τ) tout tonneau absorbe tous les disques bornés complétants.*

Nous en arrivons maintenant à notre résultat principal.

Théorème V.2. *Soit (E,τ) une algèbre à base bornée. Alors on a:* i) *Si (E,τ) est pseudo-complète, E peut être munie d'une norme d'algèbre de Banach plus fine et ayant les mêmes bornés réguliers que τ.*

ii) *Si (E,τ) est b-complète, E peut être munie d'une norme d'algèbre de Banach plus fine et ayant les mêmes bornés que τ.*

Preuve. i) Comme (E,τ) est à base m-bornée, elle admet un tonneau idempotent borné B. Mais (E,τ) est pseudo-complète, donc B est complétant. D'où $E_B = E$ muni de la jauge $\|\cdot\|$ de B est une algèbre de Banach. Et comme B est borné, la norme $\|\cdot\|$ est plus fine que τ. De plus si A est un borné régulier de (E,τ) alors A est absorbé par un disque borné fermé et idempotent D. Un tel borné est complétant puisque (E,τ) est pseudo-complète. Donc, par le lemme V.1, D est absorbé par le tonneau B. D'où B est aussi un borné régulier de $(E, |\cdot\|)$.

ii) La réciproque est immédiate puisque tout borné pour la norme est borné pour τ.

Remarque V.3. Dans le cas où (E,τ) est pseudo-complète non b-complète τ et la norme n'ont pas nécessairement les mêmes bornés comme le prouve le contre-exemple suivant.

Soit $E = C_b(\mathbf{R})$ l'algèbre des fonctions complexes continues et bornées sur $\mathbf{R}$. On munit E de la topologie τ de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbf{R}$. Alors (E,τ) est une a.u.l. A-convexe unitaire et séparée. Donc c'est une algèbre à base m-bornée (cf. corollaire III.10). De plus (E,τ) est pseudo-complète car le plus grand, au sens de l'inclusion, disque fermé borné et idempotent de (E,τ) est $B = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$. Or B est complétant. Cependant τ ne peut pas avoir les mêmes bornés qu'une norme plus fine. Car sinon (E,τ) étant métrisable, elle serait une algèbre de Banach, ce qui n'est pas le cas.

Corollaire V.4. *Toute algèbre à base bornée b-complète est à base m-bornée.*

Corollaire V.5. *Dans une algèbre à base m-bornée pseudo-complète, le spectre de chaque élément est compact.*

Ce résultat améliore et généralise un résultat de [15] où l'auteur montre que le spectre de tout élément d'une a.u.l. A-convexe unitaire et séquentiellement complète est compact. Notre résultat exige une complétude beaucoup moins forte que dans [15]. De plus il est donné dans un cadre plus général.

Corollaire V.6. *Une algèbre à base m-bornée pseudo-complète est à base (algébrique) dénombrable si, et seulement si, elle est de dimension finie.*

Remarque V.7. On sait, par le théorème de Baire, que l'algèbre $E = \mathbf{C}[x]$ de l'exemple III.8 n'est pas complète. En fait, le corollaire V.6 nous donne qu'elle n'est même pas pseudo-complète. En fait, il n'existe aucune topologie localement convexe séparée sur E qui en fait une algèbre à la fois pseudo-complète et à base m-bornée. En particulier, il n'existe, sur E, aucune topologie d'a.u.l. A-convexe qui soit pseudo-complète.

Corollaire V.8. *Toute algèbre à base bornée b-complète munie de sa bornologie de Von Neumann est une a.b.m.c. complète.*

Corollaire V.9. *Toute a.u.l. A-convexe à gauche (resp. à droite) (E,τ) b-complète et à unité approchée à droite (resp. à gauche) bornée peut être munie d'une norme d'algèbre de Banach plus fine et ayant les mêmes bornés que τ.*

La proposition suivante donne, en un certain sens, l'unicité de la topologie normée plus fine que celle d'une algèbre à base bornée b-complète.

Proposition V.10. *Soit (E,τ) une algèbre à base bornée b-complète. Alors toutes les topologies bornologiques sur E ayant les mêmes bornés que τ sont toutes équivalentes à une même norme d'algèbre de Banach.*

Preuve. Par le théorème V.2, E peut être munie d'une norme d'algèbre de Banach plus fine et ayant les mêmes bornés que τ. Or deux topologies bornologiques qui ont les mêmes bornés sont équivalentes. D'où le résultat.

Nous donnons maintenant un théorème de structure améliorant le théorème III.3 de [14].

Théorème V.11. *Soit (E,τ) une algèbre à base bornée pseudo-complète et commutative. Alors E est algébriquement une algèbre de multiplicateurs. Et si E est de plus semi-simple, c'est une algèbre de fonctions continues sur un compact.*

Remarque V.12. On sait que dans une algèbre de Banach commutative et semi-simple toute involution est continue (cf. [16]). Il en résulte que dans une algèbre à base bornée b-complète commutative et semi-simple toute involution est bornée.

VI. Factorisation dans les algèbres à bases bornées

Nous examinons dans ce qui suit le problème de factorisation dans les algèbres à bases bornées.

Soit (E,τ) une algèbre localement convexe séparée. On supposera que τ est définie par la famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de semi-normes telle que $\sup\{P_\lambda(x),\ \lambda\in\Lambda\}$ est fini pour tout $x\in E$.

Définition VI.1. On dit qu'une famille $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une *unité approchée uniforme à droite* de (E,τ) si, pour tout $\epsilon>0$ et tout $x\in E$, il existe $\alpha_0\in I$ tel que, pour tout $\lambda\in\Lambda$,
$$P_\lambda(e_\alpha x - x) < \epsilon$$
dès que $\alpha_0\leq\alpha$.

Exemple VI.2. Nous donnons ici, des exemples de telles unités approchées uniformes.

1) Soit l'algèbre ℓ^1 des suites complexes absolument sommables. On munit ℓ^1 de la topologie définie par les semi-normes $(P_n)_{n\geq 1}$ où
$$P_n((x_i)_i) = \sum_{p=1}^{n} |x_p|.$$

On considère la famille $(e_i)_{i\geq 1}$ où:

$$e_i = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots), \qquad i \text{ fois } 1.$$

Alors $(e_i)_{i\geq 1}$ est une unité approchée uniforme de $(\ell_1, (P_n)_{n\geq 1})$.

2) Soit l'algèbre $C_0(\mathbf{R})$ des fonctions continues de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{C}$ et tendant vers zéro à l'infini. On munit $C_0(\mathbf{R})$ de la topologie induite par $(C_b(\mathbf{R}), \beta)$, (cf. [14]). Alors la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une unité approchée uniforme où:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| \geq n+1 \\ \text{linéaire par morceaux et continue.} & \end{cases}$$

Proposition VI.3. *Si (E, τ) est b-complète et à unité approchée uniforme à gauche bornée, alors $E^2 = E$. Plus précisement: pour tout $z \in A$ et pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in E$ tels que: $z = x\,y$; y est dans l'adhérence, pour τ, de Ez et pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $P_\lambda(y - z) < \delta$.*

Preuve. La norme

$$\|\cdot\| = \sup\{P_\lambda(\cdot);\ \lambda \in \Lambda\}$$

est une A-norme complète. Donc elle est équivalente à une norme $\|\cdot\|'$ d'algèbre de Banach. Donc il existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait:

$$\alpha\,\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\,\|x\|.$$

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une unité approchée uniforme à gauche bornée. C'est une unité approchée uniforme à gauche dans $(E, \|\cdot\|)$ donc aussi dans $(E, \|\cdot\|')$. Il s'en suit, d'après le théorème de P. J. Cohen [6] que $E^2 = E$ et que, pour tout $z \in A$ et tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in E$ tels que $z = x\,y$; y est dans la fermeture, pour la norme, de Ez et $\|y - z\|' < \delta\,\alpha$. Mais l'on a, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$P_\lambda(y - z) \leq \alpha^{-1}\,\|y - z\|'.$$

Donc $P_\lambda(y - z) < \delta$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Or τ est moins fine que $\|\cdot\|'$. Donc la $\|\cdot\|'$ fermeture de Ez est contenue dans la τ–fermeture de Ez, il en résulte que y est dans cette dernière.

Corollaire VI.4. *Une a.u.l. A-convexe $(E, (P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ séparée b-complète et à unité approchée uniforme à gauche bornée est factorisable i.e.: $E^2 = E\,E = E$.*

Corollaire VI.5. *$(\ell^1, (P_n)_n)$ n'est pas b-complète.*

Preuve. Si $(\ell^1, (P_n)_n)$ était b-complète, elle serait factorisable d'après le corollaire VI.4. Or elle ne l'est pas car $x = (1/n^2)_n$ ne peut s'écrire comme produit d'aucun élément de ℓ^1 par un autre.

VII. Commutativité dans les algèbres à bases bornées

Nous regardons maintenant une question de commutativité dans les algèbres à bases bornées. M. Oudadess [12] a montré que si $(E, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach avec la propriété (C) suivante:

$$\exists \alpha > 0 : \ \forall x, y \in E \quad \|x\, y\| \leq \alpha\, \|y\, x\|$$

alors

$$E^2 = \{x\, y,\ x \in E, y \in E\}$$

est contenu dans le centre de E. Signalons que la propriété (C) n'entraine pas en général, la commutativité. On trouve dans [5] un exemple d'une algèbre de Banach non commutative et qui vérifie (C).

Nous donnons maintenant le lemme suivant améliorant un résultat de [12].

Lemme VII.1. *Une algèbre de Banach E à unité approchée à gauche (resp. à droite) et vérifiant (C) est commutative.*

Preuve. D'après [12], E^2 est contenu dans le centre C de E. Or C est fermé et E^2 dense dans E. Donc $E = C$.

Dans le cas des algèbres à bases bornées, nous obtenons:

Proposition VII.2. *Soient $(E, (P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ une algèbre à base bornée b-complète à unité approchée uniforme à gauche et*

(C') $(\exists \alpha_0 > 0)\ (\exists \lambda' \in \Lambda) :\ P_\lambda(y\, x) \leq \alpha_0\, P_{\lambda'}(y\, x);\ y, x \in E.$

Alors E est commutative.

Preuve. Considérons avec les mêmes notations que dans la proposition VI.3, l'algèbre de Banach $(E, \|\cdot\|')$. On montre, moyenant la norme $\|\cdot\|$, que $(E, \|\cdot\|')$ vérifie (C) et est à unité approchée à gauche. Il en résulte, d'après le lemme VII.1, que E est commutative.

Exemple VII.3. Nous donnons maintenant une classe d'algèbres uniformément localement A-convexes non commutatives et qui vérifient (C'). Ces algèbres n'admettent aucune unité approchée ni à gauche ni à droite. Ainsi échappent-elles à l'approche de [10], [14] et de [15]. Nous verrons cependant que ce sont des algèbres à bases m-bornées complètes.

Soit X une algèbre de Banach non commutative et vérifiant (C). Soit $E = C_b(\mathbf{R}, X)$ l'algèbre des fonctions continues bornées de $\mathbf{R}$ dans X. On munit E de la topologie β définie par la famille $(P_\phi)_{\phi \in C_0^+(\mathbf{R})}$ de semi-normes; où, pour tout $f \in E$,

$$P_\phi(f) = \sup_{\mathbf{R}} |\phi(x)| \, \|f(x)\|$$

et $C_0^+(\mathbf{R})$ est l'ensemble des fonctions continues strictement positives de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et tendant vers zéro à l'infini. Alors (E, β) est une a.u.l. A-convexe non commutative. Par ailleurs E n'admet pas d'unité approchée car si elle en admettait une, X en aurait aussi une et ceci, par le corollaire VII.2, contredirait le fait que X est non commutative. Nous allons voir que si E admet une unité approchée à gauche (resp. à droite) il en est de même pour X. Dans ces conditions, chaque $\phi \in C_0^+(\mathbf{R})$ donne naissance à une unité approchée à gauche (resp. à droite) sur X comme suit:

Soit, pour ϕ dans $C_0^+(\mathbf{R})$, x_ϕ le réel tel que

$$\phi(x_\phi) = \|\phi\|_\infty = \sup\{|\phi(x)|, \ x \in \mathbf{R}\}.$$

Et soit, pour tout $u \in X$, l'élément g de E défini par $g(x) = u$ pour tout x dans $\mathbf{R}$. Alors si $(f_i)_{i \in I}$ est une unité approchée à gauche (le coté droit se fait de maniére analogue), alors $(f_i(x_\phi))_{i \in I}$ est une unité approchée à gauche dans X. En effet, soient $u \in X$ et $\epsilon > 0$, il existe $i_\phi \in I$ tel que $i \geq i_\phi$ entraine que:

$$P_\phi(f_i \, g - g) < \epsilon \, \|\phi\|_\infty.$$

Donc

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |\phi(x)| \, \|f_i(x) \, u - u\| < \epsilon \, \|\phi\|_\infty.$$

En particulier on a:

$$|\phi(x_\phi)| \, \|f_i(x_\phi) \, u - u\| < \epsilon \, \|\phi\|_\infty.$$

Donc $\|f_i(x_\phi) \, u - u\| < \epsilon$ et ceci pour tout $i > i_\phi$. Il en résulte que $(f_i(x_\phi))_{i \in I}$ est une unité approchée à gauche dans X.

Remarquons que E est à base m-bornée puisqu'elle peut être munie de la norme

$$|||f||| = \sup\{\|f(x)\|, \ x \in \mathbf{R}\}$$

qui est plus fine que β. Ainsi avons nous construit des exemples d'a.u.l. A-convexes à bases m-bornées, complètes d'après [4], et qui n'admettent aucune unité approchée à gauche ni à droite. Ces exemples échappent aux théories déjà existantes sur les a.u.l. A-convexes [10], [13], [14].

Références

[1] M. AKKAR, *Étude spectrale et structures d'algèbres topologiques et bornologiques complètes*, Thèse Sc. Math., Univ. de Bordeaux, Bordeaux, 1976.

[2] G. R. ALLAN, A spectral theory for locally convex algebras, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **15** (1965), 399–421.

[3] G. R. ALLAN, H. G. DALES AND J. P. MC CLURE, Pseudo-Banach algebras, *Studia Math.* **40** (1971), 55–69.

[4] R. C. BUCK, Bounded continuous functions on a locally compact space, *Michigan Math. J.* **5** (1958), 95–104.

[5] O. H. CHEIKH AND M. OUDADESS On a commutativity question in Banach algebras, *Arab Gulf J. Sc. Res.*, to appear.

[6] P. J. COHEN, Factorization in group algebras, *Duke Math. J.* **26** (1959), 199–205.

[7] J. ESTERLE, Sur la non normabilité de certaines algèbres d'opérateurs, *C. R. A. S. Paris* **278** (1974), 1037–1040.

[8] H. HOGBÉ-NLEND, *Bornologies and Functional Analysis*, Notas de Math., North-Holland, Amsterdam, 1977.

[9] H. HOGBÉ-NLEND, Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **3** (1973), 19–56.

[10] H. KEMMOUN, *Contributions aux algèbres localement A-convexes*, Thèse de 3ème Cycle, E. N. S. Takaddoum, Rabat, 1986.

[11] E. A. MICHAEL, Locally multiplicatively convex topological algebras, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **11** (1952).

[12] M. OUDADESS, Commutativité de certaines algèbres de Banach, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **21** (1983).

[13] M. OUDADESS, Théorèmes de structure et propriétés fondamentales des algèbres localement uniformément A-convexes, *C. R. A. S. Paris* **296** (1983),851–853.

[14] M. OUDADESS, Théorèmes du type Gelfand-Naïmark dans les algèbres uniformément A-convexes, *Ann. Sc. Math. Québec* **9** (1985), 73-82.

[15] M. OUDADESS, Une norme d'algèbre de Banach dans les algèbres localement uniformément A-convexes complètes, *Africa Math.* **9** (1987), 15-22.

[16] V. PTAK, Banach algebras with involution, *Manuscripta Math.* 6 (1972), 245-290.

[17] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[18] S. WARNER, Inductive limits of normed algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 190-216.

[19] S. WARNER, Weak locally multiplicatively convex algebras, *Pacif. J. Math.* **5** (1955), 1025–1032.

Received 2/NOV/87

M. Akkar
Maison du Maroc
1, Boulevard Jourdan
75014 Paris
FRANCE

L. Oubbi et M. Oudadess
École Normale Supérieure de Takaddoum
B. P. 5118
Rabat
MOROCCO

INDEX