Collect. Math. **38** (1987), 77–90

UNA EXTENSIÓN TRANSFINITA DE LA DIMENSIÓN POR RECUBRIMIENTOS

Regino Criado y Juan Tarrés

ABSTRACT. We define the d–dimension as a transfinite extension of the covering dimension using the Henderson's method for define the D–dimension in [6]. We state the subspace theorem, the locally finite sum theorem and the cartesian product theorem for the d(X)–dimension. Also, we state that for every T_4 space X we have $\mathrm{d}(X) \leq \mathrm{D}(X)$ and that these dimensions coincide in the class of metrizable spaces. Also, for every compact metric space X we have $\mathrm{dim}(X) \leq \mathrm{D}(X)$, where "dim" is the transfinite covering dimension defined in [1].

Introducción

La D–dimensión (definida por D. W. Henderson en [6]) así como la dimensión transfinita "trInd" son extensiones transfinitas de la dimensión inductiva fuerte "Ind"; el carácter no inductivo de la dimensión por recubrimientos "dim" hace difícil definir extensiones transfinitas de esta dimensión. En [1], P. Borst introduce una extensión transfinita de la dimensión por recubrimientos para espacios métricos separables; dicha función se designa como "dim" y se define utilizando la clasificación dada en [10] por R. Pol para espacios métricos compactos débilmente infinito-dimensionales por medio del invariante topológico "index". En [1] (3.3.8) se prueba que para todo espacio métrico compacto X tal que $\mathrm{dim}(X) \geq 1$ es $\mathrm{index}(X) = \omega_0^{\mathrm{dim}(X)}$; así pues, las dos funciones "index" y "dim" inducen la misma clasificación en la clase de los espacios métricos compactos débilmente infinito-dimensionales, por lo que, de hecho, la función "dim" es una generalización de "index" a la clase de los espacios métricos separables.

El objetivo del presente trabajo es la obtención de una nueva extensión transfinita de la dimensión por recubrimientos. Esta nueva función de dimensión (que llamaremos d–dimensión) se obtiene mediante un proceso análogo al utilizado por Henderson en [6] para definir la D–dimensión. Aunque en [6] el estudio no se hace exclusivamente para espacios metrizables, no es difícil generalizar la D–dimensión a clases más generales de espacios (ver [2] y [11]), en especial, a los espacios fuertemente hereditariamente normales definidos en [3]. En este trabajo estudiamos la d–dimensión en espacios topológicos pertenecientes a clases lo más amplias posible. Para espacios T_4 se tiene $\mathrm{d}(X) \leq \mathrm{D}(X)$ y ambas funciones coinciden cuando X es un espacio metrizable; asimismo, si X es un espacio métrico compacto se verifica $\dim(X) \leq \mathrm{d}(X)$.

La d–dimensión es monótona en la clase de los espacios fuertemente hereditariamente normales. Por otra parte, el mejor comportamiento de la dimensión por recubrimientos frente a la dimensión inductiva fuerte respecto al teorema de la suma localmente finita nos permite obtener dicho teorema para la d–dimensión en la clase de los espacios T_4. El teorema del producto no es válido para esta última clase de espacios; sin embargo, se obtienen versiones del mismo en espacios más generales que en el caso de la D–dimensión.

1. Definición y conceptos básicos

Como sabemos, todo número ordinal β puede escribirse de manera que $\beta = \alpha + m$, donde α es un ordinal límite y $m = 0, 1, 2, \ldots$. Escribiremos entonces $\lambda(\beta) = \alpha$ y $\mathrm{n}(\beta) = m$.

Consideraremos también los símbolos -1 y Δ tales que para cualquier ordinal límite infinito μ sea $\mu + (-1) = \mu$ y de forma que para todo ordinal α sea $\Delta > \alpha$ y, además,

$$\alpha + \Delta = \Delta + \alpha = \Delta + \Delta = \alpha \oplus \Delta = \Delta \oplus \alpha = \Delta,$$

donde $+$ designa la suma habitual de ordinales y $\oplus$ es la suma superior de ordinales definida en [13].

1.1. Definición. Sea X un espacio T_4; definimos la d–dimensión $\mathrm{d}(X)$ como un número ordinal, -1 o el símbolo Δ de manera que:

d.1. $\mathrm{d}(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.

d.2. Si $X \neq \emptyset$, $\mathrm{d}(X)$ es el menor número ordinal β (si existe) tal que

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha,$$

donde α y γ son números ordinales y:

a) Para cada $\alpha \in [0, \alpha]$, A_α es un conjunto cerrado en X con $\dim(A_\alpha) < \infty$.

b) Para todo ordinal $\delta \leq \gamma$, el conjunto

$$\bigcup_{\delta \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha$$

es cerrado en el espacio X.

c) $\lambda(\beta) = \gamma$ y $\mathrm{n}(\beta) = \dim(A_\gamma)$ si $A_\gamma \neq \emptyset$; si $A_\gamma = \emptyset$, $\mathrm{n}(\beta) = 0$.

d) Para todo $x \in X$ existe un ordinal $\delta \leq \gamma$ máximo de manera que $x \in A_\delta$.

d.3. Si no existe ningún ordinal β que satisfaga las condiciones anteriores diremos que $\mathrm{d}(X) = \Delta$.

Si $\mathrm{d}(X) = \beta$ diremos que la representación

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha$$

que verifica las condiciones (a), (b), (c) y (d) de d.2 es una β–d–representación de X. Es decir, admitiendo el convenio de que para todo ordinal límite infinito λ es $\lambda + (-1) = \lambda$, dicha representación es, en virtud de (c) en d.3, una $[\gamma + \dim(A_\gamma)]$–d–representación de X.

La dimensión $\mathrm{d}(X)$ es una generalización transfinita de la dimensión por recubrimientos de acuerdo con la siguiente:

1.2. Proposición. *Si X es un espacio* T_4 *y una de las dimensiones* $\mathrm{d}(X)$ *o* $\dim(X)$ *es finita, la otra también lo es y, además, se verifica que* $\mathrm{d}(X) = \dim(X)$.

Como hemos dicho, en [6] se define la D–dimensión de un espacio en términos semejantes a la definición 1.1. Las Proposiciones 1.3 y 1.4 expresan la relación entre $\mathrm{d}(X)$ y $\mathrm{D}(X)$:

1.3. Proposición. *Si X es un espacio* T_4, $\mathrm{d}(X) \leq \mathrm{D}(X)$.

Demostración. Si $\mathrm{D}(X) = \Delta$ la desigualdad es evidente, por lo que podemos suponer $\mathrm{D}(X) = \beta \neq \Delta$.

En este caso, X tiene una representación:

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha \tag{1}$$

y como para $\alpha \leq \gamma$, A_α es cerrado en X, en virtud del teorema 3.1.28 de [3] se obtiene $\dim(A_\alpha) \leq \operatorname{Ind}(A_\alpha)$ para $0 \leq \alpha \leq \gamma$. Por consiguiente, (1) es una $[\gamma + \dim(A_\alpha)]$–d–representación de X, por lo que

$$\mathrm{d}(X) \leq \gamma + \dim(A_\gamma) \leq \gamma + \operatorname{Ind}(A_\gamma) = \beta = \mathrm{D}(X).$$

1.4. Proposición. *Para todo espacio metrizable* X, $\mathrm{d}(X) = \mathrm{D}(X)$.

Demostración. Naturalmente, es suficiente probar que $\mathrm{D}(X) \leq \mathrm{d}(X)$. Igual que en 1.3, podemos suponer que $\mathrm{d}(X) \leq \beta \neq \Delta$.

Sea:

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha \tag{2}$$

una β–d–representación de X. Por el teorema de Katetov-Morita, (ver [3], 4.1.3), para $0 \leq \alpha \leq \gamma$, $\operatorname{Ind}(A_\alpha) = \dim(A_\alpha)$; luego, (2) es una β–D–representación de X, y así, $\mathrm{D}(X) \leq \beta = \mathrm{d}(X)$.

En [7] se prueba que para todo espacio métrico compacto X es $\operatorname{tr}\operatorname{Ind}(X) \leq \mathrm{D}(X)$. Por otra parte, en [1] (3.2.4) se demuestra que si X es un espacio métrico separable tal que existe $\operatorname{tr}\operatorname{Ind}(X)$ entonces $\dim(X) \leq \operatorname{tr}\operatorname{Ind}(X)$. Tenemos así:

1.5. Proposición. *Para todo espacio métrico compacto* X *es* $\dim(X) \leq \mathrm{d}(X)$.

Demostración. Si $\mathrm{d}(X) = \Delta$ la proposición es evidente. Si $\mathrm{d}(X) \neq \Delta$, en virtud de la proposición 1.4 es $\mathrm{d}(X) = \mathrm{D}(X)$. Ahora, por ser $\mathrm{D}(X) \neq \Delta$ el espacio X es fuertemente numerablemente dimensional (ver [7], teorema 1) y así ([12], teorema 4) existe $\operatorname{tr}\operatorname{Ind}(X)$ por lo que, al ser $\operatorname{tr}\operatorname{Ind}(X) \leq \mathrm{D}(X)$ ([2] y [7]) la desigualdad $\dim(X) \leq \mathrm{d}(X)$ se obtiene como consecuencia de [1] (3.2.4).

La desigualdad de la proposición 1.5 puede ser estricta ya que el espacio X definido en [1] (5.1.5) es un espacio métrico compacto tal que $\dim(X) = \omega_0$ mientras que $\operatorname{tr}\operatorname{Ind}(X) = \omega_0 + 1$, por lo que en virtud de la proposición 1.5, como $\operatorname{tr}\operatorname{Ind}(X) \leq \mathrm{d}(X)$, será $\dim(X) < \mathrm{d}(X)$.

En [4] se define la clase S de todos los espacios X tales que:

$$X = \bigoplus \{X_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$$

donde para cada $n = 0, 1, \ldots$ es $\operatorname{Ind}(X_n) \leq n$ e $\operatorname{Ind}(X) = \infty$; estos espacios no tienen dimensión inductiva transfinita fuerte. Consideremos ahora la clase Σ de los espacios T_4 de la forma:

$$X = \bigoplus \{X_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$$

con $\dim(X_n) \leq n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ y $\dim(X) = \infty$. Para estos espacios se tiene:

1.6. Proposición. *Si X es un espacio de la clase Σ, $\mathrm{d}(X) = \omega_0$.*

Demostración. Si $X \in \Sigma$ es $\mathrm{d}(X) \geq \omega_0$, por la proposición 1.2 sería

$$\mathrm{d}(X) = \dim(X) = n < \infty.$$

Por otra parte,

$$X = \bigoplus\{X_n |\ n = 0, 1, \ldots\} = \bigcup\{X_n \times \{n\}|\ n = 0, 1, \ldots\} = \bigcup\{A_\alpha |\ 0 \leq \alpha \leq \omega_0\}$$

donde para cada $\alpha < \omega_0$ es $A_\alpha = X_\alpha \times \{\alpha\}$ y $A_{\omega_0} = \emptyset$. Es decir, la expresión:

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \omega_0} A_\alpha$$

es una ω_0–d–representación de X. Luego, $\mathrm{d}(X) \leq \omega_0$.

Observemos que, en virtud de la proposición 3.1.28 de [3], todo espacio de la clase S es también de la clase Σ, por lo que:

1.7. Corolario. *Si X es una espacio de la clase S, $\mathrm{d}(X) = \omega_0$.*

2. Teoremas del subespacio y de la suma localmente finita

Puesto que las funciones $\mathrm{d}(X)$ y $\dim(X)$ coinciden cuando una de ellas es finita, el ejemplo descrito en [9] muestra un espacio X que es T_4 tal que

$$\mathrm{d}(X) = \dim(X) = 0$$

y para todo número natural n existe un subespacio A_n de X tal que

$$\mathrm{d}(A_n) = \dim(A_n) = n.$$

Por tanto, en la clase de los espacios T_4 la dimensión $\mathrm{d}(X)$ no cumple el teorema del subespacio. No obstante:

2.1. Teorema del subespacio. *Si X es un espacio fuertemente hereditariamente normal, para todo subespacio Y de X es $\mathrm{d}(Y) \leq \mathrm{d}(X)$.*

Demostración. Si $\mathrm{d}(X) = \Delta$ el teorema es evidente; supongamos pues que $\mathrm{d}(X) \neq \Delta$.

Si

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha$$

es una $\mathrm{d}(X)$–d–representación de X, la expresión

$$Y = \bigcup_{0\leq\alpha\leq\gamma} (A_\alpha \cap Y)$$

es una $[\gamma + \dim(A_\gamma \cap Y)]$–d–representación de Y, ya que al ser cada A_α un espacio fuertemente hereditariamente normal se verifica $\dim(A_\alpha \cap Y) \leq \dim(A_\alpha)$ para todo $0 \leq \alpha \leq \gamma$. En consecuencia:

$$\mathrm{d}(Y) \leq \gamma + \dim(A_\gamma \cap Y) \leq \gamma + \dim(A_\gamma) = \mathrm{d}(X).$$

Observemos que el teorema 2.1 puede formularse para cualquier clase de espacios en la que se cumpla el teorema del subespacio respecto a la dimensión por recubrimientos.

Aunque el teorema del subespacio no es válido en espacios T_4, el teorema de la suma localmente finita sí puede formularse en esta clase de espacios (teorema 2.3):

2.2. Lema. *Si X es un espacio T_4 que admite una β–d–representación, tiene una β–d–representación*

$$X = \bigcup_{0\leq\alpha\leq\gamma} A_\alpha$$

tal que para todo $0 \leq \alpha \leq \gamma$ es $\dim(A_\alpha) \leq n(\alpha)$.

Demostración. Sea

$$X = \bigcup_{0\leq\alpha\leq\gamma} B_\alpha$$

una β–d–representación del espacio X. Vamos a definir por inducción transfinita una aplicación inyectiva creciente $f : [0,\gamma] \to [0,\gamma]$ de manera que:

a) Para $0 \leq \alpha \leq \gamma$, $f(\alpha) = \alpha + m$, donde m es un ordinal finito ($m \geq 0$).

b) $\dim(B_\alpha) \leq \mathrm{n}[f(\alpha)]$ para $0 \leq \alpha \leq \gamma$.

c) $f(\gamma) = \gamma$.

Definimos $f(0) = \max\,[0, \dim(B_0)]$. Si suponemos que $f(\delta)$ está definido para $0 \leq \delta < \alpha < \gamma$, hacemos:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \alpha + \max\,[0, \dim(B_\alpha)] & \text{si } \mathrm{n}(\alpha) = 0 \\ \max\,[\lambda(\alpha) + \dim(B_\alpha), f(\alpha - 1) + 1] & \text{si } \mathrm{n}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

con lo que f cumple las condiciones (a), (b) y (c).

Por otra parte, f es inyectiva y creciente: Si $\alpha \neq \beta$ con $0 \leq \alpha < \beta \leq \gamma$, si $\lambda(\alpha) < \lambda(\beta)$, evidentemente, $f(\alpha) < f(\beta)$; si $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$, será $\beta = \alpha + n$ con $n > 0$, en cuyo caso, $\mathrm{n}(\beta) \neq 0$ y, por la definición de la aplicación f obtenemos:

$$f(\beta) \geq f[(\beta - 1) + 1] > f(\beta - 1) > \ldots > f(\alpha).$$

Ahora, dado $\alpha \in [0, \gamma]$, sea:

$$A_\alpha = \begin{cases} B_{f^{-1}(\alpha)} & \text{si } f^{-1}(\alpha) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } f^{-1}(\alpha) = \emptyset \end{cases}$$

y la igualdad:

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha$$

es una β–d–representación de X tal que, para cada $0 \leq \alpha \leq \gamma$, o bien es $\dim(A_\alpha) = -1 < \mathrm{n}(\alpha)$ o bien

$$\dim(A_\alpha) = \dim[B_{f^{-1}(\alpha)}] \leq \mathrm{n}[f(f^{-1}(\alpha))] = \mathrm{n}(\alpha).$$

2.3. Teorema de la suma localmente finita. *Si X es un espacio T_4 que puede representarse como la unión de una familia localmente finita $\mathcal{C}$ de cerrados de X tales que para todo $C \in \mathcal{C}$ es $\mathrm{d}(C) \leq \beta$, entonces $\mathrm{d}(X) \leq \beta$.*

Demostración. Para cada $C \in \mathcal{C}$ consideremos una $\mathrm{d}(C)$–d–representación de C:

$$C = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma(C)} A_\alpha(C)$$

con $\gamma(C) + \dim[A_\gamma(C)] \leq \beta$. Llamemos $\delta = \lambda(\beta)$; si $\gamma(C) < \delta$, hacemos $A_\alpha(C) = \emptyset$ para $\gamma(C) < \alpha \leq \delta$, con lo que, para cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos una colección $\{A_\alpha(C)\}_{0 \leq \alpha \leq \delta}$ de cerrados de X. En virtud del lema 2.2 podemos suponer que para $\alpha < \delta$ es $\dim[A_\alpha(C)] \leq \mathrm{n}(\alpha)$ y, asimismo, $\dim[A_{\gamma(C)}(C)] \leq \mathrm{n}(\beta)$. Ahora, para $0 \leq \alpha \leq \delta$ definimos el conjunto:

$$A_\alpha = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} A_\alpha(C)$$

y vamos a ver que

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \delta} A_\alpha$$

es una $(\delta + m)$–d–representación del espacio X, donde $m = \dim(A_\delta)$:

a) Para todo α tal que $0 \leq \alpha \leq \delta$, A_α es cerrado, ya que la familia $\{A_\alpha(C)\}_{C \in \mathcal{C}}$ es localmente finita. Asimismo, como consecuencia del teorema 3.1.10 de [3], $\dim(A_\alpha)$ es finita.

Además, para $\alpha < \delta$, $\dim[A_\alpha(C)] \leq \mathrm{n}(\alpha)$, por lo que $\dim(A_\alpha) \leq \mathrm{n}(\alpha)$; por otra parte, $m = \dim(A_\delta) \leq \mathrm{n}(\beta)$ puesto que $\dim[A_\delta(C)] \leq \mathrm{n}(\beta)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

b) Si $\gamma < \delta$, el conjunto

$$\bigcup_{0 \leq \alpha \leq \delta} A_\alpha$$

es cerrado en X, pues para cada $C \in \mathcal{C}$ el conjunto

$$B_C = \bigcup_{\gamma \leq \alpha \leq \delta} A_\alpha(C)$$

es cerrado en C (y, por tanto, también en X) y la familia $\{B_C\}_{C \in \mathcal{C}}$ es localmente finita, y además,

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} B_C = \bigcup_{\gamma \leq \alpha \leq \delta} A_\alpha \ .$$

c) Si $x \in X$, sean $\{C^1, C^2, \ldots, C^m\}$ los cerrados de $\mathcal{C}$ tales que $x \in C^j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, s$ existe un ordinal $\alpha_j < \gamma(C^j)$ máximo con la propiedad de que $x \in A_{\alpha_j}(C^j)$. Si llamamos

$$\alpha = \max\{\alpha_j \mid j = 1, 2, \ldots, s\},$$

α es el mayor ordinal tal que $x \in A_\alpha$ con $\alpha < \gamma$.

Así pues,

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \delta} A_\alpha$$

es una $(\delta + m)$-d-representación de X de manera que $m \leq \mathrm{n}(\beta)$ y, en consecuencia,

$$\mathrm{d}(X) \leq \delta + m \leq \delta + \mathrm{n}(\beta) = \beta.$$

2.4. Corolario. *Si X es un espacio* T_4 *que puede expresarse como la unión de una familia finita de cerrados $\{C_i\}_{i=1,\ldots,k}$, se verifica que*

$$\mathrm{d}(X) \leq \max\{\mathrm{d}(C_i) \mid i = 1, \ldots, k\}.$$

Establecemos ahora un teorema de adición para la d–dimensión que relaciona la d–dimensión de un espacio X con la de uno de sus subconjuntos cerrados. Este teorema no se verifica para espacios T_4 y debemos restringirnos a espacios perfectamente normales T_{5a}:

2.5. Teorema. *Si X es un espacio topológico $\mathrm{T}_{5\mathrm{a}}$ con $\mathrm{d}(X) < \Delta$ y F un cerrado de X, se verifica:*

$$\mathrm{d}(X) \leq \lambda[\mathrm{d}(X \setminus F)] + \max\{\mathrm{n}[\mathrm{d}(X \setminus F)], \mathrm{d}(F)\} \leq \mathrm{d}(X \setminus F) + \mathrm{d}(F).$$

Demostración.

a) Supongamos, en primer lugar, que la dimensión por recubrimientos de F, $\dim(F)$, es finita. Dada una $\mathrm{d}(X \setminus F)$–d–representación de $X \setminus F$:

$$X \setminus F = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha$$

la expresión:

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} (A_\alpha \cup F)$$

es una $[\gamma + \dim(A_\gamma \cup F)]$–d–representación de X, por lo que:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(X) &\leq \gamma + \dim(A_\gamma \cup F)\\ &\leq \gamma + \max[\dim(A_\alpha), \dim(F)]\\ &\leq \lambda[\mathrm{d}(X \setminus F)] + \max\{\mathrm{n}[\mathrm{d}(X \setminus F)], \mathrm{d}(F)\}\\ &\leq \mathrm{d}(X \setminus F) + \mathrm{d}(X).\end{aligned}$$

b) Si $\dim(F)$ es infinita, sean:

$$X \setminus F = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma} A_\alpha\,, \qquad F = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \delta} B_\alpha$$

$\mathrm{d}(X \setminus F)$ y $\mathrm{d}(X)$-d–representaciones de los conjuntos respectivos. Para $0 \leq n \leq \omega_0$ llamemos:

$$M_n = F \setminus \bigcup_{0 \leq \alpha \leq n} B_\alpha\,, \qquad N_{n+1} = F \setminus \bigcup_{n+1 \leq \alpha \leq \gamma} B_\alpha$$

que son dos abiertos disjuntos del subespacio F.

Vamos a construir por inducción dos familias de abiertos de X, $\{G'_n\}_{n=0,1,\ldots}$ y $\{H'_{n+1}\}_{n=0,1,\ldots}$ tales que para $n = 0, 1, \ldots$ satisfagan:

i) $G'_n \supset M_n$ y $H'_{n+1} \supset N_{n+1}$.

ii) $G'_n \cap H'_{n+1} = \emptyset$.

iii) $G'_{n+1} \subset G'_n$ y $H'_{n+2} \supset H'_{n+1}$.

Puesto que

$$M_0 = F \setminus B_0$$

$$N_1 = F \setminus \bigcup_{1\leq\alpha\leq\delta} B_\alpha$$

son conjuntos separados en X, existen abiertos $G'_0 \supset M_0$ y $H'_1 \supset N_1$ que cumplen las condiciones exigidas para el caso $n = 0$.

Si suponemos que están construidos los abiertos G'_{k-1} y H'_k para $k = 1, 2, \ldots, n$ que verifican las condiciones i) a iii), al ser M_n y N_{n+1} conjuntos separados en X, existen dos abiertos en este espacio, G_n y H_{n+1} tales que $M_n \subset G_n$, $N_{n+1} \subset H_{n+1}$ y $G_n \cap H_{n+1} = \emptyset$. Asimismo, $M_n \subset M_{n-1} \subset G'_{n-1}$, por lo que podemos construir los abiertos de X:

$$G'_n = G'_{n-1} \cap G_n \qquad H'_{n+1} = H'_n \cup H_{n+1}$$

que cumplen las condiciones i) a iii). La construcción de las familias $\{G'_n\}_{n=0,1,\ldots}$ y $\{H'_{n+1}\}_{n=0,1,\ldots}$ queda pues terminada.

Los abiertos de X:

$$G''_n = G'_n \setminus \bigcup_{0\leq\alpha\leq n} B_\alpha \qquad H''_{n+1} = H'_{n+1} \setminus \bigcup_{n+1\leq\alpha\leq\delta} B_\alpha$$

son disjuntos, y, además, $G''_n \cap F = M_n$ y $H''_{n+1} \cap F = N_{n+1}$.

Por ser X un espacio T_{5a} y F un cerrado de X, existe una aplicación continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $F = f^{-1}(0)$. Para cada $n = 0, 1, \ldots$ definimos:

$$O_n = G''_n \cap f^{-1}[(-2^{-n}, 2^{-n})]$$

$$U_{n+1} = H''_{n+1} \cup \{X \setminus \overline{f^{-1}[(-2^{-n}, 2^{-n})]}\}$$

$$U_0 = \emptyset$$

con lo que tenemos las familias de abiertos de X: $\{O_n\}_{n=0,1,\ldots}$ y $\{U_n\}_{n=0,1,\ldots}$ de manera que para $n = 0, 1, \ldots$ se tiene:

1. $O_n \cap U_{n+1} = \emptyset$.
2. $O_n \cap F = M_n$, $U_{n+1} \cap F = N_{n+1}$.
3. $O_{n+1} \subset O_n$, $O_n \subset \underline{f^{-1}[(-2^{-n}, 2^{-n})]}$
   $U_{n+1} \supset U_n$, $U_n \supset X \setminus \overline{f^{-1}[(-2^{-n}, 2^{-n})]}$.

En estas condiciones, para $\alpha < \gamma$ definimos:

$$\begin{aligned} C_\alpha = {} & [A_\alpha \setminus f^{-1}[(-2^{-n(\alpha)}, 2^{-n(\alpha)})] \cup \\ & \cup \{(\cup\{A_\beta |\ \lambda(\alpha) \leq \beta(\alpha)\}) \cup \\ & \cup [\overline{f^{-1}[(-2^{-n(\alpha)+1}, 2^{-n(\alpha)+1})]} \setminus f^{-1}[(-2^{-n(\alpha)}, 2^{-n(\alpha)})] \end{aligned}$$

Para $0 \leq n < \omega_0$ hacemos:

$$C_{\gamma+n} = B_n \cup [A_\gamma \setminus (O_n \cup U_n)]$$

y para $\omega_0 \leq \beta \leq \delta$:

$$C_{\gamma+\beta} = B_\beta$$

Se comprueba que la expresión:

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma+\delta} C_\alpha$$

es una $[\gamma + \delta + \dim(C_{\gamma+\delta})]$–d–representación de X de manera que

$$\gamma + \delta + \dim(C_{\gamma+\delta}) = \lambda[\mathrm{d}(X \setminus F)] + \mathrm{d}(F).$$

Es decir, $\mathrm{d}(X) \leq \mathrm{d}(X \setminus F) + \mathrm{d}(F)$.

3. El teorema del producto

El teorema del producto para la d–dimensión queda formulado de manera que, bajo determinadas condiciones sobre los espacios X e Y, $\mathrm{d}(X \times Y) \leq \mathrm{d}(X) \oplus \mathrm{d}(Y)$.

Para la dimensión finita, si X e Y son espacios no vacíos, compactos y T_2, $\mathrm{d}(X \times Y) \leq \mathrm{d}(X) + \mathrm{d}(Y)$. No obstante, si nos limitamos a la clase de los espacios T_4 dicha desigualdad puede no verificarse, como puede comprobarse en el ejemplo dado en [14] en el que se prueba la existencia de un espacio Z, que es T_4, el producto $Z \times Z$ es también T_4 y tal que $\dim(Z) = 0$ con $\dim(Z \times Z) > 0$. En consecuencia, el teorema del producto deberá restringirse a clases distintas a la de los espacios T_4 en el caso de la d–dimensión.

3.1. Teorema. *Si X e Y son dos espacios no vacíos y T_2 de manera que $X \times Y$ es fuertemente paracompacto,* $\mathrm{d}(X \times Y) \leq \mathrm{d}(X) \oplus \mathrm{d}(Y)$.

Demostración. Si $\mathrm{d}(X) = \Delta$ o $\mathrm{d}(Y) = \Delta$, el teorema es evidente, por lo que supondremos $\mathrm{d}(X) \neq \Delta$ y $\mathrm{d}(Y) \neq \Delta$. Sean:

$$X = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma(X)} A_\alpha \qquad Y = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma(Y)} B_\alpha$$

$\mathrm{d}(X)$ y $\mathrm{d}(Y)$–d–representaciones de X e Y respectivamente. Definimos, para cada $\alpha \leq \gamma(X) + \gamma(Y)$ y para $\beta \leq \gamma(X)$, $\delta \leq \gamma(Y)$:

$$C_\alpha = \bigcup_{\beta \oplus \delta = \alpha} A_\beta \times B_\delta \, .$$

Naturalmente:

$$X \times Y = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq \gamma(X) \oplus \gamma(Y)} C_\alpha$$

y esta igualdad es una $[\gamma(X) + \gamma(Y)]$–d–representación de $X \times Y$:

a) Como la ecuación $\beta \oplus \delta = \alpha$ tiene un número finito de soluciones (ver [13]), C_α es unión finita de los cerrados $A_\beta \times B_\delta$ de $X \times Y$ y, en consecuencia, es cerrado para cada $\alpha \leq \gamma(X) \oplus \gamma(Y)$.

b) Puesto que la paracompacidad fuerte es una propiedad hereditaria para cerrados, en virtud de [8] (proposición 9.3.3) y [3] (teorema 1.3.8) tenemos:

$$\dim(C_\alpha) \leq \max_{\beta \oplus \delta = \alpha} [\dim(A_\beta) + \dim(B_\delta)] < \infty \, .$$

c) Dado $\beta < \gamma(X) \oplus \gamma(Y)$, si

$$\Gamma(\beta) = \{(\beta_i, \delta_i) |\; i = 0, 1, \ldots, n\}$$

es el conjunto de todos los pares ordenados de ordinales que verifican $\beta_i \leq \gamma(X)$, $\delta_i \leq \gamma(Y)$ y $\beta_i + \delta_i = \beta$, se tiene (ver [5], [6] y [13]):

$$\bigcup \{C_\alpha |\; \beta \leq \alpha \leq \gamma(X) \oplus \gamma(Y)\} =$$

$$= \bigcup \{[(\cup\{A_\tau |\; \beta_i \leq \tau \leq \gamma(X)\}) \times (\cup\{B_\tau |\; \delta_i \leq \tau \leq \gamma(Y)\}] |\; i = 0, 1, \ldots, n\}$$

que es un conjunto cerrado en el producto $X \times Y$.

d) Si $(x, y) \in X \times Y$, sean τ y σ los ordinales máximos para los que $x \in A_\tau$ e $y \in B_\sigma$. Como la suma "$\oplus$" es estrictamente creciente (ver [13]), $\tau \oplus \sigma$ es el mayor número ordinal tal que $(x, y) \in C_{\tau \oplus \sigma}$.

Ahora, por el teorema 3.2.14 de [3] será:

$$\dim[C_{\gamma(X) \oplus \gamma(Y)}] \leq \dim[A_{\gamma(X)}] + \dim[B_{\gamma(Y)}]$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(X \times Y) &\leq \gamma(X) \oplus \gamma(Y) + \dim[C_{\gamma(X) \oplus \gamma(Y)}] \\ &\leq \gamma(X) \oplus \gamma(Y) + \dim[A_{\gamma(X)}] + \dim[B_{\gamma(Y)}] \\ &\leq \mathrm{d}(X) \oplus \mathrm{d}(Y). \end{aligned}$$

Utilizando métodos totalmente análogos a los empleados en la demostración del teorema 3.1 obtenemos los resultados siguientes:

3.2. Teorema. *Dados X e Y espacios compactos y* T_2 *y uno al menos no vacío, se cumple que* $\mathrm{d}(X \times Y) \leq \mathrm{d}(X) \oplus \mathrm{d}(Y)$.

3.3. Teorema. *Si X es un espacio de Hausdorff, Y es un espacio metrizable y el producto topológico $X \times Y$ es* T_4 *y numerablemente paracompacto,* $\mathrm{d}(X \times Y) \leq \mathrm{d}(X) \oplus \mathrm{d}(Y)$.

3.4. Teorema. *Si X es un espacio* $\mathrm{T}_{5\mathrm{a}}$ *e Y un espacio metrizable y uno de ellos, al menos, es distinto del vacío,* $\mathrm{d}(X \times Y) \leq \mathrm{d}(X) \oplus \mathrm{d}(Y)$.

3.5. Teorema. *Si X es paracompacto y* T_2 *e Y es compacto y* T_2 *y uno de los dos, como mínimo, es no vacío,* $\mathrm{d}(X \times Y) \leq \mathrm{d}(X) \oplus \mathrm{d}(Y)$.

Bibliografía

[1] P. BORST, *Transfinite Classifications of Weakly Infinite-dimensional Spaces*, Free University Press, Amsterdam, 1986.

[2] R. CRIADO Y J. TARRÉS, D-dimensión en espacios no metrizables, *Publ. Mat. Univ. Aut. Barcelona* **31** (1987), 111–126.

[3] R. ENGELKING, *Dimension Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[4] R. ENGELKING, Transfinite dimension, in *Surveys in General Topology*, ed. by G. M. Reed, Academic Press, New York, 1980.

[5] F. HAUSDORFF, *Set Theory*, Chelsea, New York, 1962.

[6] D. W. HENDERSON, D–dimension I, A new transfinite dimension, *Pacific J. Math.* **26** (1968), 91–107.

[7] D. W. HENDERSON, D–dimension II, Separable spaces and compactifications, *Pacific J. Math.* **26** (1968), 109–113.

[8] A. R. PEARS, *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.

[9] E. POL AND R. POL, A hereditarily normal strongly zero-dimensional space containing subspaces of arbitrarily large dimension, *Fund. Math.* **97** (1977), 43–50.

[10] R. POL, On classification of weakly infinite-dimensional compacta, *Fund. Math.* **116** (1983), 169–188.

[11] L. POLKOWSKI, On transfinite dimension, *Colloq. Math.* **50** (1985), 61–79.

[12] J. M. SMIRNOV, On universal spaces for certain classes of infinite-dimensional spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* [2] **21**, (1962), 21–33.

[13] J. L. TOULMIN, Shuffling ordinals and transfinite dimension, *Proc. London Math. Soc.* 4 (1954), 177–195.

[14] M. L. WAGE, The dimension of product spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **75** (1978), 4671–4672.

Received 15/FEB/88

Regino Criado
E. T. S. I. Telecomunicación
Universidad Politécnica de Madrid

Juan Tarrés
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid