Collect. Math. **38** (1987), 27–36

CASINORMABILIDAD EN LOS ESPACIOS ESCALONADOS DE KÖTHE-LORENTZ CON VALORES VECTORIALES

Carmen Alegre Gil

ABSTRACT. In this paper we study the echelon spaces of Köthe-Lorentz of order p, taking values in a Banach space. we shall equip them with topologies which to arise in a very natural way and we shall characterize their normability.

Como es usual ω denota el espacio de todas las sucesiones con valores en el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. ω es un Fréchet con la topología de la convergencia coordenada a coordenada y su dual es el espacio ϕ de las sucesiones con sólo un número finito de términos no nulos.

Designamos por $d(w,p)$ al espacio de Lorentz de orden p con $p \geq 1$:

$$d(w,p) := \{x = (x_n) \in \omega : \sup_{\pi \in \Sigma} \sum_i |x_{\pi(i)}|^p w_i < +\infty\}$$

siendo Σ el conjunto de las permutaciones de los naturales y (w_i) una sucesión decreciente y positiva que está en c_0 y no está en ℓ_1.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con dual E'. Por $\omega(E)$ notaremos el conjunto de todas las sucesiones con valores en E:

$$\omega(E) := \{x = (x_n) : \ x_n \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Definiendo coordenada a coordenada la suma y el producto por escalares, $\omega(E)$ adquiere estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y contiene como subespacio vectorial al espacio $\phi(E)$ de todas las sucesiones en E con sólo un número finito de términos no nulos. Llamaremos espacio de sucesiones con valores en E, a todo subespacio de $\omega(E)$ que contenga a $\phi(E)$.

Sobre $\omega(E)$ consideramos la topología dada por la familia de seminormas p_n, con $n \in \mathbb{N}$

$$x = (x_n) \in \omega(E) \longmapsto p_n(x) = \|x_n\| \ .$$

Vamos a designar por $l(E)$ al siguiente espacio de sucesiones con valores en E:

$$l(E) := \{x = (x_n) \in \omega(E) : \ (\|x_n\|) \in d(w,p)\} \ .$$

El espacio $l(E)$ es normado y la norma es la siguiente:

$$\|x\|^p = \sup_{\pi \in \Sigma} \sum_i \|x_{\pi(i)}\|^p \, w_i$$

(por comodidad la notamos igual que a la norma de E).
Se define el α-dual de $l(E)$ como:

$$l(E)^\times := \{u = (u_n) \in \omega(E') : \ \sum_n |\langle x_n, u_n \rangle| < +\infty \quad \forall x = (x_n) \in l(E)\},$$

y evidentemente $(l(E), l(E)^\times)$ es un par dual.

Sea (a_{nk}) una matriz infinita de números reales que verifica: $0 < a_{nk} \leq a_{n,k+1}$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Llamaremos λ_k al espacio siguiente:

$$\lambda_k := \{x = (x_n) \in \omega(E) : \ (a_{nk} x_n) \in l(E)\}.$$

Llamamos $\|\cdot\|_k$ a la norma de dicho espacio:

$$x \in \lambda_k \longmapsto \|x\|_k = \|(a_{nk} x_n)\|.$$

Damos a continuación la definición de los espacios escalonados de Köthe-Lorentz con valores en E y posteriormente estudiaremos la casinormabilidad en dichos espacios, presentando una caracterización de esta propiedad en términos de la matriz (a_{nk}).

Definición 1. Llamaremos *espacio escalonado de Köthe-Lorentz con valores en E*, al siguiente espacio de sucesiones vectoriales en E:

$$\lambda := \{x = (x_n) \in \omega(E) : \ \|x\|_k < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

A este espacio le damos la topología definida por la familia de normas $\|\cdot\|_k$, con $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\lambda^\times$ el α-dual de λ.

Lema 1. *Sea $V = \{v = (v_i) \geq 0 : \ \sup v_i \, a_{in} < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$, entonces, un sistema fundamental de acotados de λ lo forman los conjuntos vM, con $v \in V$, siendo M la bola unidad cerrada del espacio $l(E)$.*

Demostración. Vamos a probar que $A = vM$ es acotado en λ:

$$\begin{aligned}
\sup_{y\in A} \|y\|_n^p &= \sup_{x\in M} \|vx\|_n^p \\
&= \sup_{x\in M} \sup_{\pi\in\Sigma} \sum_i \|x_{\pi(i)}\, v_{\pi(i)}\, a_{\pi(i),n}\|^p\, w_i \\
&\leq K_n{}^p \sup_{x\in M} \sup_{\pi\in\Sigma} \sum_i \|x_{\pi(i)}\|^p\, w_i \\
&< K_n{}^p
\end{aligned}$$

Observación: como $v \in V$ se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe K_n tal que

$$\sup v_i\, a_i < K_n$$

Supongamos ahora que B es un acotado de λ; se tendrá entonces que B estará acotado en cada escalón, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $K_n > 0$ tal que:

$$B \subset \{x \in \lambda : \|x\|_n < K_n\}$$

Sea $v_i := \inf_n 2^{n+1} K_n\, a_{in}{}^{-1}$, se tiene que $v = (v_i) \in V$ ya que

$$\sup v_i\, a_{in} < 2^{n+1} K_n.$$

Nota 1: Si $x = (x_n) \in B$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\|x_i\|^p &= \left(w_i^{1/p} a_{in}\, \|x_i\|\, \frac{1}{w_i^{1/p} a_{in}} \right)^p \\
&\leq \left(\sum_j w_j\, a_{jn}{}^p\, \|x_j\|^p \right) \left(\frac{1}{w_i^{1/p} a_{in}} \right)^p \\
&\leq \left(\sum_j \|a_{jn}\, x_j\|^p \right) \left(\frac{1}{w_i^{1/p} a_{in}} \right)^p \\
&\leq \|x\|_n^p \left(\frac{1}{w_i^{1/p} a_{in}} \right)^p \\
&\leq \left(\frac{2^{n+1} K_n}{w_i^{1/p} a_{in}} \right)^p,
\end{aligned}$$

tomando ínfimos para $n \in N$ obtenemos:

$$\|x_i\|^p \leq v_i{}^p w_i^{-1}.$$

Luego siempre que x_i sea no nulo se tendrá que v_i será también no nulo.

Vamos a probar que $B \subset vM$, para ello tomemos en primer lugar un elemento que esté en $\phi(E) \cap B$. Sea $y = (y_n) \in \phi(E) \cap B$ y sea $I_0 = \{i \in \mathbf{N} : \ y_i \neq 0\}$, y por la nota 1 se tiene que $v_i \neq 0$ para todo $i \in I_0$ luego:

$$\frac{1}{v_i} \leq \sup_n \frac{a_{in}}{2^{n+1} K_n} \qquad \text{para todo } i \in I_0.$$

Por definición de supremo, dado $i \in I_0$ existe $m_i \in \mathbf{N}$ tal que

$$\left(\frac{1}{v_i}\right)^p \leq \left(\frac{a_{im_i}}{2^{m_i+1} K_{m_i}}\right)^p + \frac{1}{2\,|I_0|\ \|y_i\|^p w_1}\ .$$

Sea $N_0 := \max\{m_i : i \in I_0\}$, entonces para $1 \leq n \leq N_0$ definimos I_n:

$$I_n := \{i \in I_0 : \ n = m_i\}\ .$$

Vamos a considerar la sucesión $z = (z_i)$ siendo:

$$z = \begin{cases} y_i/v_i, & i \in I_0 \\ 0, & i \neq I_0. \end{cases}$$

Veamos que $z \in M$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\pi \in \Sigma} \sum_i \|z_{\pi(i)}\|^p w_i &= \sup_{\pi \in \Sigma} \sum_{i \in \pi^{-1}(I_0)} \|z_{\pi(i)}\|^p w_i \\
&= \sup_{\pi \in \Sigma} \sum_{i \in \pi^{-1}(I_0)} \left\| \frac{y_{\pi(i)}}{v_{\pi(i)}} \right\|^p w_i \\
&\leq \sup_{\pi \in \Sigma} \sum_{i \in \pi^{-1}(I_0)} \left[\frac{1}{2\,|I_0|\ \|y_{\pi(i)}\|^p w_1} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{a_{\pi(i) m_{\pi(i)}}}{2^{m_{\pi(i)}+1} K_{m_{\pi(i)}}} \right)^p \right] \|y_{\pi(i)}\|^p w_i \\
&\leq \sup_{\pi \in \Sigma} \left[\sum_{i \in \pi_{-1}(I_0)} \frac{\|y_{\pi(i)}\|^p w_i}{2\,|I_o|\ \|y_{\pi(i)}\|^p w_1} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i \in \pi_{-1}(I_0)} \left(\frac{a_{\pi(i) m_{\pi(i)}}\ \|y_{\pi(i)}\|}{2^{m_{\pi(i)}+1}\ K_{m_{\pi(i)}}} \right)^p w_i \right] \\
&\leq 1/2 + \sup_{\pi \in \Sigma} \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{1}{2^{n+1}\ K_n} \right)^p \sum_{i \in \pi^{-1}(I_n)} \|y_{\pi(i)}\ a_{\pi(i),n}\|^p w_i
\end{aligned}$$

$$\leq 1/2+\sum_{n=1}^{n_0}\left(\frac{1}{2^{n+1}K_n}\right)^p ||y||_n^p$$
$$< 1/2+(1/2)\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}$$
$$< 1/2+1/2=1\ .$$

Veamos ahora el caso general: supongamos $y \in B$ entonces se tiene que $y = \lim y^n$ [2], siendo y^n la sección n–ésima de la sucesión. Cada sección está en $B \cap \phi(E)$ luego aplicando el caso anterior obtenemos que para todo $n \in \mathbf{N}$ existe una sucesión $z^n = (z_i^n)$ en M tal que $y^n = vz^n$ por lo tanto $y = \lim_n vz^n$. Como la convergencia en λ implica la convergencia coordenada a coordenada se tiene que $y_i = \lim_n z_i^n v_i$.

Sea $z_i = \lim_n z_i^n$; como $y \in B$ se tendrá por la nota 1 que:

$$z_i = \begin{cases} y_i/v_i, & \text{si } v_i \neq 0 \\ 0, & \text{si } v_i = 0. \end{cases}$$

Vamos a probar que $z \in M$; entonces, como $y = vz$, se tendrá que $y \in vM$.

Para todo $N \in \mathbf{N}$ definimos:

$$h_i^n = \begin{cases} z_i^n & \text{si } v_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_i = 0 \end{cases}$$

evidentemente $(h_i^n) \in M$ para todo $n \in \mathbf{N}$, además $z_i = \lim_n h_i^n$, luego para todo $r \in \mathbf{N}$ y toda $\pi \in \Sigma$ se tiene que:

$$\sum_{i=1}^r ||z_{\pi(i)}||^p\ w_i = \lim_n \sum_{i=1}^r ||h_{\pi(i)}^n||^p\ w_i \leq \liminf_n \sum_{i=1}^r ||h_{\pi(i)}^n||^p\ w_i\ .$$

Tomando supremos para $r \in \mathbf{N}$ y $\pi \in \Sigma$ se obtiene que $z \in M$.

Definición 2. Decimos que la matriz (a_{nk}) es *regularmente decreciente* si dado $n \in \mathbf{N}$ existe $m > n$ tal que para todo $I_0 \subset \mathbf{N}$ cumpliendo que:

$$\inf_{i\in I_0} \frac{a_{in}}{a_{im}} > 0$$

entonces

$$\inf_{i\in I_0} \frac{a_{in}}{a_{ik}} > 0 \qquad \text{para } k = m+1, m+2, \ldots$$

Esta definición es equivalente a la siguiente ([1] prop. 3.2): para todo $n \in \mathbf{N}$ existe $m > n$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $v \in V$ cumpliendo que

$$\frac{1}{a_{im}} \leq \frac{\epsilon}{ain}$$

siempre que

$$v_i \leq \frac{1}{a_{im}}.$$

Teorema 1. *λ es casinormable si y sólo si la matriz (a_{nk}) es regularmente decreciente.*

Demostración. Supongamos que λ es casinormable; entonces, dado

$$A = W^\circ = \{y \in \lambda : \ \|y\|_m \leq 1/n\}^\circ$$

equicontinuo en $\lambda^\times$, existen $m \geq n$, $\delta > 0$ tal que si

$$U = \{y \in \lambda : \ \|y\|_m \leq \delta\},$$

$\lambda^\times_{U^\circ}$ induce en A la misma topología que $\beta(\lambda^\circ, \lambda)$.

Por el lema anterior dado $\epsilon > 0$ existe $v \in V$ tal que si $B = vM$ entonces

$$A \cap B^\circ \subset \{y \in \lambda^\times_{U^\circ} : p_{U^\circ}(y) \leq \epsilon\,\delta\}$$

siendo p_{U° el calibrador de U°.

Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$v_j \leq \frac{1}{a_{jm}}\ ,$$

vamos a probar que

$$\frac{1}{a_{jm}} \leq \frac{1}{a_{jn}}\ .$$

Sea $t \in E'$ tal que $\|t\| = 1$ y sea

$$z = (0, 0, \ldots, t\, w_1^{1/p} a_{jn}, 0, 0, \ldots)\ ;$$

veamos que $z \in A \cap B^\circ$: $z \in A = W^\circ$ si $|\langle z, x\rangle| \leq 1$ para todo $x \in W$. Sea $x = (x_n) \in W$:

$$\begin{aligned}
|\langle z, x\rangle|^p &= \left(\sum_i \langle z_i, x_i\rangle|\right)^p \\
&= |\langle w_1^{1/p}\, a_{jn}\, t, x_j\rangle|^p \\
&\leq \|w_1^{1/p}\, a_{jn}\, t\|^p\ \|x_j\|^p \\
&= \|t\|^p\ \|a_{jn}\, x_j\|^p\, w_1 \\
&\leq \sum_i \|x_{\tau(i)}\, a_{\tau(i),n}\|^p\ w_i \\
&\leq \sup_{\pi\in\Sigma}\ \sum_i \|x_{\pi(i)}\, a_{\pi(i),n}\|^p\ w_i \\
&\leq \frac{1}{n} \leq 1
\end{aligned}$$

(siendo τ una permutación de $\mathbb{N}$ tal que $\tau(1) = j$).

Veamos ahora que $z \in B^\circ$: sea $x \in B$, entonces $x = vr$ con $r \in M$.

$$\begin{aligned}
|\langle x, z\rangle|^p &= \left(\sum_i |\langle x_i, z_i\rangle|\right)^p \\
&= |\langle v_j\, r_j, a_{jn}\, w_1\, t\rangle|^p \\
&= v_j\, a_{jn}\, w_1^{1/p}\, |\langle r_j, t\rangle| \\
&\leq \left(\frac{a_{jn}}{a_{jm}}\right)^p w_1\, \|r_j\|^p \\
&\leq \sum_i \|r_{\tau(i)}\|^p\, w_i \\
&\leq \sup_{\pi \in \Sigma} \sum_i \|r_{\pi(i)}\|^p\, w_i \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

(siendo τ una permutación de $\mathbb{N}$ tal que $\tau(1) = j$).

Hemos probado que $z \in B^\circ \cap A$, luego $p_{U^\circ}(z) < \epsilon\,\delta$, es decir,

$$\begin{aligned}
p_{U^\circ}(z) &= \inf\{\alpha > 0 :\ z \in \alpha U^\circ\} \\
&= \inf\{\alpha > 0 :\ \sum_i \langle x_i, z_i\rangle \leq \alpha \quad \forall x \in U\} \\
&= \inf\{\alpha > 0 : \langle a_{jn}\, w_1\, t, x_j\rangle \leq \alpha \quad \forall x \in U\} \\
&= \sup\{\langle a_{jn}\, w_1\, t, x_j\rangle,\ x \in U\} \\
&< \epsilon\,\delta\ .
\end{aligned}$$

Obsérvese que esta desigualdad es independiente de t, luego es cierta para cualquier elemento de E' de norma 1.

Vamos a tomar

$$x = (0, 0, \ldots, (\delta/a_{jm}\, w_1) y, 0, 0, \ldots),$$

siendo y un elemento de E cuya norma vale uno. Si aplicamos el teorema de Hahn-Banach encontramos un elemento u en E de norma uno verificando que $\langle u, y\rangle = \|y\|$. Se comprueba con facilidad que x está en U entonces, teniendo en cuenta la observación anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}
\epsilon\,\delta &> \left\langle a_{jn}\, w_1\, u, \frac{\delta}{a_{jm}\, w_1}\, y\right\rangle \\
&= \frac{\delta\, a_{jn}\, w_1}{a_{jm}\, w_1}\, \langle u, y\rangle \\
&= \delta\, \frac{a_{jn}}{a_{jm}}
\end{aligned}$$

por tanto $a_{jn}/a_{jm} < \epsilon$.

Veamos ahora el recíproco: supongamos que A es equicontinuo en $\lambda^\times$, es decir, existe un $k \in \mathbf{N}$ tal que $A \subset U^\circ$ siendo U el conjunto:

$$U = \{x \in \lambda : \ \|x\|_k \leq 1/k\}.$$

Aplicando la hipótesis, existe $m > k$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $v \in V$ cumpliendo que si $v_i \leq 1/a_{im}$ entonces

$$\frac{1}{a_{im}} \leq \frac{\epsilon}{4k}\,\frac{1}{a_{ik}}.$$

Sea $W = \{x \in A : \|x\|_m \leq 1/m\}$, $W \subset U$, luego $A \subset U^\circ \subset W^\circ$. Vamos a probar que $\lambda^\circ_{W^\circ}$ induce en A la misma topología que $\beta(\lambda^\times, \lambda)$.

Consideremos z un elemento de A y N un entorno de z en $\lambda^\times_{W^\circ}$ restringida a A:

$$N = \{y \in A : p_{W^\circ}(y - z) \leq \epsilon\}.$$

Dado $B = vM$ acotado de λ, consideramos $N^\wedge$ el siguiente conjunto:

$$N^\wedge := \{y \in \lambda^\times : \ \sup_{x \in B} \sum_i |\langle x_i, y_i - z_i\rangle| < \epsilon/(2k)\}.$$

$N^\wedge$ es $\beta(\lambda^\times, \lambda)$ entorno de z, vamos a probar que $N^\wedge \cap A \subset N$.

Sea $y \in N^\wedge \cap A$ veamos que $(1/\epsilon)(y - z) \in W^\circ$; sea $x \in W$, entonces:

$$\begin{aligned}
|\langle x, y - z\rangle| &= |\sum_i \langle x_i, y_i - z_i\rangle| \\
&\leq \sum_{i \in I_1} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle| + \sum_{i \in I_2} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle|
\end{aligned}$$

siendo I_1 e I_2 los conjuntos:

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \{i \in \mathbf{N} : v_i \geq 1/a_{im}\} \\
I_2 &:= \{i \in \mathbf{N} : v_i < 1/a_{im}\}
\end{aligned}$$

evidentemente si $i \in I_1$ entonces $v_i > 0$, ya que que $1/a_{im} > 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I_1} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle| &= \sum_{i \in I_1} \frac{1}{v_i}\, |\langle x_i, y_i - z_i\rangle|\, v_i \\
&\leq \sum_{i \in I_1} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle|\, a_{im}\, v_i \\
&\leq \sum_{i \in I_1} |\langle a_{im}\, v_i\, x_i, y_i - z_i\rangle| \\
&< \frac{\epsilon}{2k} \qquad (1)
\end{aligned}$$

(la última desigualdad se ha establecido teniendo en cuenta que la sucesión $(a_{im} v_i x_i)$ está en $vM = B$)

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_2} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle| &= \sum_{i\in I_2} \frac{1}{a_{im}} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle|\, a_{im} \\
&\leq \sum_{i\in I_2} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle|\, \frac{1}{a_{ik}} a_{im} \frac{\epsilon}{4k} \\
&\leq \frac{\epsilon}{4k} \sum_{i\in I_2} \frac{\langle x_i, y_i\rangle\, a_{im}}{a_{ik}} + \frac{\epsilon}{4k} \sum_{i\in I_2} \frac{\langle x_i, z_i\rangle\, a_{im}}{a_{ik}} \\
&= \frac{\epsilon}{4k} \sum_{i\in \mathbb{N}} \left\langle \frac{x_i\, a_{im}}{a_{ik}}, y_i \right\rangle + \frac{\epsilon}{4k} \sum_{i\in \mathbb{N}} \left\langle \frac{x_i\, a_{im}}{a_{ik}}, z_i \right\rangle.
\end{aligned}$$

La sucesión $((a_{im}/a_{ik})x_i) \in (\bar{U})^{\circ}$; siendo $\bar{U} = \{x \in \lambda_k : \|x\|_k \leq 1/k\}$. Vamos a probar que $U^{\circ} = (\bar{U})^{\circ}$.

Sea $y \in U^{\circ}$, si $x \in \bar{U}$ se tiene que $x = \lim x^n$ [2] siendo x^n la sección n–ésima de x. Así, $\langle x^n, y\rangle \leq 1$ ya que $x^n \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $y \in (\bar{U})^{\circ}$. La otra inclusión es evidente.

Así pues, como $y, z \in A \subset (\bar{U})^{\circ}$ y la sucesión $((a_{im}/a_{ik})x_i) \in \bar{U}$ obtenemos que:

$$\sum_{i\in I_2} |\langle x_i, y_i - z_i\rangle| < \frac{\epsilon}{4k} + \frac{\epsilon}{4k} < \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

Aplicando las desigualdades (1) y (2) se tiene que:

$$|\langle x, y - z\rangle| + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

luego $y - z \in \epsilon W$.

Bibliografía

[1] K. Bierstedt, R. Meise and W. Summers, Köthe sets and Köthe sequence spaces, in *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, edited by J. A. Barroso, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[2] J. H. Garling, On symmetric sequence spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) **16** (1966), 94–97.

Received 30/JUN/87

Carmen Alegre Gil
Dpto. de Matemática Aplicada. U. D. Informática
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n
46022 Valencia
ESPAÑA