Collect. Math. **38** (1987), 17–25

ESPACIOS DE FRÉCHET DE GENERACIÓN DÉBILMENTE COMPACTA

*M. Valdivia**

ABSTRACT. Let E be a Fréchet space whose topology is defined by a fundamental system of seminorms:

$$\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \cdots \leq \|\cdot\|_n \leq \cdots$$

Let μ be the first ordinal number whose cardinal number coincides with the density character of E. Then, if E is generated by an absolutely convex and weakly compact subset W, there exists a resolution of the identity in E

$$\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\}$$

such that

$$\|P_\alpha\|_m = 1, \quad P_\alpha(W) \subset W, \quad \omega \leq \alpha \leq \mu, \quad m = 1, 2, \ldots$$

1. Introducción y notaciones

Los espacios vectoriales utilizados aquí están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. Si $\mathbb{K}$ es el cuerpo real, ponemos $\mathbb{H}$ para el cuerpo de los números racionales; si $\mathbb{K}$ es el cuerpo complejo, $\mathbb{H}$ significa el cuerpo de todos los números de la forma $a + bi$, con a y b racionales.

* Subvencionado en parte por CAICYT.

Dado un par dual $\langle E, F\rangle$, escribimos $\sigma(E,F)$ para la topología débil sobre E definida por F y la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$; si A es un subconjunto de E, A° es el conjunto polar de A en F y $A^{\perp}$ es el subespacio de F ortogonal a A, $L(A)$ es la envoltura lineal de A.

Dado un espacio de Fréchet E, su dual topológico se representa por E'; si u está en E' y x en E, ponemos $\langle x, u\rangle$, y también $\langle u, x\rangle$, en vez de $u(x)$; un subconjunto A de E se dice que genera E si $L(A)$ es denso en E. Diremos que el espacio de Fréchet E es de generación débilmente compacta cuando existe un subconjunto W en E, absolutamente convexo y débilmente compacto, que genera E. En el caso en que E sea un espacio de Banach, ponemos también E^* en vez de E'.

Dada la norma p sobre un espacio vectorial G, escribimos (G,p) para el espacio normado correspondiente.

Si τ es una topología sobre un conjunto A, y B es un subconjunto de A, representamos por $B[\tau]$ el conjunto B dotado de la topología inducida por τ.

Si T es una proyección continua en el espacio localmente convexo E, T' es la proyección en E' conjugada de T. Si E es un espacio de Banach, ponemos también T^* en lugar de T'.

Dado un conjunto A, $|A|$ es su número cardinal; si α es un número ordinal, $|\alpha|$ es el número cardinal de α. Si E es un espacio localmente convexo, su carácter de densidad $d(E)$ es el primer número cardinal tal que E tiene un subconjunto denso A tal que $|A| = d(E)$. ω es el primer ordinal infinito.

Sea I el operador identidad en un espacio de Fréchet no nulo E. Sea μ el primer ordinal cuyo número cardinal es $d(E)$. Decimos que una familia

$$\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\}$$

de proyecciones en E es una resolución de I, si dicha familia es equicontinua,

$$|P_\alpha(E)| \leq |\alpha|, \qquad \omega \leq \alpha \leq \mu,$$

$$P_\mu = I,$$

$$P_\alpha \circ P_\beta = P_\beta = P_\beta \circ P_\alpha, \qquad \omega \leq \beta \leq \alpha \leq \mu,$$

y cuando α es un ordinal límite mayor que ω, la clausura de

$$\bigcup\{P_\eta : \omega \leq \eta < \alpha\}$$

coincide con $P_\alpha(E)$.

El Teorema 1 en el apartado siguiente se debe a D. Amir y J. Lindenstrauss. Hemos incluido una prueba porque simplifica drásticamente la publicada en [1], incluso es más simple que la prueba topológica de S. P. Gul'ko [2]. Además, nuestra demostración se extiende directamente al caso de espacios de Fréchet, como ponemos de manifiesto en el Apartado 3.

2. Un teorema de Amir-Lindenstrauss

Lema 1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach generado por un subconjunto W absolutamente convexo y débilmente compacto. Sean A_0 y B_0 subconjuntos infinitos de X y X^*, respectivamente, y sea λ un número cardinal tal que $|A_0| \leq \lambda$, $|B_0| \leq \lambda$. Entonces existe una proyección continua T en X de manera que*

1) $T(X) \supset A_0$, $T(W) \subset W$, $\|T\| = 1$ *y* $d(T(X)) \leq \lambda$.
2) $d(T^*(X^*)[\sigma(X^*, L(W)]) \leq \lambda$.
3) $T^*(X^*) \supset B_0$.
4) $T^*(X^*)$ *es* $\sigma(X^*, L(W))$*–cerrado.*

Demostración. Tomamos un subconjunto M_0 en $L(W)$ cuya clausura en X contenga a A_0 y $|M_0| \leq \lambda$. Ponemos $|\cdot|$ para las funcionales de Minkowski de W en $L(W)$ y de W° en X^*. Procedemos por recurrencia y suponemos que, para un entero no negativo n, hemos construido $M_n \subset L(W)$ y $B_n \subset X^*$ tales que $|M_n| \leq \lambda$ y $|B_n| \leq \lambda$. Sean C_n y D_n los conjuntos de todas las combinaciones lineales sobre $\mathbf{H}$ de M_n y B_n, respectivamente. Dado un $x \in X$ ($x \in X^*$), denotamos por $u_x \in X^*$ ($u_x \in L(W)$) un elemento tal que

$$\|u_x\| = 1, \quad \|x\| = \langle x, u_x \rangle \qquad \big(|u_x| = 1, \quad |x| = \langle x, u_x \rangle\big).$$

Definimos

$$M_{n+1} = C_n \cup \{u_x : x \in D_n\},$$

$$B_{n+1} = D_n \cup \{u_x : x \in C_n\}.$$

Ponemos E y F para las clausuras de $\bigcup_{n=1}^\infty M_n$ y $\bigcup_{n=1}^\infty B_n$ en $(X, \|\cdot\|)$ y $(X^*, |\cdot|)$, respectivamente. Puesto que $M_{n+1} \supset C_n$ y $B_{n+1} \supset D_n$, resulta que E y F son espacios vectoriales. Se deduce de W absolutamente convexo y débilmente compacto en X que F es $\sigma(X^*, L(W))$–cerrado. Obviamente, $E^\perp$ es $\sigma(X^*, L(W))$–cerrado, $d(E) \leq \lambda$ y $d(F[\sigma(X^*, L(W))]) \leq \lambda$.

Dados $x \in E$, $z \in F^\perp$ y $\epsilon > 0$, hallamos un entero positivo n y un $t \in M_n$ de manera que $\|x - t\| < \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x\| &\leq \|x-t\|+\|t\| \\ &< \epsilon + \langle t, u_t\rangle \\ &= \epsilon + \langle t+z, u_t\rangle \\ &\leq \epsilon + |\langle x+z, u_t\rangle| + |\langle t-x, u_t\rangle| \\ &\leq \epsilon + \|x+z\| + \|t-x\| \\ &\leq \|x+z\| + 2\,\epsilon \end{aligned} \tag{1}$$

y, en consecuencia,

$$\|x\| \leq \|x+z\|. \tag{2}$$

Análogamente, dados $x \in F$, $z \in E^{\perp}$ y $\epsilon > 0$, hallamos un entero positivo n y un $t \in B_n$ de manera que $|x-t| < \epsilon$. Entonces se verifica (1) cambiando $\|\cdot\|$ por $|\cdot|$ y, por tanto,

$$|x| \leq |x+z|. \tag{3}$$

Se deduce de (2) que $E \cap F = \{0\}$ y que la proyección T del espacio normado $E + F^{\perp}$ a lo largo de $F^{\perp}$ tiene norma uno. Resulta de (3) que $F \cap E^{\perp} = \{0\}$ y, por consiguiente, $E + F^{\perp} = X$. Se obtiene también de (3) que $|T^*| = 1$ y así $T(W) \subset W$. La conclusión se sigue observando que $T(X) = E$ y $T^*(X^*) = F$. ■

Teorema 1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach no nulo generado por un conjunto W absolutamente convexo y débilmente compacto. Sea μ el primer ordinal tal que $|\mu| = d(X)$. Entonces existe una resolución de la identidad en X,*

$$\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\}$$

de manera que $\|P_\alpha\| = 1$ y $P_\alpha(W) \subset W$, para $\omega \leq \alpha \leq \mu$.

Demostración. Si $d(X) = \aleph_0$, ponemos P_ω para la aplicación idéntica en X y la conclusión es obvia. Supongamos ahora que $d(X) > \aleph_0$. Sea $\{x_\nu : \nu < \mu\}$ un conjunto denso de X. Determinamos un operador T en X que cumpla las condiciones 1) y 2) del Lema 1 para $A_0 = \{x_\nu : \nu < \omega\}$ y $\lambda = \aleph_0$. Denotamos por P_ω dicho operador T. Procedemos por inducción transfinita. Tomamos $\omega \leq \alpha \leq \mu$ y suponemos que las proyecciones en X,

$$\{P_\beta : \omega \leq \beta < \alpha\}$$

han sido definidas de manera que se verifican las condiciones 1) y 2) del Lema 1 para $T = P_\beta$, $\lambda = |\beta|$ y $A_0 = \{x_\nu : \nu < \beta\}$. Suponemos además que

$$P_\eta \circ P_\zeta = P_\eta = P_\zeta \circ P_\eta\ , \qquad \omega \leq \eta \leq \zeta < \alpha.$$

Si α no es un ordinal límite, hallamos un ordinal γ tal que $\gamma + 1 = \alpha$ y tomamos dos subconjuntos densos A_γ y B_γ en $P_\gamma(X)$ y $P_\gamma^*(X^*)[\sigma(X^*, L(W))]$, respectivamente, tales que

$$|A_\gamma| = d(P_\gamma(X)) , \qquad |B_\gamma| = d\big(P_\gamma^*(X^*)[\sigma(X^*, L(W))]\big).$$

Aplicamos el Lema 1 y obtenemos una proyección T en X que verifica 1), 2), 3) y 4) para

$$A_0 = A_\gamma \cup \{x_\nu : \nu < \alpha\}, \qquad \lambda = |\alpha|, \qquad B_0 = B_\beta.$$

Denotamos dicho operador T por P_α. Obviamente, $P_\alpha(X) \supset P_\gamma(X)$ y, puesto que $P_\alpha^*(X^*)$ es $\sigma(X^*, L(W))$-cerrado, $P_\alpha^*(X^*) \supset P_\gamma^*(X^*)$. Consecuentemente

$$P_\eta \circ P_\alpha = P_\eta = P_\alpha \circ P_\eta , \qquad \omega \leq \eta \leq \alpha. \tag{4}$$

Si α es un ordinal límite, ponemos

$$E := \bigcup\{P_\beta(X) : \omega \leq \beta < \alpha\},$$

$$F := \bigcap\{P_\beta^{-1}(0) : \omega \leq \beta < \alpha\}.$$

Sea B la bola unidad cerrada de X. Si u está en B°, la red

$$\{P_\beta^{-1}(u) : \omega \leq \beta < \alpha\}$$

está en $B^\circ \cap F^\perp$ y tiene un punto $\sigma(X^*, X)$-adherente v en $B^\circ \cap F^\perp$. Puesto que

$$u - P_\beta^*(u) \in P_\beta(X)^\perp , \qquad \omega \leq \beta < \alpha,$$

resulta que

$$u - v \in \bigcap\{P_\beta(X)^\perp : \omega \leq \beta < \alpha\} = E^\perp,$$

de aquí que $E^\perp + F = X^*$ y, por tanto, si $\bar{E}$ es la clausura de E en X, $\bar{E} \cap F = \{0\}$. Si m es un entero positivo y x está en $B \cap mW$, la red

$$\{P_\beta(x) : \omega \leq \beta < \alpha\}$$

tiene un punto adherente z en $E \cap B \cap mW$. Puesto que

$$x - P_\beta(x) \in P_\beta^{-1}(0) , \qquad \omega \leq \beta < \alpha,$$

resulta que $x - z$ está en F. Por tanto, $\bar{E} + F = X$ y, si ponemos P_α para la proyección de X sobre E a lo largo de F, se verifican, obviamente, las condiciones 1) y 2) del Lema 1 para

$$T = P_\alpha, \qquad A_0 = \{x_\nu : \omega \leq \nu < \alpha\}, \qquad \lambda = |\alpha|.$$

Por otra parte,

$$P_\beta(X) \subset P_\alpha(X), \qquad P^*_\beta(X^*) \subset P^*_\alpha(X^*), \qquad \omega \leq \beta < \alpha,$$

por lo que

$$P_\beta \circ P_\alpha = P_\alpha \circ P_\beta = P_\beta, \qquad \omega \leq \beta \leq \alpha$$

Finalmente,

$$\{x_\nu : \nu < \mu\} \subset P_\mu(X),$$

y así P_μ es el operador identidad de X. Obviamente,

$$\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\}$$

responde al enunciado del Teorema 1. ■

3. Espacios de Fréchet de generación débilmente compacta

Lema 2. *Sea E un espacio de Fréchet generado por un conjunto W absolutamente convexo y débilmente compacto. Sean A_0 y B_0 subconjuntos infinitos de E y E', respectivamente, y sea λ un número cardinal tal que $|A_0| \leq \lambda$, $|B_0| \leq \lambda$. Si*

$$\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \dots \leq \|\cdot\|_n \leq \dots$$

es un sistema fundamental de seminormas continuas de E, existe una proyección continua T en E de manera que

1) $T(E) \supset A_0$, $T(W) \subset W$, $\|T\|_m = 1$, $m = 1, 2, \dots$, $d(T(E) \leq \lambda$.
2) $d(T(E')[\sigma(E', L(W))]) \leq \lambda$.
3) $T'(E') \supset B_0$.
4) $T'(E')$ *es* $\sigma(E', L(W))$*-cerrado.*

Demostración. Sea

$$W_m = \{x \in E : \|x\|_m \leq 1\}$$

y sea $\|\cdot\|_m$ la funcional de Minkowski de W_m° en $L(W_m^\circ)$, $m = 1, 2, \dots$. Procedemos como en la prueba del Lema 1, cambiando X por E y X^* por E', y suponemos que, para un entero no negativo n, hemos obtenido $M_n \subset L(W)$, $B_n \subset E'$, y sus envolturas lineales C_n y D_n sobre $\mathbb{H}$, respectivamente. Dados $x \in E$ ($x \in E'$) y un entero positivo m, denotamos por $u_x \in E'$ ($u_x \in L(W)$) un elemento tal que

$$\|u_{x,m}\|_m = 1, \quad \|x\|_m = \langle x, u_{x,m}\rangle \qquad \big(|u_x| = 1, \quad |x| = \langle x, u_x\rangle\big).$$

Definimos

$$M_{n+1} = C_n \cup \{u_x : x \in D_n\},$$

$$B_{n+1} = D_n \cup \{u_{x,m} : x \in C_n, m = 1, 2 \ldots\}.$$

Ponemos G y F para las clausuras de $\cup_{n=1}^{\infty} M_n$ y $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ en E y $(E', |\cdot|)$, respectivamente. G y F son espacios vectoriales, F y $G^{\perp}$ son $\sigma(E', L(W))$–cerrados, $d(G) \leq \lambda$ y $d(F[\sigma(E', L(W))]) \leq \lambda$.

Dados $x \in G$, $z \in F^{\perp}$, $\epsilon > 0$ y un entero positivo m, hallamos un enetro positivo n y $t \in M_n$ de manera que $\|x - t\| < \epsilon$. Entonces se tiene (1) cambiando $\|\cdot\|$ por $\|\cdot\|_m$ y u_t por $u_{t,m}$. Consecuentemente,

$$\|x\|_m \leq \|x + z\|_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Dados $x \in G^{\perp}$, $z \in F$ y $\epsilon > 0$, hallamos un entero positivo n y un $t \in B_n$ de manera que $|x - t| < \epsilon$. Entonces, igual que en la prueba del Lema 1, resulta que

$$|x| \leq |x + z| + 2\epsilon$$

y, por tanto,

$$|x| \leq |x + z|.$$

Se razona ahora análogamente a como se hizo en la prueba del Lema 1 y se obtiene que la proyección T en el espacio $G + F^{\perp} = E$ sobre G a lo largo de $F^{\perp}$ responde al enunciado del Lema 2. ■

Teorema 2. *Sea E un espacio de Fréchet no nulo generado por un conjunto W absolutamente convexo y débilmente compacto. Sea μ el primer ordinal tal que $|\mu| = d(X)$. Si*

$$\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \ldots \leq \|\cdot\|_n \leq \ldots$$

es un sistema fundamental de seminormas continuas de E, existe una resolución de la identidad en E,

$$\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\},$$

de manera que $\|P_\alpha\|_m = 1$, $P_\alpha(W) \subset W$, $\omega \leq \alpha \leq \mu$, $m = 1, 2, \ldots$.

Demostración. La prueba es igual a la del Teorema 1 hasta las igualdades (4), cambiando X por E y Lema 1 por Lema 2. Supongamos ahora que α es un ordinal límite. Ponemos

$$G := \bigcup \{P_\beta(E) : \omega \leq \beta < \alpha\},$$

$$F := \bigcap \{P_\beta^{-1}(0) : \omega \leq \beta < \alpha\}.$$

Dados un entero positivo m y un u en W_m°, la red

$$\{P_\beta^*(u) : \omega \leq \beta < \alpha\}$$

está en $W_0^\circ \cap F^\perp$ y tiene un punto $\sigma(E', E)$–adherente v en $W_m^\circ \cap F^\perp$. Puesto que

$$u - P_\beta^*(u) \in P_\beta(E)^\perp, \qquad \omega \leq \beta < \alpha,$$

resulta que

$$u - v \in \bigcap\{P_\beta(E) : \omega \leq \beta < \alpha\} = G^\perp,$$

de aquí que $G^\perp + F^\perp = E'$ y, en consecuencia, si $\bar{G}$ es la clausura de G en E, $\bar{G} \cap F = \{0\}$. Si r es un entero positivo y x está en $W_m \cap rW$, la red

$$\{P_\beta(x) : \omega \leq \beta < \alpha\}$$

tiene un punto adherente z en $\bar{G} \cap W_m \cap rW$. Puesto que

$$x - P_\beta(x) \in P_\beta^{-1}(0), \qquad \omega \leq \beta < \alpha,$$

resulta que $x - z$ está en F. Por tanto, $\bar{G} + F = E$. Si ponemos P_α para la proyección en E sobre $\bar{G}$ a lo largo de F, resulta que se cumplen las condiciones 1) y 2) del Lema 2 para

$$T = P_\alpha, \qquad A_0 = \{x_\nu : \omega \leq \nu < \alpha\}, \qquad |\lambda| = |\alpha|.$$

Además

$$P_\beta \circ P_\alpha = P_\beta = P_\alpha \circ P_\beta.$$

Finalmente,

$$\{P_\alpha : \omega \leq \alpha \leq \mu\}$$

responde al enunciado del Teorema 2. ■

Bibliografía

[1] D. AMIR AND J. LINDENSTRAUSS, The structure of weakly compact sets in Banach spaces, *Ann. Math.* (2), 8 (1968), 35–46 .

[2] S. P. GUL'KO, On the structure of spaces of continuous functions and on the hereditary paracompactness of these spaces, *Uspehi Math. Nauk* **34**, 6 (1979), 33–40 (in Russian). English translation: *Russian Math. Surveys* **34**, 6 (1979), 36–44.

Received 22/FEB/1988

Manuel Valdivia
Facultad de Matemáticas
Dr. Moliner, 50
Burjasot
46100 Valencia
SPAIN