UNE NOTE SUR LES ESPACES QUASI-NORMABLES

par

J. M. GARCIA - LAFUENTE

ABSTRACT

Dans cette note nous donons une nouvelle caractérisation des espaces métrisables quasi-normables. Nous étudions aussi certains relations entre les espaces quasi-normables et la classe des espaces quasi-c_0-tonnelés et de Schwartz.

Un espace localement convexe Hausdorff (e. l. c.) avec topologie τ on dénotera $[E, \tau]$ ou simplement E. $\mathfrak{U}$ dénotera une base de voisinages de 0 absolument convexes et fermés de E, E' est le dual topologique de E et τ' une topologie localement convexe dans E' telle que $\sigma(E', E) \leqslant \tau' \leqslant \beta(E', E)$. Pour chaque $V \in \mathfrak{U}$, E'_{V° est l'espace de Banach $sp(V^\circ) \subset E'$ muni de la topologie de la norme jauge de V° dans E'. Pour les notations et résultats connus, nous nous réferons toujours à [2].

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ dans E' converge τ'-continûment à 0 si converge à 0 pour τ' et il posède une base d'ensembles équicontinus. On dit que $\mathcal{F}$ converge équicontinûment à 0, ou que $\mathcal{F}$ est ξ-nul, si $\mathcal{F}$ posède une base dans E'_{U° pour quelque $U \in \mathfrak{U}$ qui converge à 0 pour la topologie de E'_{U°.

Définition 1. Un e.l.c. E est dit un $(S_{\tau'})$-espace si pour tout $U \in \mathfrak{U}$ il existe $V \in \mathfrak{U}$, $V \subset U$ tel que les topologies induites sur U° par τ' et E'_{V° soient les mêmes.

Si $\tau' = \sigma(E', E)$ c'est équivalent à que U° est compact dans E'_{V°. Donc, les $(S_{\sigma(E', E)})$-espaces ne sont que les espaces de Schwartz. Dans l'autre extrême, si $\tau' = \beta(E', E)$, les $(S_{\tau'})$-espaces sont appellés espaces quasi-normables. Evidemment tout space de Schwartz est un $(S_{\tau'})$-espace pour toute topologie τ'.

De la définition on déduit aussitôt que E est un $(S_{\tau'})$-espace si et seulement si chaque filtre qui converge à 0 τ'-continûment dans E' est ξ-nul. Mais dans les espaces métrisables les suites peuvent remplaces aux filtres:

Théorème 2. Soit E un e.l.c. métrisable. Alors E est un $(S_{\tau'})$-espace si et seulement si chaque ensemble équicontinu de E' est métrisable pour la topologie τ' et chaque suite de E' qui converge à 0 τ'-continûment est ξ-nule.

Preuve: Si E es un $(S_{\tau'})$-espace, les deux conditions énnoncées sont satisfaites par la Définition 1 et la remarque postérieure. Réciproquement, supposons que pour un voisinage U de 0 dans E, aucun espace E'_{V° n'induit la topologie τ' dans U°. Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de 0 dans E telle que $U_k \subset U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, l'immersion canonique $[U^\circ, \tau'|_{U^\circ}] \subset\!\!\to E'_{U_k^\circ}$ n'est pas continue à 0 (remarquer que U° est un disque). Puisque, par hypothèse, $\tau'|_{U^\circ}$ est une topologie métrisable, pour chaque $k \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \subset U^\circ$ qui converge à 0 pour $\tau'|_{U^\circ}$ mais qui ne converge pas à 0 dans $E_{U_k^\circ}$. Soit $W_1 \supset W_2 \supset \ldots$ une base dénombrable de voisinages de 0 dans $[U^\circ, \tau'|_{U^\circ}]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit m_n le nombre entier positif le plus petit tel que $u_i^k \in W_n$ pour tout $i \geqslant m_n$, et pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Evidemment $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots$ et alors, de la double suite $(u_n^k)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ on extrait la suite

$$(u^1_{m_1}, \ldots, u^1_{m_2-1}, u^1_{m_2}, \ldots, u^1_{m_3-1}, u^2_{m_2}, \ldots, u^2_{m_3-1}, \ldots)$$

Cette suite converge, par construction, à 0 dans $[U^\circ, \tau'|_{U^\circ}]$, c'est à dire elle converge à 0 τ'-continûment. Mais, par contre, elle ne converge pas à 0 dans aucun espace $E_{U_k^\circ}$ car elle contient à la suite $(u_n^k)_{n\in N}$ à l'exception de ses $m_k - 1$ premiers terms. Cela contradit l'hypothèse et preuve le Théorème.

Si $\tau' = \beta(E', E)$ le théorème précedent on applique manifestement à espaces métrisables (DF). Voici une autre application à espaces de Fréchet-Montel.

Corollaire 3. Soit E un espace de Fréchet-Montel. Pour que E soit quasinormable il faut et il suffit que chaque suite qui converge vers 0 $\beta(E', E)$-continûment dans E' soit ξ-nule.

Preuve: E est séparable et conséquemment, chaque ensemble équicontinu $H \subset E'$ est métrisable pour $\sigma(E', E)$. Mais dans H coïncident les topologies $\sigma(E', E)$ et $\tau_{pc}(E', E) = \beta(E', E)$. On applique alors le Théorème.

Si $[E, \tau]$ est un e.l.c. avec dual E', on dénote par τ_{β_0} (resp. $\tau_{(c_0)}$) la topologie dans E de la convergence uniforme sur toutes les suites $\beta(E', E)$-nules (resp. ξ-nules) de E'. On sait que $[E, \tau]$ est quasi-c_0-tonnelé (resp. Schwartz) si et seulement si $\tau_{\beta_0} \leqslant \tau$ (resp. $\tau \leqslant \tau_{(c_0)}$). Il est clair que $\tau_{(c_0)} \leqslant \tau_{\beta_0}$, mais dans les espaces quasi-normables on a aussi.

Théorème 3. Soit $[E, \tau]$ un espace quasi-normable. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) $\tau_{(c_0)} = \tau_{\beta_0}$

ii) Chaque suite $\beta(E', E)$-nule de E' est ξ-nule

iii) E est quasi-c_0-tonnelé

Preuve: i)$\Longrightarrow$ii)$\Longrightarrow$iii) est immédiat. Provons que iii)$\Longrightarrow$i). Soit $\{x'_n\}^0$ un voisinage de 0 pour τ_{β_0} où $\{x'_n\}$ est une suite $\beta(E', E)$-nule de E'. Par iii), $\{x'_n\} \subset U^0$ pour quelque $U \in \mathcal{U}$, et, compte tenu de que E est quasi-normable, $\{x'_n\}$ converge à 0 dans quelque espace de Banach E'_{V^0}. Donc, $\{x'_n\}$ est une suite ξ-nule ce qui montre $\tau_{\beta_0} \leqslant \tau_{(c_0)}$.

Corollaire 4. Soit E un espace de Schwartz avec topologie τ. Alors E est quasi-c_0-tonnelé si et seulement si $\tau = \tau_{\beta_0}$.

Si $[E, \tau]$ est un e.l.c. on dénote par τ_c la topologie de la convergence uniforme sur tous les ensembles relativement $\beta(E', E)$-compactes et équicontinus de E'. Pour toute topologie localement convexe τ on a $\tau_c \leqslant \tau$. Mais parfois on a aussi l'égalité:

Proposition 5. a) Si $[E, \tau]$ est un e.l.c., on a $\tau_{(c_0)} = (\tau_{(c_0)})_c$. En particulier, la topologie τ d'un espace de Schwartz est τ_c.

b) Si $[E, \tau]$ est un e.l.c. quasi-c_0-tonnelé alors $\tau_{\beta_0} = (\tau_{\beta_0})_c$.

Preuve: La démonstration repose, en tous les deux cases, sur le fait que les topologies $\tau_{(c_0)}$ et τ_{β_0} sont compatibles avec la dualité $\langle E, E' \rangle$. Donc, on fera seulement la démonstration de b). Soit $U = \{x'_n\}^0$ un voisinage de 0 dans E pour τ_{β_0}, où $\{x'_n\}$ est une suite $\beta(E', E)$-nule. Puisque $B = \{x'_n\} \cup 0$ est un ensemble compact pour la topologie $\beta(E', E) = \beta([E, \tau_{\beta_0}]', [E, \tau_{\beta_0}])$, et B est clairement τ_{β_0}-équicontinu, on en déduit que $U = B^0$ est un $(\tau_{\beta_0})_c$-voisinage de 0.

Proposition 6. Si $[E, \tau]$ est un espace quasi-normable, alors $\tau_c = \tau_{(c_0)}$.

Preuve: Puisque $\tau_{(c_0)} \leqslant \tau$, on déduit de la Proposition 5.a). que $\tau_{(c_0)} \leqslant \tau_c$. Réciproquement, soit $W = B^0$ un τ_c-voisinage de 0, où B est un ensemble équicontinu et relativement $\beta(E', E)$-compact de E'. Soit $U \in \mathcal{U}$ tel que $B \subset U^0$ et soit $V \in \mathcal{U}$ tel que E'_{V^0} induit sur U^0 la topologie forte. Par [2] Theorem 9.4.2., il existe une suite nule $\{x'_n\}$ dans E'_{V^0} telle que $B \subset \{x'_n\}^{00}$. C'est à dire, pour la suite ξ-nule $\{x'_n\}$ on vérifie $\{x'_n\}^0 \subset B^0 = W$ et W est un $\tau_{(c_0)}$-voisinage de 0.

Corollaire 7. Un espace quasi-normable [E, τ] est de Schwartz si et seulement si $\tau = \tau_c$.

Si [E, τ] est un espace de semi-Montel, alors $\tau = \tau_c$. Donc, de la Proposition 6 résulte immédiatement qu'un espace de semi-Montel est de Schwartz si et seulement si il est quasi-normable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Grothendieck, A.: Topological Vector Spaces. New York, 1973.

[2] Jarchow, H.: Locally Convex Spaces. Stuttgart, 1981.

[3] Jarchow, H.: Barrelledness and Schwartz Spaces. Math. Ann., 200 (1973), 241-252.

[4] Jarchow, H.: Die Universalität des Raumes c_0 für die Klasse der Schwartz-Räume, Math. Ann. 203 (1973) 211-214.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura
06071 - Badajoz, Spain