

# ESPACES NON VÉRIFIANT LE SECOND AXIOME DE DÉNOMBRABILITÉ

par

J. FERNANDEZ NOVOA

A D. Enrique Linés Escardó con motivo de su jubilación

## ABSTRACT

We introduce the concepts of  $\tau$ -adherent point and black hole and we study their relations with the  $\tau$ -compact spaces, the weakly archimedean outer measures and the second axiom of countability.

## 1. INTRODUCTION

Dans [4] B. Rodríguez-Salinas et P. Jiménez Guerra ont étendue la théorie de L. Schwartz de la mesure de Radon en étudiant les mesures de Radon de type  $(\mathcal{C})$  sur un espace topologique arbitraire. Pour cette généralisation il est fondamental la substitution du concept de compacité par celui de  $\tau$ -compacité, beaucoup plus naturel dans la théorie de la mesure.

D'autre part, dans [1], nous avons introduit les mesures extérieures archimédiennes et faiblement archimédiennes en les étudiant en relation avec les mesures de Radon et la propriété de Darboux. Puis, nous avons étendu ces résultats pour les mesures de Radon de type  $(\mathcal{C})$  et la  $\theta$ -propriété de Darboux dans [2] et [3], respectivement.

Dans ce travail nous définissons les espaces  $\tau$ -compacts (la définition est analogue à celle qu'on donne dans [4] pour les ensembles  $\tau$ -compacts, qui résultent être espaces  $\tau$ -compacts pour la topologie induite), et nous établissons quelques propriétés "topologiques" de ce type d'espaces. En outre, nous introduisons les concepts de point  $\tau$ -adhérent et de trou noir, et nous étudions leurs relations avec les espaces  $\tau$ -compacts, les mesures extérieures faiblement archimédiennes et le second axiome de dénombrabilité.

Le long du travail,  $E$  sera un espace topologique et  $\tau$  sera une fonction réelle d'ensembles définie sur la famille  $\mathcal{F}(E)$  des parties de  $E$ , non décroissante et telle que  $\tau(\emptyset) = 0$ .

2. ESPACES  $\tau$ -COMPACTS

**1. Définition:** On dit que  $E$  est un *espace  $\tau$ -compact* si pour chaque recouvrement ouvert  $\mathfrak{G}$  de  $E$  et pour tout  $\epsilon > 0$  il y a un nombre fini d'ouverts  $G_1, \dots, G_n$  de  $\mathfrak{G}$  vérifiant

$$\tau(E - \bigcup_{i=1}^n G_i) < \epsilon.$$

**2. Proposition:** Si  $E$  est un *espace  $\tau$ -compact* alors

$$\lim_n \tau(E - G_n) = 0$$

pour toute suite croissante d'ensembles ouverts dont la réunion est  $E$ . Inversement, si  $E$  est un *espace de Lindelöf* avec cette propriété alors  $E$  est  $\tau$ -compact.

*Démonstration:* Supposons d'abord que  $E$  est un *espace  $\tau$ -compact* et soit  $(G_n)$  une suite croissante d'ouverts dont la réunion est  $E$ . Alors pour chaque  $\epsilon > 0$  il existe un nombre fini de termes  $G_{n_1}, \dots, G_{n_k}$  de la suite tels que

$$\tau(E - \bigcup_{j=1}^k G_{n_j}) < \epsilon$$

et si  $n_0 = \max \{ n_1, \dots, n_k \}$  on a  $\bigcup_{j=1}^k G_{n_j} = G_{n_0}$  et

$$\tau(E - G_n) \leq \tau(E - G_{n_0}) < \epsilon$$

pour tout  $n \geq n_0$ .

Supposons maintenant que  $E$  est un *espace de Lindelöf* avec la propriété de l'énoncé et soient  $\mathfrak{G}$  un recouvrement ouvert de  $E$  et  $\epsilon > 0$ . Alors il existe une suite  $(G_n)$  d'ouverts de  $\mathfrak{G}$  qui couvre  $E$  et la suite  $(G'_n)$  définie par  $G'_n = \bigcup_{i=1}^n G_i$  est une suite croissante d'ouverts dont la réunion est  $E$ , donc

$$\lim_n \tau(E - G'_n) = 0$$

et il existe un  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\tau(E - G'_n) < \epsilon$  pour  $n \geq m$  donc

$$\tau(E - \bigcup_{i=1}^m G_i) = \tau(E - G'_m) < \epsilon$$

et  $E$  est  $\tau$ -compact.

**3. Corollaire:** Si  $E$  est un espace  $\tau$ -compact alors

$$\lim_n \tau(F_n) = 0$$

pour toute suite décroissante  $(F_n)$  de fermés de  $E$  dont l'intersection est vide. Inversement, si  $E$  est un espace de Lindelöf avec cette propriété alors  $E$  est  $\tau$ -compact.

*Démonstration:* C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.

**4. Définition:** On dit qu'une famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles de  $E$  a la  $\tau$ -propriété d'intersection finie s'il existe un  $\epsilon_0 > 0$  tel que

$$\tau(\cap \{F: F \in \mathcal{F}'\}) > \epsilon_0$$

pour toute sous-famille finie  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$ .

Alors, une famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles de  $E$  n'a pas la  $\tau$ -propriété d'intersection finie si pour chaque  $\epsilon > 0$  il existe un nombre fini d'ensembles  $F_1, \dots, F_n$  de  $\mathcal{F}$  tels que

$$\tau(\cap_{i=1}^n F_i) < \epsilon.$$

**5. Proposition:** Pour que l'espace  $E$  soit  $\tau$ -compact il faut et il suffit que toute famille d'ensembles fermés de  $E$  avec la  $\tau$ -propriété d'intersection finie ait une intersection non vide.

*Démonstration:* Supposons que  $E$  est  $\tau$ -compact et soit  $\mathcal{F}$  une famille d'ensembles fermés de  $E$  avec la  $\tau$ -propriété d'intersection finie. S'il était  $\cap \{F: F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$ , la famille  $\mathcal{G} = \{E - F: F \in \mathcal{F}\}$  serait un recouvrement ouvert de  $E$  et pour chaque  $\epsilon > 0$  il existerait un nombre fini de fermés  $F_1, \dots, F_n$  de  $\mathcal{F}$  tels que

$$\tau(\cap_{i=1}^n F_i) = \tau(E - \cup_{i=1}^n (E - F_i)) < \epsilon$$

ce qui est impossible. Donc,  $\cap \{F: F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ .

Supposons maintenant que toute famille de fermés avec la  $\tau$ -propriété d'intersection finie a une intersection non vide et soit  $\mathcal{G}$  un recouvrement ouvert de  $E$ . Alors  $\mathcal{F} = \{E - G: G \in \mathcal{G}\}$  est une famille de fermés dont l'intersection est

vide, donc  $\mathcal{F}$  n'a pas la  $\tau$ -propriété d'intersection finie et pour chaque  $\epsilon > 0$  il existe un nombre fini d'ouverts  $G_1, \dots, G_n$  de  $\mathcal{G}$  tels que

$$\tau(E - \bigcup_{i=1}^n G_i) = \tau(\bigcap_{i=1}^n (E - G_i)) < \epsilon.$$

Donc  $E$  est  $\tau$ -compact.

**6. Proposition:** Si  $E$  est un espace  $\tau$ -compact et  $f$  est une application continue de  $E$  sur un autre espace topologique  $F$ , alors  $F$  est  $(\tau \circ f^{-1})$ -compact.

*Démonstration:* Soient  $\mathcal{G}$  un recouvrement ouvert de  $F$  et  $\epsilon > 0$ . Alors la famille  $f^{-1}(\mathcal{G}) = \{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{G}\}$  est un recouvrement ouvert de  $E$ . Comme  $E$  est supposé  $\tau$ -compact, il existe un nombre fini d'ouverts  $G_1, \dots, G_n$  de  $\mathcal{G}$  tels que

$$(\tau \circ f^{-1})(F - \bigcup_{i=1}^n G_i) = \tau(E - \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_i)) < \epsilon$$

Par conséquent,  $F$  est  $(\tau \circ f^{-1})$ -compact.

**7. Définition:** On dit qu'un  $A \subset E$  est un *ensemble  $\tau$ -compact* si pour chaque recouvrement ouvert  $\mathcal{G}$  de  $A$  et pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un nombre fini d'ouverts  $G_1, \dots, G_n$  de  $\mathcal{G}$  vérifiant

$$\tau(A - \bigcup_{i=1}^n G_i) < \epsilon.$$

Comme

$$A - \bigcup_{i=1}^n G_i = A - \bigcup_{i=1}^n (G_i \cap A),$$

$A$  est un ensemble  $\tau$ -compact si et seulement si, en tant qu'espace topologique muni de la topologie induite,  $A$  est un espace  $\tau$ -compact.

**8. Proposition:** Si  $E$  est un espace  $\tau$ -compact et  $F \subset E$  est fermé alors  $F$  est un ensemble  $\tau$ -compact.

*Démonstration:* Soient  $\mathcal{G}_0$  un recouvrement ouvert de  $F$ ,  $\epsilon > 0$  et  $G_0 = E - F$ . Alors  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cup \{G_0\}$  est un recouvrement ouvert de l'espace  $\tau$ -compact  $E$ , donc il existe un nombre fini d'ouverts  $G_1, \dots, G_n$  de  $\mathcal{G}_0$  tels que

$$\tau(F - \bigcup_{i=1}^n G_i) = \tau(F - \bigcup_{i=0}^n G_i) \leq \tau(E - \bigcup_{i=0}^n G_i) < \epsilon.$$

Par conséquent,  $F$  est  $\tau$ -compact.

**9. Observation:** Il est facile de prouver que si  $A \subset E$  et pour chaque  $\epsilon > 0$  il existe un compact  $K \subset A$  vérifiant  $\tau(A - K) < \epsilon$  alors  $A$  est  $\tau$ -compact (proposition 3 de [5]). Il en résulte que tout intervalle borné de la droite réelle est  $\tau$ -compact pour la mesure extérieure  $\tau$  de Lebesgue. D'autre part, tout ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  tel que  $\tau(A) = 0$  est évidemment  $\tau$ -compact, donc  $Q$  est  $\tau$ -compact. Ces exemples montrent qu'un ensemble  $\tau$ -compact d'un espace séparé (resp. métrique) peut bien non être fermé (resp. fermé ni borné).

**10. Proposition:** Soient  $E$  un espace séparé,  $A \subset E$  un ensemble  $\tau$ -compact et  $x \in E - A$ . Alors pour chaque  $\epsilon > 0$  il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $\tau(A \cap V) < \epsilon$ .

*Démonstration:* Puisque  $E$  est un espace séparé, chaque point  $y \in A$  a un voisinage  $U$  tel que  $x \notin \bar{U}$  et comme  $A$  est  $\tau$ -compact, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un nombre fini de ces voisinages  $U_1, \dots, U_n$  tels que  $x \notin \bar{U}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  et

$$\tau(A - \bigcup_{i=1}^n U_i) < \epsilon.$$

Alors l'ensemble  $V = E - \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i$  est un voisinage de  $x$  et

$$\tau(A \cap V) = \tau(A - \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i) \leq \tau(A - \bigcup_{i=1}^n U_i) < \epsilon.$$

### 3. POINTS $\tau$ -ADHÉRENTS

**11. Définition:** On dit qu'un point  $x \in E$  est  $\tau$ -adhérent à une partie  $A$  de  $E$  si  $\tau(A \cap V) > 0$  pour tout voisinage  $V$  de  $x$ .

**12. Proposition:** Si  $\tau$  est finement sous-additive et  $E$  est  $\tau$ -compact alors toute partie  $A$  de  $E$  avec  $\tau(A) > 0$  a un point  $\tau$ -adhérent.

*Démonstration:* Si  $A$  n'avait pas des points  $\tau$ -adhérents, pour chaque  $x \in E$  il existerait un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  tel que  $\tau(A \cap V) = 0$  et puisque  $E$  est  $\tau$ -compact, pour tout  $\epsilon > 0$  il y aurait un nombre fini de ces voisinages  $V_1, \dots, V_n$

tels que  $\tau(E - \bigcup_{i=1}^n V_i) < \epsilon$ . Alors,

$$\tau(A) \leq \tau(A - \bigcup_{i=1}^n V_i) + \tau(\bigcup_{i=1}^n (A \cap V_i))$$

$$\begin{aligned}
 &< \epsilon + \sum_{i=1}^n \tau(A \cap V_i) \\
 &= \epsilon
 \end{aligned}$$

et comme  $\epsilon$  est arbitraire,  $\tau(A) = 0$  ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse.

**13. Définition:** On dit que  $\tau$  est *faiblement archimédienne* si pour

$$A_\epsilon = \bigcup \{ A \subset E : \tau(A) < \epsilon \}, \quad \epsilon > 0,$$

on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tau(A_\epsilon) > 0.$$

**14. Proposition:** Si  $\tau$  est une mesure extérieure sur  $E$  et il existe une partie  $A$  de  $E$  de mesure extérieure positive dépourvue de points  $\tau$ -adhérents, alors  $\tau$  est faiblement archimédienne et  $E$  ne vérifie pas le second axiome de dénombrabilité.

*Démonstration:* Pour chaque  $x \in A$  il existe un voisinage  $V(x)$  tel que  $\tau(A \cap V(x)) = 0$ , donc  $A = \bigcup \{ A \cap V(x) : x \in A \}$  est une réunion d'ensembles de mesure nulle. Alors  $A \subset A_\epsilon$  et  $\tau(A) \leq \tau(A_\epsilon)$  pour tout  $\epsilon > 0$ , donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tau(A_\epsilon) \geq \tau(A) > 0$$

et  $\tau$  est faiblement archimédienne.

Si  $E$  vérifiait le second axiome de dénombrabilité, tout recouvrement ouvert de n'importe quelle partie de  $E$  aurait un sous-recouvrement dénombrable et  $A$  serait une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, donc  $\tau(A) = 0$  ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse.

#### 4. TROUS NOIRS

**15. Définition:** On dit qu'un point  $x \in E$  est un *trou noir* d'une partie  $A$  de  $E$  si  $\tau(A \cap V) = \tau(A)$  pour tout voisinage  $V$  de  $x$ .

On note  $A^T$  l'ensemble des trous noirs de  $A$ .

C'est évident que si  $\tau(A) > 0$  alors  $A^T \subset \bar{A}$ . Inversement, si  $A^T \subset \bar{A}$  alors  $\tau(A) > 0$  ou  $A^T = \bar{A} = E$ .

**16. Proposition:** Si  $\tau(A) > 0$  et  $A$  est fermé (ou  $A$  est  $\tau$ -compact et  $E$  est séparé) alors  $A^T \subset A$ . Inversement, si  $A^T \subset A$  et  $\tau$  n'est pas identiquement nulle alors  $\tau(A) > 0$ .

*Démonstration:* Si  $\tau(A) > 0$  et  $A$  est fermé alors  $A^T \subset \bar{A} = A$ .

Si  $\tau(A) > 0$ ,  $A$  est  $\tau$ -compact et  $E$  est séparé, en vertu de la proposition 10, pour chaque  $x \in E - A$  et pour  $0 < \epsilon < \tau(A)$  il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que

$$\tau(A \cap V) < \epsilon < \tau(A)$$

donc aucun  $x \in E - A$  n'est pas un trou noir de  $A$  et  $A^T \subset A$ .

Supposons maintenant que  $A^T \subset A$ . S'il était  $\tau(A) = 0$ , il serait  $A^T = A = E$  et  $\tau$  serait identiquement nulle. Donc  $\tau(A) > 0$ .

**17. Proposition:** Si  $\tau$  est finiment sous-additive et  $E$  est  $\tau$ -compact alors toute partie  $A$  de  $E$  avec  $\tau(A) = +\infty$  a un trou noir.

*Démonstration:* Si  $A$  n'avait pas des trous noirs, pour chaque  $x \in E$  il existerait un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  tel que  $\tau(A \cap V) < \tau(A)$  et puisque  $E$  est  $\tau$ -compact, pour tout  $\epsilon > 0$  il y aurait un nombre fini de ces voisinages  $V_1, \dots, V_n$  tels que

$$\tau(E - \bigcup_{i=1}^n V_i) < \epsilon. \text{ Alors}$$

$$\begin{aligned} \tau(A) &\leq \tau(A - \bigcup_{i=1}^n V_i) + \tau(\bigcup_{i=1}^n (A \cap V_i)) \\ &< \epsilon + \sum_{i=1}^n \tau(A \cap V_i) \\ &< \epsilon + n \tau(A) \end{aligned}$$

donc  $\tau(A) < +\infty$ .

**18. Définition:** Soit  $\mathcal{C}$  une famille de sous-ensembles fermés de  $E$ . Une *mesure extérieure de Radon de type* ( $\mathcal{C}$ ) sur  $E$  est une mesure extérieure de Borel  $\tau$  qui vérifie

18.1. Tout  $H \in \mathcal{C}$  est  $\tau$ -compact et à mesure finie.

18.2. Pour chaque ensemble mesurable  $A \subset E$  on a

$$\tau(A) = \sup \{ \tau(H) : A \supset H \in \mathcal{C} \}.$$

Si en outre,

$$\tau(A) = \inf \{ \tau(G) : A \subset G \in \mathcal{G} \}$$

où  $\mathcal{G}$  est la famille des ouverts de  $E$ , alors on dit que  $\tau$  est une *mesure extérieure de Radon de type*  $(\mathcal{K})$  *sur*  $E$  *stricte*.

**19. Proposition:** *Soient*  $E$  *un espace topologique*  $T_1$ ,  $\mathcal{K}$  *une familles de sous-ensembles fermés de*  $E$  *et*  $\tau$  *une mesure extérieure de Radon de type*  $(\mathcal{K})$  *sur*  $E$  *stricte. Alors tout atome a un trou noir.*

*Démonstration:* Si un atome  $A$  n'avait pas des trous noirs, pour chaque  $x \in A$  il existerait un voisinage  $V(x)$  tel que  $\tau(A \cap V(x)) < \tau(A)$ , donc  $\tau(A \cap V(x)) = 0$  et  $A = \cup \{A \cap V(x) : x \in A\}$  serait une réunion d'ensembles de mesure nulle. Voyons que cela est impossible:

Puisque  $\tau$  est une mesure extérieure de Borel stricte, elle est régulière. Soit  $A'$  un couvrement mesurable de  $A$ . Pour chaque nombre réel  $r$  tel que  $0 < r < \tau(A')$  il existe un  $H \in \mathcal{K}$  tel que  $H \subset A'$  et  $\tau(H) > r$ , et comme  $A'$  est un atome on a  $\tau(A) = \tau(A') = \tau(H)$  et  $H$  est aussi un atome.

Montrons d'abord que  $H$  n'est pas une réunion d'ensembles de mesure nulle: S'il l'était, il serait  $\tau(x) = 0$  pour tout  $x \in H$ . D'autre part, pour chaque  $x \in H$  et tout nombre réel  $s$  tel que  $0 < s < \tau(H)$  il y aurait un ensemble  $G_x$  ouvert dans  $H$  et tel que  $x \in G_x$  et

$$\tau(G_x) < \tau(x) + s = s < \tau(H)$$

et puisque  $H$  est un atome,  $\tau(G_x) = 0$ . Mais comme  $H$  est  $\tau$ -compact, pour chaque  $\epsilon > 0$  il existerait un nombre fini d'ouverts  $G_{x_1}, \dots, G_{x_n}$  tels que

$$\tau(H - \bigcup_{i=1}^n G_{x_i}) < \epsilon,$$

donc

$$\begin{aligned} \tau(H) &= \tau(H - \bigcup_{i=1}^n G_{x_i}) + \tau(\bigcup_{i=1}^n G_{x_i}) = \\ &= \tau(H - \bigcup_{i=1}^n G_{x_i}) < \epsilon \end{aligned}$$

et puisque  $\epsilon$  est arbitraire,  $\tau(H) = 0$  ce qui serait contradictoire.

Donc il existe un  $x \in H$  tel que  $\tau(x) > 0$ . Nous finirons la démonstration en prouvant que  $x \in A$ : Si  $x$  n'était pas dans  $A$ , alors  $A$  serait une partie de  $A' - \{x\}$  et

$$\tau(A) \leq \tau(A') - \tau(x) < \tau(A')$$

ce qui est impossible car  $A'$  est un couvrement mesurable de  $A$ .



**20. Proposition:** *Si  $\tau$  est une mesure extérieure sur  $E$  et il existe un atome dépourvu de trous noirs, alors  $\tau$  est faiblement archimédienne et  $E$  ne vérifie pas le second axiome de dénombrabilité.*

*Démonstration:* Si  $A$  est un atome dépourvu de trous noirs, alors  $A$  est une partie de  $E$  de mesure extérieure positive dépourvue de points  $\tau$ -adhérents et il suffit d'appliquer la proposition 14.

## REFERENCES

- [1] FERNANDEZ NOVOA, J.: "Medidas arquimedianas". Rev. Mat. Hisp. Amer. 41 (1981) 63-79.
- [2] FERNANDEZ NOVOA, J.: "Medidas arquimedianas y medidas de Radon de tipo ( $\mathcal{C}$ )". Coll. Math. 36 (1985), 27-31.
- [3] FERNANDEZ NOVOA, J. et JIMENEZ GUERRA, P.: "Mesures archimédiennes et  $\theta$ -propriété de Darboux". Act. Math. 1(1982) 383-386.
- [4] RODRIGUEZ-SALINAS, B. y JIMENEZ GUERRA, P.: "Medidas de Radon de tipo ( $\mathcal{C}$ ) en espacios topológicos arbitrarios". Mem. R. Acad. Ci. Madrid, 10, 1979.

Departamento de Matemáticas  
Fundamentales  
Facultad de Ciencias  
U.N.E.D.  
Ciudad Universitaria  
28040 Madrid, ESPAÑA