

FEUILLETAGE SINGULIER DÉFINI PAR UNE DISTRIBUTION PRESQUE RÉGULIÈRE

par

MADELEINE BAUER

RESUMÉ

Un feuilletage régulier de codimension un sur une variété de dimension n peut être défini localement

soit par une 1-forme df qui ne s'annule pas,

soit par $n - 1$ champs de vecteurs linéairement indépendants (formant une base du noyau de df).

Les Γ -structures, les feuilletages de Morse sont une généralisation du premier point de vue où l'on n'impose plus à la fonction f d'être de rang 1.

Généralisant le second point de vue, les feuilletages de SUSSMANN-STEFAN, où l'on n'impose plus aux champs d'être indépendants, sont nés de problèmes en théorie du contrôle. Le feuilletage singulier défini par les orbites d'un groupe de Lie entre dans cette catégorie. Contrairement aux feuilletages de Morse, les feuilles singulières sont de vraies variétés. On peut donc espérer des résultats type *slice theorem* (voir la figure 1 où il faut imaginer que l'on recolle les deux plans horizontaux grâce à l'holonomie de S).

Dans cet article, nous nous restreignons aux feuilletages de Stefan de codimension 1 qui, transversalement au lieu singulier S , sont définis par un champ de vecteurs ayant un zéro isolé sur S . Cette restriction, qui est générique, rend les singularités suffisamment *tame* pour que les théorèmes de REEB, SACKSTEDER, MOUSSU sur les feuilletages de codimension 1 sans holonomie restent, pour l'essentiel, valables. C'est ce que nous montrons en II après donné en I les définitions et quelques exemples.

I. HOLONOMIE SINGULIÈRE. EXEMPLES.

1. Définitions. Soit M une variété C^∞ , paracompacte, de dimension n munie d'une métrique riemannienne.

Définition 1. — Une distribution \mathcal{D} de codimension 1 sur M est définie par une famille $\{U_\alpha, X_1^\alpha, \dots, X_{n-1}^\alpha\}_{\alpha \in A}$ où

(i) $X_1^\alpha, \dots, X_{n-1}^\alpha$ sont $n - 1$ champs de vecteurs C^∞ de l'ouvert U_α avec $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;

(ii) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, il existe une matrice inversible

$$g^{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, Gl(n-1, \mathbb{R}))$$

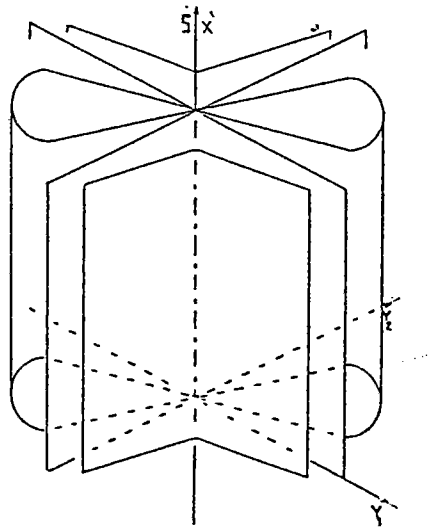


Fig. 1

telle que

$$(X_1^\beta, \dots, X_{n-1}^\beta) = (X_1^\alpha, \dots, X_{n-1}^\alpha) (g^{\alpha\beta}).$$

On dit que $(X_1^\alpha, \dots, X_{n-1}^\alpha)$ est une trivialisat ion locale de \mathcal{D} et que deux distributions \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont équivalentes si leur réunion est encore une distribution.

Définition 2. — Une distribution \mathcal{D} est involutive si quels que soient α, i, j il existe des fonctions $\lambda_{ijk}^\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ telles qu'on ait

$$[X_i^\alpha, X_j^\alpha] = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ijk}^\alpha X_k^\alpha.$$

Soit \mathcal{S} l'ensemble des points singuliers de \mathcal{D} , c'est à dire l'ensemble des points où la dimension du sous espace vectoriel \mathcal{D}_m de $T_m M$ engendré par les vecteurs d'une trivialisation locale de \mathcal{D} n'est pas maximale.

Dans un système de coordonnées locales, une trivialisation de \mathcal{D} s'identifie à une application $A = (X_1, \dots, X_{n-1})$ de \mathbb{R}^n dans l'espace E des matrices $n \times (n - 1)$. Si \mathcal{D} est involutive et de rang q en $m \in M$, le théorème de D. CERVEAU ([5] page 264) implique qu'il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_{n-q})$ nulles en m tel que

$$X_1 = \partial x_1, \dots, X_q = \partial x_q$$

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n-1} a_{j1}(y) \partial y_j, \dots, Y_{n-1-q} = \sum_{j=1}^{n-1-q} a_{j(n-1-q)}(y) \partial y_j$$

soit une trivialisation locale de \mathcal{D} avec $a_{ji}(0) = 0$.

L'application A peut donc s'écrire

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & A(y) \end{pmatrix} \text{ avec } A(y) = (Y_1(y), \dots, Y_{n-1-q}(y)).$$

Une application A de \mathbb{R}^n dans E est générique (voir J.N. Mather [15]) si elle est transverse aux sous-espaces de E constitués par les matrices de rang r pour $r = 0, 1, \dots, n - 1$.

Pour que l'application A définie par la trivialisation du modèle Cerveau soit générique, il faut et il suffit que $A : \mathbb{R}^{n-q} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-q)(n-1-q)}$ soit une submersion. Cela implique $(n - q) \geq (n - q)(n - 1 - q)$ c.à.d. $q \geq n - 2$. Dès que $q \geq n - 2$, il existe deux modèles locaux et deux seulement pour une distribution involutive \mathcal{D} . Dans l'ouvert $\hat{M} = M - \mathcal{S}$ des points réguliers ($q = n - 1$), \mathcal{D} définit un feuilletage régulier de codimension 1. Au voisinage d'un point singulier $s \in \mathcal{S}$ ($q = n - 2$), on a le modèle de Cerveau:

il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_{n-2}, y_1, y_2)$ nulles en s tel qu'une trivialisation locale soit

$$X_1 = \partial x_1, \dots, X_{n-2} = \partial x_{n-2}, \quad Y = \sum_{j=1}^2 a_j(y) \partial y_j$$

avec $a_j(0) = 0$.

Un tel couple coordonnées-trivialisation sera dit adapté. Le type de singularité du champ Y , admettant l'origine comme point singulier isolé, détermine, transversalement à \mathcal{S} , le type de singularité de \mathcal{D} .

La distribution \mathcal{D} est alors générique si et seulement si la dérivée de Y en 0

inversible; ainsi une distribution involutive générique sur une variété compacte vérifie les trois conditions de la définition suivante.

Definition 3.— Une distribution \mathcal{D} de codimension 1 involutive est une distribution presque régulière (DPR) si de plus elle vérifie les trois conditions suivantes:

- (i) quel que soit $m \in M$, la dimension de \mathcal{D}_m est au moins égale à $n - 2$;
- (ii) le lieu singulier S a un nombre fini de composantes connexes S_r , ($r = 1, \dots, l$), chacune étant une sous variété compacte de dimension $n - 2$;
- (iii) le champ de vecteurs Y de \mathbb{R}^2 ou bien est un centre ou bien n'a qu'un nombre fini de secteurs (hyperboliques, elliptiques, paraboliques).

Cette condition est vérifiée dès que Y n'est pas infiniment plat à l'origine.

2. Holonomie singulière. Soit S une feuille singulière (c.a.d. une composante connexe de S) et τ un voisinage tubulaire de S . On désigne par $\pi : \tau \rightarrow S$ la fibration en disques ouverts D^2 qui à m associe $\pi(m)$ extrémité de la géodésique normale à S joignant $m \in \tau$ à $\pi(m) \in S$.

Il existe alors un recouvrement fini de τ par des ouverts U_α saturés pour π munis d'une trivialisatation adaptée $(X_1^\alpha, \dots, X_{n-2}^\alpha, Y^\alpha)$ telle que

$$T_m \pi \{X_1^\alpha, \dots, X_{n-2}^\alpha\} = T_{\pi(m)} S \quad \text{et} \quad T_m \pi(Y^\alpha) = 0.$$

Cela implique

$$Y^\beta = Y^\alpha g^{\alpha\beta}$$

où $g^{\alpha\beta}$ est une fonction C^∞ dans $U_\alpha \cap U_\beta$ qui ne s'annule pas.

Soit \mathcal{F}_s ($s \in S$) le feuilletage vertical, c.a.d. le feuilletage du disque $D_s = \pi^{-1}(s)$ induit par \mathcal{D} , feuilletage engendré par les champs Y^α . Le type différentiable (C^∞) du germe en s du feuilletage \mathcal{F}_s est invariant quand s décrit S .

Nous allons maintenant mettre en place les éléments qui nous permettront de définir l'holonomie de la feuille singulière S .

Si m appartient à τ , désignons par F_m (resp. c_m) la feuille de $\mathcal{F}|_{\tau-S}$ (resp. de \mathcal{F}_s avec $s = \pi(m)$) passant par m .

Fixons un point s_0 de S . A tout chemin γ de S d'origine s_0 , on peut associer un difféomorphisme H_γ d'un voisinage de s_0 dans D_{s_0} dans un voisinage de $\gamma(1)$ dans $D_{\gamma(1)}$ tel que $H_\gamma(m)$ soit l'extrémité $\gamma_m(1)$ d'un chemin γ_m issu de m relevant γ dans D (c.a.d. vérifiant $\gamma'_m(t) \in \mathcal{D}_{\gamma_m(t)}$ et $\pi \circ \gamma_m = \gamma$). La figure 2 illustre

le cas où la singularité est un noeud non dégénéré et où M est orientable, de dimension 3 (dans ce cas S est un cercle).

La difféomorphisme H_γ n'est pas unique; en effet, comme la dimension de \mathcal{D} est égale à celle de S plus un, il reste un degré de liberté correspondant à $\{Y\} = \ker T\pi \cap \mathcal{D}$.

Mais une démonstration analogue à la démonstration classique pour les feuilletages réguliers nous permet de montrer que la courbe $c_{\tilde{\gamma}_m(1)}$ ne dépend que de la courbe c_m et de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ dans $\pi_1(S, s_0)$.

Soient G_{s_0} le groupe des germes en s_0 de difféomorphismes locaux H de D_{s_0} qui respectent le feuilletage \mathcal{F}_{s_0} , et \tilde{G}_{s_0} le quotient de G_{s_0} par la relation

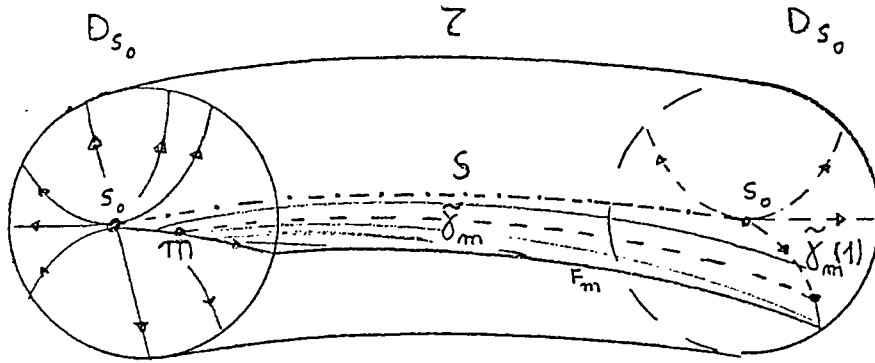


Fig. 2

d'équivalence suivante

$$[H_1] \sim [H_2] \quad c_{H_1(m)} = c_{H_2(m)}$$

au voisinage de s_0 .

L'application Hol_{s_0} de $\pi_1(S, s_0)$ dans \tilde{G}_{s_0} qui à la classe d'homotopie $[\gamma] \in \pi_1(S, s_0)$ fait correspondre la classe d'équivalence $H_{[\gamma]}$ du germe en s_0 de H_γ est bien définie et c'est un homomorphisme de groupe. Son image est indépendante de s_0 à conjugaison près.

Définition 4. — L'image $\text{Hol}_{s_0}(\pi_1(S, s_0))$ est le groupe d'holonomie de la feuille S . La feuille S est sans holonomie si son groupe d'holonomie est réduit à l'identité.

Dans les bons cas l'holonomie caractérise le feuilletage \mathcal{F} au voisinage de S comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.— Soit D' (resp. D'') une DPR sur M' (resp. M'') admettant S' (resp. S'') comme feuille singulière et dont la singularité transverse est un noeud ou un foyer.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- il existe un difféomorphisme g de S' sur S'' ,
- les groupes d'holonomie $\text{Hol}(\pi_1(S'))$ et $\text{Hol}(\pi_1(S''))$ sont conjugués comme sous groupes de $\text{Diff}(S^1)$,

alors il existe un homéomorphisme G d'un voisinage τ' de S' sur un voisinage τ'' de S'' , étendant g , de classe C^∞ dans $\tau' - S'$, tel que les feuilletages réguliers associés $G_*(D')$ et D'' soient les mêmes.

Démonstration. Nous allons d'abord noter M, D, S, \dots pour M' ou M'' , D' ou D'' , S' ou S'' .

Si M est de dimension 2, la feuille singulière S est un point et \mathcal{D} est définie, au voisinage de S , par un champ Y ayant un zéro isolé en S . Si les parties réelles des valeurs propres de Y sont non nulles et de même signe, il existe un homéomorphisme G d'un voisinage τ de S sur le disque D^2 de rayon 1 de \mathbb{R}^2 de classe C^∞ dans $\tau - S$ tel que

$$G(0) = 0 \text{ et } G_*(Y) = \pm \rho \partial \rho \text{ dans } D^2 - \{0\}$$

ce qui nous donne le modèle $(D^2, \rho \partial \rho)$ et le théorème est vrai.

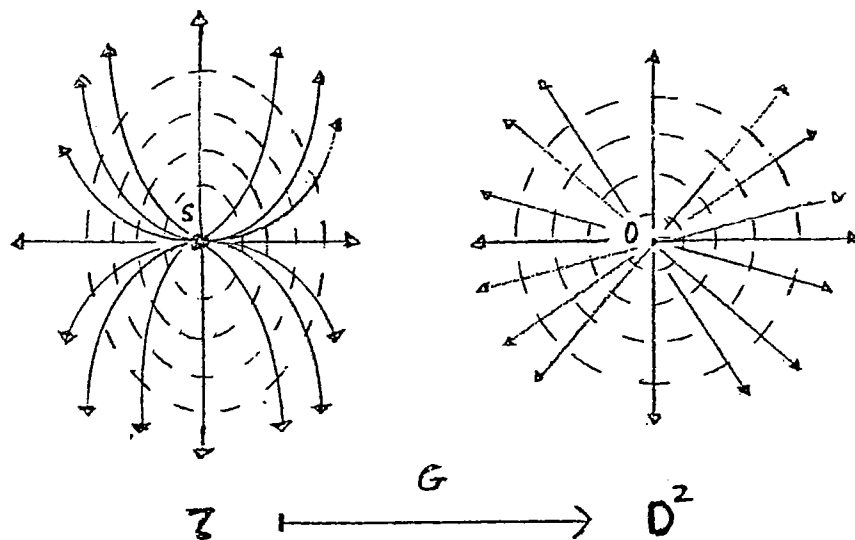


Fig. 3

La figure 3 illustre ce propos. On a dessiné en traits pleins les courbes intégrales du champ Y (resp. $\rho\partial\rho$) et en pointillés les lignes de niveau d'une fonction de Lyapounov associée à Y (resp. de ρ^2).

Si M est de dimension ≥ 3 , verticalement (dans chaque fibre de π) on a encore ce modèle. Dans chaque ouvert U_α aussi, car le feuilletage est la contre-image par la projection de $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ sur \mathbb{R}^2 du feuilletage de \mathbb{R}^2 défini par Y . Pour obtenir un modèle global on va recoller ces morceaux le long de S et c'est là qu'interviendra l'holonomie singulière.

Quitte à remplacer Y^α par $-Y^\alpha$, on peut supposer que les parties réelles des valeurs propres de Y^α sont positives ce qui implique que les $g^{\alpha\beta}$ de la relation $Y^\beta = Y^\alpha g^{\alpha\beta}$ sont positifs au voisinage de S . Pour tout α soit h^α une fonction de Lyapounov associée à Y^α . Si f^α est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement fini $\{\pi(U_\alpha)\}$ de S , la fonction $h = \sum (f^\alpha \circ \pi) h^\alpha$ est une fonction de Lyapounov pour le champ $Y = \sum_\alpha (f^\alpha \circ \pi) Y^\alpha$ au voisinage de S .

Pour ϵ assez petit, $h^{-1}(\epsilon)$ est une hypersurface Σ bordant un voisinage tubulaire τ_ϵ de S . La restriction \mathcal{F}_ϵ de \mathcal{F} à $\tau_\epsilon - S$ est entièrement déterminée par sa trace \mathcal{F}_Σ sur Σ : une feuille F de \mathcal{F}_ϵ est égale au saturé de $F_\Sigma = F \cap \Sigma$ par les courbes intégrales de Y .

Une suspension à la HAEFLIGER permet de montrer que $(\Sigma, \mathcal{F}_\Sigma)$ est difféomorphe à

$$(\tilde{\Sigma} = \tilde{S} \times_{\pi_1(S)} S^1, \mathcal{F}_{\tilde{\Sigma}})$$

où

- \tilde{S} est le revêtement universel de S ,
- S^1 est le cercle, trace de Σ sur la fibre D_{s_0} de π en s_0 , qui s'identifie au quotient de $D_{s_0} - \{s_0\}$ par le feuilletage \mathcal{F}_{s_0} tangent à Y ,
- $\pi_1(S)$ agit sur S^1 par l'homomorphisme $\text{Hol}_{s_0} : \pi_1(S) \rightarrow \text{Diff}(S^1)$,
- $\mathcal{F}_{\tilde{\Sigma}}$ est le feuilletage induit sur $\tilde{\Sigma}$ par le feuilletage trivial $\tilde{S} \times \{\text{un point}\}$.

Désignons maintenant par $\tilde{\tau}$ le fibré en disques associé au fibré en cercles $\tilde{\Sigma}$ muni du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ induit par le feuilletage $\tilde{S} \times \{\text{un rayon}\}$. L'application G de $\tilde{\tau}$ dans τ_ϵ qui à la classe d'équivalence de $([\gamma], \exp t\rho\partial\rho(m))$ associe le point $\exp tY(H_\gamma(m) \cap \Sigma)$

où $[\gamma] \in \tilde{S}, t \in]-\infty, 0[$, $m \in S^1$,

est un homéomorphisme de $\tilde{\tau}$ sur τ_ϵ , de classe C^∞ dans $\tilde{\tau} - S$ qui envoie une feuille de \tilde{F} sur une feuille de \mathcal{F}_ϵ .

Comme le modèle $(\tilde{\tau}, \tilde{F})$ ne dépend que de S et de la représentation Hol à difféomorphisme près, le théorème 1 découle facilement de notre construction.

3 Exemples. Nous allons construire des exemples de DPR dans l'espace lenticulaire $L(p, q)$ obtenu en recollant les tores pleins $\tau_1 = S^1 \times \mathbb{R}^2$ et $\tau_2 = S^1 \times \mathbb{R}^2$

par le difféomorphisme $G(\theta, \rho, \varphi) = (q\theta + r\varphi, 1/\rho, p\theta + s\varphi)$, les entiers r, s vérifiant $qs - pr = 1$.

Pour ce faire, on se donnera une DPR de τ_1 définie par une trivialisation (X, Y) telle que (G_*X, G_*Y) soit équivalente à une distribution qui se prolonge à tout τ_2 .

a) *Premier type d'exemples (foyer)*. Les champs

$$X = \partial\theta + a\partial\varphi, \quad Y = \rho\partial\rho + b\partial\varphi$$

se prolongent en des champs C^∞ de l'espace lenticulaire définissant ainsi une DPR sur $L(p, q)$ ayant comme feuilles singulières les âmes S_1 et S_2 des deux tores pleins.

Le champ X est tangent au tore Σ (défini par $\rho = 1$), ses orbites sont des cercles si a est rationnel, des droites denses dans Σ si a est irrationnel.

Comme on a des singularités type foyer dans τ_1 et dans τ_2 , les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées. L'holonomie de S_1 (resp. S_2) s'identifie à une rotation d'angle a (resp. $(p + as)/(q + ar)$). Une feuille F du feuilletage régulier de $\widehat{L(p, q)} = \tau_1 \cap \tau_2 = \tau_1 - S_1$ est égale au saturé par Y de l'orbite F_Σ de X . Le feuilletage régulier est alors sans holonomie et ses feuilles sont

- des cylindres fermés dans $\widehat{L(p, q)}$ si a est rationnel,
- des plans denses si a est irrationnel.

Il est possible de désingulariser ce type de DPR. En éclatant les deux feuilles singulières, on obtient une variété compacte ayant pour bord deux tores T_1 et T_2 munie d'un feuilletage tangent au bord presque sans holonomie. L'holonomie de la feuille singulière S_i est celle de l'un de générateurs de $\pi_1(T_i)$, l'holonomie de l'autre générateur traduisant l'enroulement de la spirale autour du cercle, éclatement du point singulier.

b) *Deuxième type d'exemples (champ polynomial)*. Donnons nous dans τ_1 la trivialisation

$$\begin{aligned} X &= \partial\theta \quad (\text{resp. } \bar{X} = \partial\theta + \rho\partial\rho) \\ Y &= \rho^n \{ P(\cos \varphi, \sin \varphi)\rho\partial\rho + Q(\cos \varphi, \sin \varphi)\partial\varphi \} \end{aligned}$$

où P et Q sont des polynômes homogènes de degré n . Le champ Y peut avoir tous les types de singularité: noeud, col, secteurs hyperboliques, secteurs elliptiques; il peut même être un centre.

Désignons par $\mathcal{F} Y$ le feuilletage du disque $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ tangent à Y . Comme $[X, Y] = 0$ (resp. $[\bar{X}, Y] = nY$) l'application premier retour $\exp X$ (resp. $\exp \bar{X}$)

respecte $\mathcal{F} Y$. Mais l'intégrale première de Y est de la forme $\rho e^{-\int P/Q d\varphi}$, et $\exp \bar{X}$ respecte donc $\mathcal{F} Y$ feuille par feuille, alors que $\exp \bar{X}$ permute les feuilles de $\mathcal{F} Y$.

L'holonomie de la feuille singulière S_1 , âme de τ_1 , s'identifie à l'action de l'application premier retour $\exp X$ (resp. $\exp \bar{X}$) sur $\mathcal{F} Y$. La feuille S_1 n'a pas d'holonomie (resp. a une holonomie infinie) pour la DPR de τ_1 définie par (X, Y) (resp. (\bar{X}, Y)).

Comme les champs $G_*(X)$ (resp. $G_*(\bar{X})$) et $\rho^{(q+1)n} G_*(Y)$ se prolongent en des champs C^∞ de τ_2 , on obtient une DPR sur $L(p, q)$ ayant comme feuilles singulières les âmes S_1 et S_2 des tores. Puisque $\overline{L(p, q)}$ est égale à $\tau_1 - S_1$, l'étude du feuilletage régulier \mathcal{F} peut se faire dans τ_1 .

Les feuilles de \mathcal{F} sont les saturés d'une trajectoire de X (resp. \bar{X}) par les courbes intégrales de Y ; elles sont donc toujours propres. Pour le couple (X, Y) ce sont des cylindres. Par contre pour le couple (\bar{X}, Y) ou bien on n'a que des cylindres, ou bien que des plans ou bien le mélange des deux et dans ce dernier cas le feuilletage régulier a de l'holonomie.

En effet, soit \mathfrak{P} l'ensemble des points périodiques de $\text{Hol}(\pi_1(S_1))$ c.a.d. des courbes c de $\mathcal{F} Y$ telles qu'on ait $\exp k\bar{X}(c) = c$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Si c est une courbe de \mathfrak{P} , désignons par $\tilde{\gamma}$ une trajectoire de \bar{X} passant par un point m de c . Comme $\tilde{\gamma}(0)$ et $\tilde{\gamma}(k)$ appartiennent à c , la réunion Γ de $\gamma[0, k]$ et l'intervalle de c joignant $\tilde{\gamma}(0)$ à $\tilde{\gamma}(k)$ est homéomorphe au cercle. La feuille F de \mathcal{F} passant par c est le cylindre engendré par l'ensemble des trajectoires de Y qui s'appuient sur Γ .

Mais si c n'est pas un élément de \mathfrak{P} , une trajectoire γ de \bar{X} passant par un point m de c ne revient pas sur c . La feuille F de \mathcal{F} passant par c est le plan engendré par l'ensemble des trajectoires de Y qui s'appuient sur la droite γ .

Si \mathfrak{P} et son complémentaire \mathfrak{P}' sont non vides, les itérés $\exp k\bar{X}(c)$ des images d'une courbe c de \mathfrak{P}' se rapprochent du bord de \mathfrak{P}' . Par conséquent le plan passant par c s'enroule autour des cylindres passant par les courbes du bord de \mathfrak{P}' .

La figure 4 représente le feuilletage de $\mathbb{R}^3 = S^3 - \{\infty\}$ défini par la distribution \mathcal{D} ayant pour trivialisation

$$X = \partial\theta + \rho\partial\rho, \quad Y = x\partial x - y\partial y \quad \text{dans } \tau_1.$$

Les notations sont les suivantes

F_1, F_2, F_3, F_4 : les quatre feuilles séparatrices (cylindres)

F', F'' : feuilles ordinaires (plans)

D_1 (resp. D_2): disque $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ de τ_1 (resp. τ_2),

c'_j, c'_{j+1} : traces successives de F' sur le disque D_1 de τ_1 ,

c''_k, c''_{k+1} : traces successives de F'' sur le disque D_2 de τ_2 .

que, quelle que soit la feuille F de \mathcal{F} , il existe un minimal $\mathcal{M} \subset \bar{F} \cap \hat{M}$, ce qui n'est pas évident car \hat{M} n'est pas compacte.

Pour démontrer le théorème de Sacksteder (non existence d'un minimal exceptionnel) dans le cas d'un champ de vecteurs X sur une surface, A.J. Schwartz utilise la propriété suivante:

si \mathcal{M} est un minimal exceptionnel, il existe au voisinage de chaque point de \mathcal{M} un intervalle compact I transverse tel que $\mathcal{M} \cap I$ soit contenu dans un ouvert U de I où l'application premier retour de X est définie. Si le minimal exceptionnel \mathcal{M} contient une séparatrice, on ne peut avoir cette propriété (voir la figure 5).

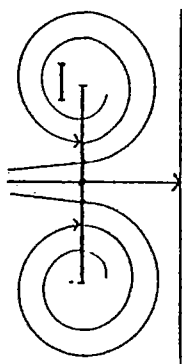


Fig. 5

L'existence de séparatrices pose dans tous les cas un problème car elles cassent l'holonomie de \mathcal{F} comme on vient de le voir dans le cas des surfaces où l'holonomie est l'application premier retour d'un champ de vecteurs. C'est pourquoi il faudra toujours ajouter des hypothèses supplémentaires pour étendre les théorèmes classiques sur les feuillets sans holonomie.

1. Théorème de stabilité et existence de minimaux

Proposition 1. Soit \mathcal{D} une DPR de codimension 1 et S une feuille singulière de \mathcal{D} . On suppose que S est un centre non dégénéré (resp. a au moins un secteur elliptique).

- (i) Alors il est évident qu'il existe un voisinage τ' de S (resp. un ouvert V' adhérent à S) tel que, $\forall s \in S$, toutes les feuilles de \mathcal{F} coupent $D'_s = \tau' \cap D_s$ (resp. $D'_s = V' \cap D_s$) selon les cercles (resp. des courbes elliptiques).
- (ii) Si K est un fermé \mathcal{F} -saturé de \hat{M} contenu dans τ' (resp. V'), alors il existe une feuille régulière compacte (resp. fermée dans \hat{M}) contenue dans K .

(iii) (*Théorème de stabilité*). Si S est sans holonomie, il existe un voisinage ouvert τ'' de S (resp. un ouvert V'' inclus dans V' et adhérent à S) saturé par des feuilles régulières compactes (resp. fermées dans \hat{M}).

Si S est un centre dégénéré, le point (ii) reste valable, par contre (iii) ne l'est que pour les feuilles de \mathcal{F} correspondant aux courbes intégrales périodiques de Y qui sont alors compactes.

Démonstration.

(ii) Comme l'ensemble des courbes intégrales de Y dans D'_{s_0} est ordonné par l'inclusion des intérieurs, il existe une courbe intégrale c_0 du feuilletage vertical contenue dans $D_{s_0} \cap K$ vérifiant $c_0 \geq c$ pour toute courbe intégrale c de $D'_{s_0} \cap K$.

Soit F la feuille de $\mathcal{F}|_{\tau'-S}$ (resp. $\mathcal{F}|_{V'}$) passant par c_0 . En utilisant le fait que K est \mathcal{F} -saturé, on montre que tout chemin de S se relève dans F . L'application $\pi|_F$ est alors une surmersion dont la "fibre" est réduite à une courbe périodique (resp. à un nombre fini de courbes elliptiques) de Y . La feuille F est donc un fibré en cercles (resp. en droites) sur S . Dans le cas elliptique, le fait que c_0 soit maximale entraîne que F est fermée dans M .

(iii) Comme S est compacte, son groupe fondamental a un nombre fini de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ et il existe $L > 0$ tel que tout point de S puisse être joint à s_0 par une géodésique de longueur inférieure ou égale à L . Soit D'' un ouvert contenu dans D_{s_0} et \mathcal{F}_{s_0} -saturé tel que de plus pour tout i , $1 \leq i \leq r$, "le" difféomorphisme H_{γ_i} associé à γ_i soit défini dans un ouvert contenant D'' , pour tout "lacet géodésique" γ de longueur inférieure ou égale à $2L$ "le" difféomorphisme H_γ soit défini dans un ouvert contenant D'' .

En prenant pour τ'' (resp. V'') le \mathcal{F} -saturé de $\overline{D''}$ et en faisant le même type de raisonnement qu'en (ii), on a le résultat.

Théorème 2. (Existence de minimaux). Si \mathcal{D} est une DPR de codimension 1 sur une variété M compacte alors, quelle que soit la feuille G de \mathcal{F} , il existe un \mathcal{F} -minimal \mathcal{M} inclus dans $\overline{G} \cap \hat{M}$.

On va distinguer trois cas:

premier cas: il existe $m_0 \in \overline{G} \cap M$ tel que $\overline{F}_{m_0} \cap \hat{M} = F_{m_0}$.

deuxième cas: il existe $m_0 \in \overline{G} \cap M$ tel que $\overline{F}_{m_0} \subset \hat{M}$.

troisième cas: $m \in \overline{G} \cap \hat{M} \implies \overline{F}_m \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ et $(\overline{F}_m - F_m) \cap \hat{M} \neq \emptyset$.

Dans le premier cas, il suffit de prendre $\mathcal{M} = F_{m_0}$.

Dans le deuxième cas, la démonstration classique pour les feuilletages im-

plique qu'il existe $\mathcal{M} \subset \bar{F}_{m_0} \subset \bar{G}$ compact \mathcal{F} -saturé non vide minimal. Nous allons donc faire la démonstration seulement dans le troisième cas.

Pour cela montrons d'abord trois lemmes.

Lemme 1. Soit F une feuille non compacte de \mathcal{F} et m_0 un point de $\bar{F} - F$, alors il existe un bout e de F tel que $m_0 \in \lim_e F$. De plus pour tout bout e de F l'ensemble $\lim_e F$ est fermé, \mathcal{D} -saturé, non vide, connexe.

Le mot \mathcal{D} -saturé doit être compris de la façon suivante: $\lim_e F \cap \hat{M}$ est \mathcal{F} -saturé et une feuille singulière S_i ou bien est contenue dans $\lim_e F$ ou bien ne le rencontre pas. (cf. [17]).

Remarquons que, pour toute feuille F , d'après le lemme 1, l'intersection $F \cap \mathcal{S}$ est une réunion de composantes connexes de \mathcal{S} . On a cependant un résultat plus précis.

Lemme 2. Pour toute feuille G de \mathcal{F} vérifiant les conditions du 3ème cas, il existe $m_0 \in \bar{G} \cap \hat{M}$ et $r \geq 1$ composantes connexes S_1, \dots, S_r de \mathcal{S} telles que

$$\forall m \in F_{m_0} \quad F_m \cap \mathcal{S} = S_1 \cup \dots \cup S_r.$$

Lemme 3. Dans le troisième cas, il existe un point m_0 de $\bar{G} \cap \hat{M}$ ayant l'une des propriétés ci-dessous relativement au feuilletage vertical \mathcal{F}_{s_0}

- (i) il existe un secteur hyperbolique tel que, $\forall m \in \bar{F}_{m_0} \cap \hat{M}$, l'adhérence \bar{F}_m contienne les séparatrices bordant ce secteur;
- (ii) il existe un secteur parabolique ou elliptique Q tel que, $\forall m \in \bar{F}_{m_0} \cap M$, on ait $\bar{F}_m \cap Q \neq \emptyset$;
- (iii) quel que soit $m \in \bar{F}_{m_0} \cap \hat{M}$, l'intersection $\bar{F}_m \cap \mathcal{S}$ est une réunion de composantes connexes S_i de \mathcal{S} , chacune étant un centre.

Démonstration du lemme 2.

D'après le lemme 1, pour toute feuille F de \mathcal{F} , on a l'équivalence

$$\bar{F} \cap S_i \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bar{F} \supset S_i$$

Première étape. On a l'un des deux cas suivants:

$$\exists m_1 \in \bar{G} \cap \hat{M} \text{ tel que } \bar{F}_{m_1} \cap S_1 = \emptyset$$

ou bien

$$m \in \bar{G} \cap \hat{M} \quad \Rightarrow \quad \bar{F}_m \supset S_1.$$

Deuxième étape. Si on est dans le premier cas, on recommence avec S_2 et on a :

$$\exists m_2 \in \bar{F}_{m_1} \cap \hat{M} \text{ tel que } \bar{F}_{m_2} \cap S_2 = \emptyset$$

ou bien

$$m \in \bar{F}_{m_1} \cap \hat{M} \implies \bar{F}_m \supset S_2.$$

Si on est dans le deuxième cas, on a :

$$\exists m_2 \in \bar{G} \cap \hat{M} \text{ tel que } \bar{F}_{m_2} \cap S_2 = \emptyset$$

ou bien

$$m \in \bar{G} \cap \hat{M} \implies \bar{F}_m \supset S_2.$$

On a donc, après la deuxième étape, les cas suivants :

- * $\exists m_2 \in \bar{G} \cap \hat{M}$ tel que $\bar{F}_{m_2} \cap (S_{l-1} \cup S_l) = \emptyset$ en échangeant $[1, 2]$ et $[l-1, l]$,
- ** $\exists m_1 \in \bar{G} \cap \hat{M}$ tel que $\bar{F}_{m_1} \cap S_l = \emptyset$ et $m \in \bar{F}_{m_1} \cap \hat{M} \implies \bar{F}_m \supset S_1$ en échangeant soit 1 avec l , soit 2 avec l ,
- *** $m \in \bar{G} \cap \hat{M} \implies \bar{F}_m \supset S_1 \cup S_2$.

En répétant les opérations faites lors de la deuxième étape au plus $(l-1)$ fois ou bien on arrive au résultat du lemme, ou bien il existerait $m_l \in \bar{G} \cap \hat{M}$ tel que $\bar{F}_{m_l} \cap (S_1 \cup \dots \cup S_l) = \emptyset$, ce qui est contraire aux hypothèses du troisième cas.

Prenons pour G la feuille F_{m_0} du lemme 2 dont nous gardons les notations (elle vérifie toujours les conditions du troisième cas). Comme une feuille singulière S_i ou bien est un centre ou bien a un nombre fini de secteurs paraboliques, hyperboliques, elliptiques, on peut donner une démonstration du lemme 3 analogue à celle du lemme 2 mais en faisant cette fois une récurrence sur les secteurs.

Démonstration du théorème 2.

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que, si G est une feuille vérifiant les conclusions des lemmes 2 et 3 et les hypothèses du troisième cas, alors, quelle que soit la famille $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de fermés saturés de $\bar{G} \cap \hat{M}$ totalement ordonnée par inclusion, l'intersection $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ n'est pas vide. Dans le cas (i) du lemme 3, l'intersection contient les séparatrices. Dans les cas (ii) et (iii) du

lemme 3, on montre qu'il existe un compact \mathcal{F}_s -saturé \mathcal{J} vérifiant $\mathcal{J} \cap K_\lambda \neq \emptyset$, $\forall \lambda \in \Lambda$, ce qui implique que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \neq \emptyset$.

2. Distribution presque régulière transversalement orientable.

Proposition 2. Soit \mathcal{D} une DPR de codimension 1 sur une variété M , quitte à passer à un revêtement à deux feuillets de M , il existe un champ de vecteurs Z transverse à \mathcal{F} dans \hat{M} , nul sur \mathcal{S} . On dit alors que la DPR est transversalement orientable.

Le champ normal à Y dans les fibres de τ_j ($j = 1, \dots, l$) permet de définir le cocycle des orientations "transverses" à \mathcal{D} dans M et d'obtenir la proposition 2. A l'aide du champ Z , on construit un champ ξ , égal à Z dans $M - \bigcup_{j=1}^l \tau_j$, se décomposant en " Z et un champ de S_j " au voisinage de S_j , dont les points singuliers sont isolés et sur \mathcal{S} .

Grâce au champ ξ , on établit le

Théorème de l'index de D.A. DEAN [7]. Si \mathcal{D} est une DPR de codimension 1 sur une variété compacte M et si $\chi(M)$ (resp. $\chi(S_j)$) est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M (resp. S_j) on a la relation

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^l \chi(S_j) I(\mathcal{D}, S_j).$$

$I(\mathcal{D}, S_j)$ étant l'indice en $s \in S_j$ du champ vertical Y tangent à \mathcal{F}_s .

Ce théorème constitue une obstruction cohomologique à l'existence du couple $(\mathcal{D}, \mathcal{S})$.

A l'aide du champ Z , on montre qu'à une DPR de codimension 1 transversalement orientable est associée une 1-forme ω de M intégrable (c.à.d. vérifiant $\omega \wedge d\omega = 0$), nulle sur \mathcal{S} , définissant le même feuilletage \mathcal{F} dans \hat{M} . Réciproquement à une 1-forme intégrable de KUPKA-REEB (c.à.c. vérifiant $\omega=0 \Rightarrow d\omega \neq 0$) ayant comme lieu singulier une sous-variété de codimension 2 correspond une DPR transversalement orientable définissant le même feuilletage \mathcal{F} .

3. Non existence de minimal exceptionnel.

Théorème 3. Si est une DPR de codimension 1 sur une variété compacte M telle que le feuilletage \mathcal{F} de \hat{M} soit sans holonomie ainsi que toutes les feuilles singulières S_j ($j = 1, \dots, l$) alors un minimal \mathcal{M} ne contenant pas de séparatrices ne peut être exceptionnel.

Ce théorème est optimal dans le sens suivant: un minimal contenant des séparatrices peut être exceptionnel même si le feuilletage \mathcal{F} et les feuilles singulières sont sans holonomie ainsi que le montre l'exemple du feuilletage de CHERRY ([14] pages 29-30).

Ce théorème 3 est en fait un corollaire de la proposition 1 et de la proposition suivante

Proposition 3. *Si \mathcal{D} est une DPR de codimension 1 sur une variété compacte telle que le feuilletage régulier \mathcal{F} associé soit sans holonomie et si \mathcal{M} est un minimal qui vérifie la condition suivante:*

il n'existe pas de suite de points de \mathcal{M} tous situés dans un secteur hyperbolique (resp. elliptique ou au voisinage d'un centre) tendant vers un point singulier,

alors ce minimal ne peut être exceptionnel.

Démonstration de la proposition 3.

La proposition 3 découle du théorème de SACKSTEDER sur les pseudogroupes de difféomorphismes locaux de \mathbb{R} ([21] page 80) et de la propriété suivante il existe un intervalle T transverse à \mathcal{F} dont les extrémités ne sont pas dans \mathcal{M} tel que la restriction du pseudogroupe d'holonomie à $\mathcal{M} \cap T$ ait un nombre fini de générateurs, chaque générateur étant défini sur un intervalle ouvert dont les extrémités ne sont pas dans \mathcal{M} .

Cette dernière propriété résulte de l'existence d'un recouvrement ouvert cohérent fini de \hat{M} , notion technique que je vais définir ci-dessous.

Recouvrements ouverts cohérents de \hat{M} .

Je suppose la distribution \mathcal{D} transversalement orientable et je désigne par \mathcal{L} le feuilletage associé au champ Z transverse à \mathcal{F} .

Definitions 5. *Un ouvert V' de M est dit simple de type 1 si et seulement si*

- (i) V' est muni d'un système de coordonnées adapté à \mathcal{F} et à \mathcal{L} ;
- (ii) il existe un intervalle T d'une feuille de \mathcal{L} tel que toute feuille de $\mathcal{F}|_{V'}$ coupe T en un seul point;
- (iii) les feuilles de $\mathcal{F}|_{V'}$ sont homéomorphes à \mathbb{R}^{n-1} .

Un ouvert V de M est distingué de type 1 si et seulement s'il est simple de type 1, vérifie $\bar{V} \subset V'$, avec V' simple de type 1, et si les plaques de $\mathcal{F}|_V$ sont géodésiquement convexes.

Un ouvert V' de $\tau-S$ est dit simple de type 2 si et seulement si (figure 6)

- (i) V' est adhérent à $\pi(V')$;
- (ii) il existe un intervalle T dans la fibre de π tel que toute feuille de $\mathcal{F}|_{V'}$, coupe T en un et un seul point;
- (iii) les feuilles de $\mathcal{F}_s|_{V'}$, sont homéomorphes à un intervalle et $\pi(V')$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{n-2} .

Un ouvert V de $\tau - S$ est distingué de type 2 si et seulement s'il est simple de type 2, vérifie $(\bar{V} \cap \hat{M}) \subset V'$ avec V' simple de type 2 et $\pi(V')$ géométriquement convexe.

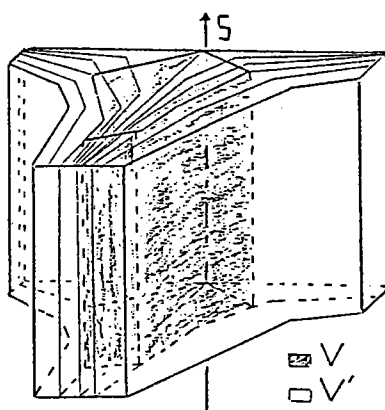


Fig. 6

Un recouvrement ouvert $(V_\beta)_{\beta \in B}$ de \hat{M} est cohérent si et seulement si

- (i) les ouverts V_β sont distingués;
- (ii) si $\bar{V}_{\beta_1} \cap \bar{V}_{\beta_2} \neq \emptyset$, il existe un ouvert simple contenant $(V_{\beta_1} \cup V_{\beta_2}) \cap \hat{M}$;
- (iii) si $V_{\beta_1} \cup V_{\beta_2} \cup V_{\beta_3}$ est connexe, il existe un ouvert simple V contenant cette réunion et tel que la trace d'une plaque de V sur V_{β_i} ($i = 1, 2, 3$), si elle n'est pas vide, soit une plaque de V_{β_i} .

Lemme 4. Si S ne comprend pas de centres dégénérés, il existe un recouvrement ouvert cohérent fini de \hat{M} .

Démonstration.

Première étape. Pour tout r , il existe un voisinage τ'_r de S_r tel que $\tau'_r - S_r$ soit une réunion finie d'ouverts distingués de type 2.

En effet, en éclatant le champ Y^α (R. ROUSSARIE [24] pages 98 à 109) le long de S_r , on se ramène au cas d'un voisinage d'un bord compact.

Deuxième étape. Comme $M' = M - \bigcup_{r=1}^l \tau_r'$ est compacte, il existe un recouvrement fini de M' par des ouverts distingués de type 1.

On a donc un recouvrement fini $(V_\beta)_{\beta \in B}$ de M par des ouverts distingués des deux types.

Troisième étape. Pour tout m de \hat{M} , on peut alors construire deux voisinages distingués $V(m)$ et $V'(m)$ vérifiant

$$\overline{V(m)} \cap \hat{M} \subset V'(m) \subset \left(\bigcap_{m \in V_\beta} V_\beta \right) \cap \left(\bigcap_{m \in \overline{V_\beta} - V_\beta} V'_\beta \right) \cap \left(M - \bigcup_{m \notin \overline{V_\beta}} \overline{V_\beta} \right).$$

V'_β étant l'ouvert simple associé à l'ouvert distingué V_β .

Les ouverts $V(m)$ pour $m \in \hat{M}$ forment un recouvrement cohérent de \hat{M} dont on peut extraire un recouvrement fini en recommençant les raisonnements faits dans les deux premières étapes (cf. M.W. HIRSCH [10]).

4. Feuilletages sans holonomie

Proposition 4. Soit \mathcal{D} une DPR de codimension 1 sur une variété compacte telle que le feuilletage régulier \mathcal{F} de \hat{M} défini par \mathcal{D} soit sans holonomie. Alors on a les propriétés suivantes

- (i) si F_0 est une feuille de \mathcal{F} compacte et si $U(F_0)$ est la composante connexe contenant F_0 de l'ensemble des feuilles régulières compactes on a

$$U(F_0) \simeq F_0 \times]-1, +1[\\ \overline{U(F_0)} - U(F_0) = F_1 \cup \dots \cup F_k \cup S_1 \cup \dots \cup S_r$$

où les feuilles régulières F_i sont des séparatrices fermées dans M tandis que les feuilles singulières S_j soit sont des centres, soit sont des bouts des F_i ($1 \leq i \leq k$);

- (ii) si, quelle que soit la feuille singulière, les parties réelles des valeurs propres de Y sont non nulles et de même signe, les résultats de SACKSTEDER-MOUSSU-IMANISHI sur les feuilletages sans holonomie sont valables pour le feuilletage \mathcal{F} ;
- (iii) si \mathcal{F} est arationnel (c'est à dire si les seules singularités sont des secteurs hyperboliques et si, pour toute feuille régulière F , l'ensemble des bouts de F comprend au plus une feuille singulière) et si la variété M est simplement connexe, alors il ne peut y avoir de minimal exceptionnel.

Démonstration.

Le point (i) se démontre de façon analogue à H.B. LAWSON ([13] pages 18 à 19).

Dans les hypothèses de (ii) la fonction de Lyapounov associée à Y fournit des sous variétés Σ_r transverses à \mathcal{F} bordant les voisinages τ_r des feuilles singulières: on est ramené au cas d'un feuilletage de codimension 1 sans holonomie sur une variété compacte $(M - \cup_{r=1}^l \tau_r)$ à bord $(\cup_{r=1}^l \Sigma_r)$ transverse au feuilletage (cf. R. MOUSSU [16]).

Avec les hypothèses faites dans (iii), dès qu'il existe un minimal exceptionnel \mathcal{M} , il existe une transversale fermée coupant \mathcal{M} et bordant un disque D en position de Morse (figure 7).

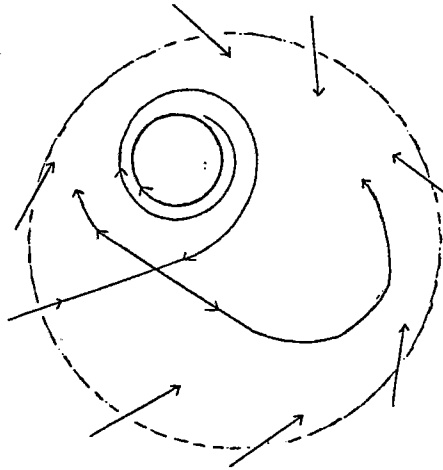


Fig. 7

Le feuilletage \mathcal{F}_D induit par \mathcal{D} sur D a alors nécessairement un cycle limite appartenant à \mathcal{M} (cf. C. LAMOUREUX [17] pages 55 à 67) ce qui implique que \mathcal{F} a de l'holonomie; on a donc une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bauer, M.: Feuilletages presque réguliers; *C.R. Acad. Sci. Paris* 299 (1984), 287-390.
Feuilletages presque réguliers de codimension 1; *C.R. Acad. Sci. Paris* 299 (1984), 819-822.
- [2] Bauer, M.: Feuilletage singulier défini par une distribution presque régulière; *Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg* (1985).
- [3] Camacho, C., Neto, A.L.: Teoria geometrica das folheações; *I.M.P.A. Rio de Janeiro* (1979).
- [4] Cantwell, J., Conlon, L.: Poincaré-Bendixon theory for leaves of codimension one; *Trans. Amer. Math. Soc.* 265 (1981), 181-209.
- [5] Cerveau, D.: Distributions involutives singulières; *Ann. Inst. Fourier* 29 (1979), 261-294.
- [6] Dazord, P.: Holonomie des feuilletages singuliers; *C.R. Acad. Sci. Paris* 298 (1984), 27-30.
- [7] Dean, D.A.: Singular foliations; *University of Colorado Ph. D. Thesis* (1971).
- [8] Haefliger, A.: Variétés feuilletées; *Ann. Sci. Norm. Pisa* (1962), 367-397.
- [9] Hector, G., Hirsch, U.: Introduction to the geometry of foliations; *Aspects of mathematics, Vieweg* (1981).
- [10] Hirsch, M.W.: Stability of compact leaves of foliations; in *Dynamical systems*, M. Peixoto éd. (1971), 135-153.
- [11] Imanishi, H.: On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy; *J. Math. Kyoto Univ.* (1974), 606-634.
- [12] Lamoureux, C.: Feuilletages de codimension un des variétés compactes et non compactes. *Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg*, (1974).
- [13] Lawson H.B.: The quantitative theory of foliations; *Amer. Math. Soc. Regional Conf. in Math.* 27 (1977).
- [14] Levitt, G.: Feuilletage des surfaces; *Thèse, Paris VII* (1983).
- [15] Mather, J.N.: *Solutions of generic linear Equations; in Dynamical Systems*, M. Peixoto éd. (1970), 185-193.
- [16] Moussu, R.: Sur les feuilletages de codimension 1; *Thèse, Université des Sciences d'Orsay* (1971).
- [17] Nishimori, T.: Ends of leaves of codimension one foliations; *Tohoku Math. J.* 31 (1979), 1-22.
- [18] Sikorski, A.: A stability theorem for foliations with singularities; *Preprint* 298 (1984) *de Institute of Mathematics, Polish Acad. of Sci.*
- [19] Reeb, G.: Sur propriétés topologiques des variétés feuilletées; *Act. Sci. Indust. Hermann, Paris* (1952).

- [20] Roussarie, R.: Modèles locaux de champs et de formes; *Astérisque* 30 (1975).
- [21] Sacksteder, R.: Foliation and pseudogroups; *Amer. J. Math.* 87 (1965), 79-102.
- [22] Schwartz, A.J.: A generalisation of a Poincaré-Bendixon theorem to closed two dimensional manifolds; *Amer. J. Math.* 85 (1963), 453-458.

Madeleine Bauer
Département de Mathématiques
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex
Tél. (33) 88.41.63.00

