TEORIA K DE CATEGORIAS DE COMPLEJOS Y APLICACIONES

por

P. PASCUAL GAINZA

ABSTRACT:

We apply, following Gillet, Thomason and others, Waldhausen's Algebraic K-theory to categories of complexes. This permits a treatment of Higher Algebraic K-theory of schemes in the spirit of Grothendieck (SGA 6) and as a consequence it results the covariance of K-theory of coherent sheaves for proper morphisms. We introduce a bivariant Algebraic K-theory, solving a question of Fulton-MacPherson.

INTRODUCCION

El problema inicial que ha originado esta nota es el estudio de la covariancia de la teoría K de haces coherentes para morfismos propios. Para el grupo $K_0(-)$ esta covariancia es bien conocida, cf. SGA 6, pero en el contexto de la teoría K superior, Quillen [12] solo la pudo probar para morfismos proyectivos.

En la teoría desarrollada por Grothendieck y sus colaboradores en SGA 6 la covariancia del funtor $K_0(-)$ para un morfismos propio, $f\colon X \longrightarrow Y$, es consecuencia del teorema fundamental según el cual si F es un haz coherente sobre X también lo son los haces R^if_*F, $i \geqslant 0$, (EGA III). Concretamente, el teorema fundamental permite derivar f_* en un funtor (triangulado)

$$\mathbb{R}f_*\colon D^b(X)_{coh} \longrightarrow D^b(Y)_{coh}$$

y la covariancia se obtiene mediante la composición

$$K_0(X) \xrightarrow{\sim} K_0(D^b(X)_{coh}) \xrightarrow{\mathbb{R}f_*} K_0(D^b(Y)_{coh}) \xleftarrow{\sim} K_0(Y).$$

Nuestra idea era que este argumento debía poder trasladarse al contexto de la teoría K algebraica superior y resolver así el problema comentado. Desgraciadamente, la teoría K de Quillen no se aplica a categorías derivadas, por lo que la extensión no es inmediata.

En un contexto puramente topológico Waldhausen, [17], ha introducido la teoría K de categorías más generales que las utilizadas por Quillen, (ver § 2), y Gillet demostró que

$$G_i(X) \cong KW_i(C^b(\mathrm{Coh}\ X)),$$

donde $C^b(\mathrm{Coh}\ X)$ denota la categoría de complejos acotados de haces coherentes sobre X, (cf. [5]).

La intención de esta nota es mostrar que, a partir del resultado de Gillet mencionado, la teoría K de Waldhausen permite recuperar las ideas de Grothendieck para la teoría K algebraica superior, § 4, y en particular demostrar la covariancia para morfismos propios siguiendo el esquema indicado para $K_0(-)$, (cf. (4.8)). (El problema estaba resuelto ya en [4], [10], aunque por otros métodos).

Además, este tratamiento de $K_i(X)$ permite definir la teoría K bivariante, § 5, y resolver así un problema planteado por Fulton-McPherson, [3].

En § 1 recordamos la definición de teoría K de Quillen adaptándola de forma que la generalización de Waldhausen, que resumimos en § 2, véase también [8], aparezca como natural. En el apartado § 3 adaptamos las definiciones y resultados de § 2 a las categorías de complejos. Los resultados (3.7), (3.9) y (3.10), que no aparecen en la literatura, son los resultados fundamentales sobre los que se basan las aplicaciones de § 4 y § 5.

Agradezco a V. Navarro Aznar y F. Guillén las conversaciones mantenidas sobre este tema. Fue V. Navarro Aznar quien me sugirió que una demostración como la presentada de la covariancia de los grupos $G_i(X)$ para morfismos propios debía ser posible.

Indice.

§ 1. LA CONSTRUCCION Q DE QUILLEN

(1.1) Recordemos que la teoría K algebraica de Quillen se define en el contexto de las categorías exactas, es decir, categorías aditivas $\underline{\underline{M}}$ que están sumergidas, como subcategorías plenas, en una categoría abeliana $\underline{\underline{A}}$, cerradas por extensiones en $\underline{\underline{A}}$, y que poseen una clase distinguida, $\underline{\underline{E}}$, de sucesiones exactas (en $\underline{\underline{A}}$)

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

Denotaremos por $M' \rightarrowtail M$ (resp. $M \twoheadrightarrow M''$) los morfismos que aparecen como núcleo (resp. cociente) de una sucesión de $\underline{\underline{E}}$, y les llamaremos monomorfismos (resp. epimorfismos) admisibles. La clase $\underline{\underline{E}}$ ha de verificar los axiomas siguientes (cf. [12], § 2):

(ex. 1) Toda sucesión en $\underline{\underline{M}}$ isomorfa a una sucesión de $\underline{\underline{E}}$ está en $\underline{\underline{E}}$.

(ex. 2) Dados objetos M', M'' de $\underline{\underline{M}}$ cualesquiera, la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{(1,0)} M' \oplus M'' \xrightarrow{\pi_2} M'' \longrightarrow 0$$

está en $\underline{\underline{E}}$.

(ex. 3) Para toda sucesión (*) de $\underline{\underline{E}}$, i es un núcleo para j, y j es un conúcleo de i.

(ex. 4) La clase de epimorfismos admisibles (resp. monomorfismos admisibles) es estable por composición y cambio de base (resp. cambio de cobase).

(ex. 5) Si $M \longrightarrow M''$ es un morfismo de $\underline{\underline{M}}$ que posee un núcleo en $\underline{\underline{M}}$ y si existe un morfismo $N \longrightarrow M$ en $\underline{\underline{M}}$ tal que la composición $N \longrightarrow M \longrightarrow M''$ es un epimorfismo admisible, entonces $M \longrightarrow M''$ es un epimorfismo admisible. (Dualmente para monomorfismos admisibles).

(1.2) La definición de los grupos $K_i(\underline{\underline{M}})$, $i \geqslant 0$, de una categoría exacta se basa en una construcción original de Quillen, la construcción Q, que asocia a $\underline{\underline{M}}$ una nueva categoría, $Q\underline{\underline{M}}$. Recordemos cómo se realiza esta construcción: Los objetos de $Q\underline{\underline{M}}$ son los mismos que los de $\underline{\underline{M}}$, y los morfismos de M en M' son las clases de isomorfismo de diagramas

$$M \overset{j}{\twoheadleftarrow} N \overset{i}{\rightarrowtail} M',$$

donde j es un epimorfismo admisible e i un monomorfismo admisible, y donde el diagramma

$$M \overset{j'}{\twoheadleftarrow} N' \overset{i'}{\rightarrowtail} M',$$

es equivalente al anterior si existe un isomorfismo $N \longrightarrow N'$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, "f"] & \\ M & & M' \\ & N' \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos en $Q\underline{\underline{M}}$ se efectúa según el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & N \times_M N' \arrow[dl, two heads, "\pi_1"'] \arrow[dr, tail, "\pi_2"] & & \\ & N \arrow[dl, two heads, "j"'] \arrow[dr, tail, "i"] & & N' \arrow[dl, two heads, "j'"'] \arrow[dr, tail, "i'"] & \\ M & & M' & & M'' \end{tikzcd}$$

Con esta construcción, Quillen ha probado:

(1.3) ***Proposición*** ([12] § 2 Th 1). Sea 0 un cero objeto de $\underline{\underline{M}}$. El grupo fundamental π_1 $(BQ\underline{\underline{M}},0)$ es canónicamente isomorfo al grupo de Grothendieck $K_0(\underline{\underline{M}})$.

(1.4) Recordemos que si $\underline{\underline{C}}$ es una categoría, $B\underline{\underline{C}}$ es el espacio clasificante de $\underline{\underline{C}}$, es decir, el CW-complejo resultante de la realización geométrica del nervio de $\underline{\underline{C}}$, $N\underline{\underline{C}}$, que tiene por n-símplices las composiciones de n morfismos en $\underline{\underline{C}}$

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_n,$$

(cf. [12] § 1).

La proposición (1.3) llevó a Quillen a definir la teoría K de $\underline{\underline{M}}$ según:

(1.5) ***Definición.*** $K(\underline{\underline{M}}) = \Omega BQ\underline{\underline{M}}$

$$K_i(\underline{\underline{M}}) = \pi_i(K(\underline{\underline{M}})) = \pi_{i+1}(BQ\underline{\underline{M}}), \quad i \geqslant 0.$$

Vamos a dedicar el resto de este apartado a indicar la construcción de otro conjunto simplicial asociado a $\underline{\underline{M}}$ y que es homotópicamente equivalente a $NQ\underline{\underline{M}}$, y que por sonsiguiente también calcula la teoría K de $\underline{\underline{M}}$.

(1.6) Empecemos observando que un morfismo de M en M′ en la categoría $Q\underline{\underline{M}}$ puede identificarse a una clase de isomorfismo de filtraciones admisibles de M′ (llamadas 'layers' en [12])

$$N' \rightarrowtail N \rightarrowtail M',$$

y un isomorfismo $\theta : N/N' \cong M$. En efecto, dado un morfismo

$$M \twoheadleftarrow N \rightarrowtail M',$$

basta tomar N' según la sucesión de $\underline{\underline{E}}$

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Así pues, el conjunto de 1-símplices $N_1 Q\underline{\underline{M}}$, que no es otra cosa que el conjunto de morfismos de $Q\underline{\underline{M}}$, se identifica biyecticamente al conjunto de clases de isomorfismo de filtraciones de objetos de $\underline{\underline{M}}$ de longitud dos

$$N_0 \rightarrowtail N_1 \rightarrowtail N_2 .$$

(De hecho, si disponemos de un morfismo en $Q\underline{\underline{M}}$ se tiene el isomorfismo θ mencionado anteriormente, pero la elección o no de cocientes prefijados de la filtración admisible no varia el tipo de homotopía del conjunto simplicial que vamos a definir, cf. [16] p. 131).

Los elementos de $N_2 Q\underline{\underline{M}}$ corresponden a la composición de dos morfismos de $Q\underline{\underline{M}}$; siguiendo el proceso iniciado para $N_1 Q\underline{\underline{M}}$, observemos que estas composiciones dan lugar a filtraciones admisibles de longitud cuatro en $\underline{\underline{M}}$. En efecto, la composición de dos morfismos de $Q\underline{\underline{M}}$

$$M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$$

puede desplegarse, según la definición de $Q\underline{\underline{M}}$, en la forma

$$\begin{tikzcd}
 & & N'' \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, tail] & & \\
 & N \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, tail] & & N' \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, tail] & \\
M & & M' & & M''
\end{tikzcd}$$

donde la pareja (N'',N') define el morfismo composición en términos de filtraciones. Como la composición de epimorfismos admisibles es de nuevo un epimorfismo admisible, podemos definir los objetos $\tilde{N}''$ y $\tilde{N}'$ según las sucesiones de $\underline{\underline{E}}$

$$0 \longrightarrow \tilde{N}'' \longrightarrow N'' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \tilde{N}' \longrightarrow N' \longrightarrow M' \longrightarrow 0.$$

Ahora, una comprobación elemental muestra que se obtiene así una filtración admisible

$$\tilde{N}' \rightarrowtail \tilde{N}'' \rightarrowtail N'' \rightarrowtail N' \rightarrowtail M''.$$

Así pues, la composición $g_\circ f$ da lugar a una filtración de M'' de longitud cuatro. Obsérvese que, recíprocamente, dada una filtración como la anterior se puede expresar el morfismo representado por (N'',N') como composición de dos, pues M' se recupera a través del cociente $N'/\tilde{N}'$, y N se obtiene mediante la propiedad de los morfismos de $Q\underline{\underline{M}}$ que permite descomponerlos como una composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo admisibles (cf. [12] p. 101) y aplicando el axioma (ex. 5) de (1.1).

(1.7) Siguiendo el proceso iniciado en el apartado anterior los elementos de $N_pQ\underline{\underline{M}}$, es decir, las composiciones de p-morfismos en $Q\underline{\underline{M}}$, darán lugar a filtraciones admisibles de longitud 2p de objetos de $\underline{\underline{M}}$.

Denotemos por $s^e_{\cdot}\underline{\underline{M}}$ el conjunto simplicial definido por las filtraciones admisibles de longitud 2p de $\underline{\underline{M}}$. Es decir, los elementos de $s^e_p\underline{\underline{M}}$ son las composiciones de 2p monomorfismos admisibles

$$M_0 \rightarrowtail M_1 \rightarrowtail \ldots \rightarrowtail M_{2p},$$

y los morfismos cara y degeneración son los evidentes. Los comentarios anteriores sugieren el resultado siguiente:

(1.8) ***Proposición*** ([17]). Existe una aplicación natural de conjuntos simpliciales

$$N_{\cdot}Q\underline{\underline{M}} \longrightarrow s^e_{\cdot}\underline{\underline{M}},$$

que es una equivalencia homotópica.

Para la demostración de este resultado véase (1.9) de loc. cit.

(1.9) ***Corolario*** ([17]). Sea $s_{\cdot}\underline{\underline{M}}$ el conjunto simplicial que tiene p-símplices las composiciones de p-1 monomorfismos admisibles

$$M_1 \rightarrowtail M_2 \rightarrowtail \ldots \rightarrowtail M_p,$$

con los morfismos cara y degeneración evidentes. Entonces $N_{\cdot}Q\underline{\underline{M}}$ y $s_{\cdot}\underline{\underline{M}}$ son homotópicamente equivalentes, y por consiguiente

$$K_i(\underline{\underline{M}}) = \pi_{i+1}(s_{\cdot}\underline{\underline{M}}), \quad i \geqslant 0.$$

En efecto: dado un objeto simplicial

$$X_. : \Delta^0 \longrightarrow \underline{\underline{C}},$$

Segal ha definido (según Quillen, cf. [13] App.), la subdivisión de $X_.$

$$X^e_. : \Delta^0 \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

mediante la composición $X^e_. = X_. \, d^0$, donde $d\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ es el funtor que pasa [n] a [2n+1], y con una acción adecuada sobre los morfismos, y ha demostrado (loc. cit. (A.1)) que $|X_.|$ y $|X^e_.|$ son naturalmente homeomorfos. Con estas referencias, basta observar que $s^e_.\underline{\underline{M}} = (s_.\underline{\underline{M}})^e$ y aplicar (1.8).

§ 2. TEORIA K DE CATEGORIAS CON COFIBRACIONES Y EQUIVALENCIAS DEBILES ([17])

Según podemos observar en el corolario (1.9), la teoría K de una categoría exacta $\underline{\underline{M}}$ puede describirse a partir únicamente de los monomorfismos admisibles. Este hecho ha llevado a Waldhausen a definir la teoría K de categorías con un conjunto de morfismos distinguido, el de cofibraciones, generalizado el caso tratado por Quillen. Más generalmente, Waldhausen ha definido la teoría K de categorías con cofibraciones y equivalencias débiles. En este apartado vamos a describir la teoría K de Waldhausen, así como a enunciar los resultados de dicha teoría que serán significativos en apartados posteriores.

(2.1) Sea $\underline{\underline{C}}$ una categoría punteada, es decir, equipada con un objeto inicial-final distinguido $*$. $\underline{\underline{C}}$ es una categoría con cofibraciones si está dotada de una subcategoría, $co\underline{\underline{C}}$, la subcategoría de las cofibraciones (cuyos morfismos notaremos $\rightarrowtail$), que verifica:

(Cof. 1) Todos los isomorfismos son cofibraciones, (y en particular, Ob $co\underline{\underline{C}} = \text{Ob}\,\underline{\underline{C}}$).

(Cof. 2) Todos los objetos de $\underline{\underline{C}}$ son cofibrantes, es decir, dado cualquier A de $\underline{\underline{C}}$, el morfismo $* \longrightarrow A$ es una cofibración.

(Cof. 3) Las cofibraciones admiten cambio de cobase y son estables por esta operación, es decir, dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrowtail & B \\ \downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

existe $C \cup_A B$ y el morfismo $C \to C \cup_A B$ es una cofibración.

(2.2) Observemos que (Cof. 3) permite definir los morfismos 'cociente' de una cofibración (notados $\twoheadrightarrow$) según el cambio de cobase

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ * \arrow[r, tail] & * \cup_A B = B/A. \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{M}}$ es una categoría exacta y $co\underline{\underline{C}}$ es la categoría de monomorfismos admisibles, $\underline{\underline{M}}$ es una categoría con cofibraciones y los morfismos cociente son los epimorfismos admisibles. La mayor riqueza de estructura $\underline{\underline{M}}$ se traduce en que éstos forman una categoría, mientras que, en general la composición de morfismos cociente en una categoría con cofibraciones no será un morfismo cociente.

(2.3) A una categoría con cofibraciones $\underline{\underline{C}}$ vamos a asociarle una categoría simplicial $S.\underline{\underline{C}}$ de tal forma que el conjunto simplicial $s.\underline{\underline{C}}$ definido por $s_n\underline{\underline{C}} = \mathrm{Ob}S_n\underline{\underline{C}}$ sea equivalente al introducido en (1.9) si $\underline{\underline{C}}$ es una categoría exacta. Para ello denotemos por $[n]$ el conjunto ordenado $0<1<\ldots<n$ y $\underline{\underline{\mathrm{Mor}}}[n]$ la categoría que tiene por objetos las parejas (i,j), $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ y un único morfismo $(i,j) \to (i',j')$ cada vez que $i \leqslant i'$, $j \leqslant j'$.

(2.4) ***Definición*** ([17]). Si $\underline{\underline{C}}$ es una categoría con cofibraciones definimos la categoría $S_n\underline{\underline{C}}$ como la categoría formada por los funtores

$$\begin{aligned} A:\ \underline{\underline{\mathrm{Mor}}}[n] &\longrightarrow \underline{\underline{C}} \\ (i,j) &\longrightarrow A_{ij} \end{aligned}$$

que verifican

1) $A_{i,i} = *$.

2) Si $i \leqslant j \leqslant k$, el morfismo $A_{ij} \to A_{ik}$ es una cofibración, y el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & A_{ik} \arrow[d] \\ * = A_{jj} \arrow[r] & A_{jk} \end{tikzcd}$$

es cartesiano.

Notaremos $S.\underline{\underline{C}}$ la categoría simplicial asociada.

(2.5) Observemos que 1) y 2) dan lugar a 'sucesiones exactas'

$$A_{ij} \rightarrowtail A_{ik} \twoheadrightarrow A_{jk}$$

y que, por consiguiente, los objetos de $S_n\underline{\underline{C}}$ se pueden identificar a sucesiones de (n-1)-cofibraciones en $\underline{\underline{C}}$

$$A_{01} \rightarrowtail A_{02} \rightarrowtail \dots \rightarrowtail A_{0n}$$

con cocientes prefijados

$$A_{ij} = A_{0j}/A_{0i},$$

lo que permite relacionar esta construcción con la realizada en (1.9).

(2.6) Dada una categoría $\underline{\underline{C}}$ con cofibraciones, una categoría de equivalencias débiles en $\underline{\underline{C}}$ es una subcategoría $w\underline{\underline{C}}$ de $\underline{\underline{C}}$, cuyos morfismos serán las equivalencias débiles y los notaremos $\xrightarrow{\sim}$, verificando:

(w1) Los isomorfismos de $\underline{\underline{C}}$ son equivalencias débiles.

(w2) Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\wr"] & A \arrow[l, tail] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C \arrow[d, "\wr"] \\ B' & A' \arrow[l, tail] \arrow[r] & C' \end{tikzcd},$$

el morfismo

$$B \cup_A C \longrightarrow B' \cup_{A'} C'$$

es una equivalencia débil.

En algunos casos, de hecho en aquellos que nos interesan, $w\underline{\underline{C}}$ puede verificar además:

(w3) Axioma de saturación: Sean $f,g \in \mathrm{Mor}\underline{\underline{C}}$ tales que existe $g \circ f$. Entonces si dos de los morfismos f,g, $g \circ f$ son de $w\underline{\underline{C}}$ también lo es el tercero.

(w4) Axioma de extensión: Dado un diagrama conmutativo en $\underline{\underline{C}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, "\wr"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & B/A \arrow[d, "\wr"] \\ A' \arrow[r, tail] & B' \arrow[r, two heads] & B'/A' \end{tikzcd}$$

el morfismo $B \longrightarrow B'$ es de $w\underline{\underline{C}}$.

La noción de funtor exacto entre categorías con cofibraciones y equivalencias débiles es la evidente, i.e. aquellos funtores que conservan toda la estructura.

(2.7) Si $\underline{\underline{C}}$ es como en (2.5), se define la categoría simplicial $wS_.\underline{\underline{C}}$ a partir de $S_.\underline{\underline{C}}$ en la forma evidente. Observemos que $wS_1\underline{\underline{C}} = w\underline{\underline{C}}$, pues los objetos de $wS_1\underline{\underline{C}}$ son diagramas de la forma

$$* = A_{00} \rightarrowtail A_{01} \twoheadrightarrow A_{11} = *.$$

(2.8) ***Definición*** ([17]). La teoría K algebraica de una categoría con cofigraciones $\underline{\underline{C}}$ respecto a la categoría de equivalencias débiles $w\underline{\underline{C}}$ se define como el espacio punteado

$$K(\underline{\underline{C}}) := \Omega\, |wS_.\underline{\underline{C}}|$$

y los grupos de teoría K son

$$K_i\,(\underline{\underline{C}}) = \pi_i\,(K(\underline{\underline{C}})).$$

(2.9) La teoría K de las categorías exactas es un caso particular de (2.7), ver (2.2) y (1.9), tomando como $w\underline{\underline{C}}$ los isomorfismos de $\underline{\underline{C}}$ (cf. [17]). Así la definición debida a Waldhausen generalizada la teoría K de categorías exactas definida por Quillen a un contexto más general. En contrapartida, la construcción $wS_.$ no posee todas las buenas propiedades de la construcción Q; sin embargo sigue resultando cierto el teorema de aditividad, [12], [17], lo que permite extender a este contexto la construcción de productos en teoría K, (cf. [5]), o el teorema de cofinalidad (cf. [16]). Enunciemos este resultado: Sea $\underline{\underline{C}}$ una categoría con cofifraciones y equivalencias débiles y denotemos por $E(\underline{\underline{C}})$ la categoría de 'sucesiones exactas' de $\underline{\underline{C}}$ (ver (2.2))

$$A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C.$$

$E(\underline{\underline{C}})$ tiene una estructura natural de categoría con cofibraciones y equivalencias débiles, y se tiene

(2.10) ***Teorema de aditividad*** ([17] 1.4.2). El funtor

$$\begin{array}{ccc} wS_.E(\underline{\underline{C}}) & \longrightarrow & wS_.\underline{\underline{C}} \times wS_.\underline{\underline{C}} \\ (A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C) & \longrightarrow & (A,C) \end{array}$$

induce una equivalencia homotópica

$$K(E(\underline{\underline{C}})) \xrightarrow{\sim} K(\underline{\underline{C}}) \wedge K(\underline{\underline{C}}).$$

Para finalizar este apartado vamos a enunciar los teoremas de fibración y aproximación para $K(\underline{\underline{C}})$. Fijemos pues una categoría $\underline{\underline{C}}$ con cofibraciones y equivalencias débiles.

(2.11) ***Definición.*** Un funtor cilindro sobre $\underline{\underline{C}}$ es un funtor de $\mathrm{Mor}\underline{\underline{C}}$ en la categoría de diagramas en $\underline{\underline{C}}$ que a todo morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ asocia un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f"'] & T(f) \arrow[d, "p"] & B \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, equal] \\ & B & \end{tikzcd}$$

que verifica:

(Cil 1) j_1 y j_2 inducen una cofibración

$$j_1 \vee j_2 : A \vee B \longrightarrow T(f),$$

y el funtor

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Mor}\,\underline{\underline{C}} & \longrightarrow & \mathrm{Cof}(\underline{\underline{C}}) \\ f & \longrightarrow & j_1 \vee j_2 : A \vee B \longrightarrow T(f) \end{array}$$

es exacto.

(Cil. 2) $T(* \longrightarrow A) = A$ y $j_2 = id = p$ para todo objeto A de $\underline{\underline{C}}$.

A $T(f)$ le llamaremos el cilindro de f.

En algunos casos, $T(f)$ verificará también:

(Cil. 3) Axioma cilindro: La proyección $p\colon T(f) \longrightarrow B$ es una equivalencia débil para todo $f\colon A \longrightarrow B$ en $\underline{\underline{C}}$. (Véanse ejemplos en § 3).

(2.12) El teorema de fibración compara la teoría K de $\underline{\underline{C}}$ al considerarla respecto de distintas categorías de equivalencias débiles. Sean $v\underline{\underline{C}} \subset w\underline{\underline{C}}$ dos de estas categorías y denotemos por $\underline{\underline{C}}^w$ la subcategoría plena con cofibraciones de $\underline{\underline{C}}$ formada por los A de $\underline{\underline{C}}$ con $* \longrightarrow A$ en $w\underline{\underline{C}}$ (es decir, los objetos de $\underline{\underline{C}}^w$ son los 'w-acíclicos'), y sean $v\underline{\underline{C}}^w = \underline{\underline{C}}^w \cap v\underline{\underline{C}}$, $w\underline{\underline{C}}^w = \underline{\underline{C}}^w \cap w\underline{\underline{C}}$. El resultado es:

(2.13) ***Teorema de fibración*** ([17] 1.6.4). Supongamos que $\underline{\underline{C}}$ tiene un funtor cilindro y $w\underline{\underline{C}}$ satisface los axiomas de saturación, extensión y cilindro. Entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd} vS.\underline{\underline{C}}^w \arrow[r] \arrow[d] & wS.\underline{\underline{C}}^w (\simeq *) \arrow[d] \\ vS.\underline{\underline{C}} \arrow[r] & wS.\underline{\underline{C}} \end{tikzcd}$$

es hormotópicamente cartesiano, y el término $wS.\underline{\underline{C}}^w$ es contráctil.

Este teorema es consecuencia del teorema de aditividad (2.9). Indiquemos cual es su principio de demostración: Si F: $\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ es un funtor exacto entre categorías con cofibraciones y equivalencias débiles, Waldhausen define la construcción relativa $S.(f)$ según el producto fibrado de categorías (cf. [17] 1.5.4)

$$\begin{tikzcd} S_n(f) \arrow[r] \arrow[d] & (PS.\underline{\underline{B}})_n = S_{n+1}\underline{\underline{B}} \arrow[d] \\ S_n\underline{\underline{A}} \arrow[r] & S_n\underline{\underline{B}} \end{tikzcd}$$

donde $PX.$ es el objeto de caminos de un objeto simplicial $X.$. Recuérdese (cf. [9]), que PX es homotópicamente equivalente a X_0.

Considerando $\underline{\underline{A}}$ como una categoría simplicial en el sentido trivial la inclusión $\underline{\underline{A}} \longrightarrow P(S.\underline{\underline{A}})$ induce una sucesión

$$\underline{\underline{A}} \longrightarrow S.(f) \longrightarrow S.\underline{\underline{B}},$$

que por aplicación del teorema de aditividad se comprueba que induce una fibración (escindida) en homotopía

$$vS.\underline{\underline{A}} \longrightarrow wS.S.(f) \longrightarrow vS.S.\underline{\underline{B}}.$$

(cf. [17] 1.5.5). Ahora basta tomar como $\underline{\underline{A}}$ y $\underline{\underline{B}}$ las categorías convenientes (cf. [17] 1.6.4).

Para enunciar el resultado siguiente es conveniente introducir la noción de funtor con la propiedad de aproximación:

(2.14) ***Definición.*** Sea F: $\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ un funtor exacto entre categorías con cofibraciones y equivalentes débiles. Diremos que F tiene la propiedad de aproximación si se verifican:

(Ap 1) Un morfismo de $\underline{\underline{A}}$ es una equivalencia débil en $\underline{\underline{A}}$ si y sólo si lo es su imagen en $\underline{\underline{B}}$.

(Ap 2) Dado un objeto A de $\underline{\underline{A}}$ arbitrario y un morfismo

$$f\colon F(A) \longrightarrow B$$

en $\underline{\underline{B}}$, existe una cofibración $A \rightarrowtail A'$ en $\underline{\underline{A}}$ y una equivalencia débil $f'\colon F(A') \xrightarrow{\sim} B$ en $\underline{\underline{B}}$ de forma que el triángulo

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[d, tail] \arrow[dr, "f"] & \\
F(A') \arrow[r, "f'", "\sim"'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(2.15) ***Teorema de aproximación*** ([17] 1.6.7). Sean $\underline{\underline{A}}$ y $\underline{\underline{B}}$ categorías con cofibraciones y equivalencias débiles. Supongamos que $w\underline{\underline{A}}$ y $w\underline{\underline{B}}$ satisfacen el axioma de saturación y que $\underline{\underline{A}}$ posee un funtor cilindro que satisface el axioma del cilindro. Si $F\colon \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ es un funtor exacto que satisface la propiedad de aproximación, entonces F induce equivalencias homotópicas

$$w\underline{\underline{A}} \xrightarrow{\ \sim\ } w\underline{\underline{B}}$$

$$wS.\underline{\underline{A}} \xrightarrow{\ \sim\ } wS.\underline{\underline{B}}.$$

La demostración de este resultado es una árdua aplicación del teorema A de Quillen (cf. [12]).

§ 3. Categorias de complejos

(3.1) Sea $\underline{\underline{M}}$ es una categoría exacta y denotemos por $C^b(\underline{\underline{M}})$ la categoría de complejos acotados de $\underline{\underline{M}}$, (con diferencial de grado +1). $C^b(\underline{\underline{M}})$ tiene una estructura natural de categoría exacta: una sucesión de complejos

$$M^{\cdot} \longrightarrow N^{\cdot} \longrightarrow P^{\cdot}$$

es exacta si lo es en cada grado, i.e. si

$$M^k \longrightarrow N^k \longrightarrow P^k$$

es exacta para todo k. La teoría K de $C^b(\underline{\underline{M}})$ con esta estructura de categoría exacta tiene poco interés pues se verifica

(3.2) ***Proposición*** ([5]). Con las notaciones anteriores

$$BQC^b(\underline{\underline{M}}) \simeq V_N\, BQ\underline{\underline{M}}$$

(cf. (1.4)).

Demostración. El funtor identidad, I, de $C^b(\underline{\underline{M}})$ admite una filtración por funtores exactos

$$\ldots \rightarrowtail F^n \rightarrowtail \ldots \rightarrowtail F^2 \rightarrowtail F^1 \rightarrowtail F^0 = I$$

definidos por

$$F^j(M^\cdot)^k = \begin{cases} M^k & k > j \\ 0 & k \leqslant j\,. \end{cases}$$

Si definimos los funtores $P^j\colon C^b(\underline{\underline{M}}) \longrightarrow C^b(\underline{\underline{M}})$ mediante

$$P^j(M^\cdot)^k = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ M^k & k = j\ , \end{cases}$$

se tendrán sucesiones exactas de funtores

$$0 \longrightarrow F^{j+1} \longrightarrow F^j \longrightarrow P^j \longrightarrow 0$$

para todo $j \geqslant 0$, y por consiguiente, el teorema de aditividad permite concluir que

$$K_*(F^j) = K_*(P^j) + K_*(F^{j+1})$$

(cf. [12] § 3), y como sólo un número finito de F^j son no nulos sobre cada complejo acotado de $\underline{\underline{M}}$, se deduce la igualdad

$$K_*(I) = \sum_{j \geqslant 0} K_*(P^j).$$

Ahora bien, el funtor $\sum_{j \geq 0} P^j$ sustituye todas las diferenciales de un complejo $M^{\cdot}$ por cero, y por consiguiente, factoriza a través de la categoría de objetos graduados acotados de $\underline{\underline{M}}$, $Gr^b\underline{\underline{M}}$, es decir, la categoría formada por los objetos de la forma $\bigoplus_{j \geq 0} M^j$ con M^j de $\underline{\underline{M}}$ y $M^j = 0$ si $j >> 0$; se tiene pues el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C^b(\underline{\underline{M}}) \arrow[rr, "\Sigma P^j"] \arrow[dr, "P"'] & & C^b(\underline{\underline{M}}) \\ & Gr^b\underline{\underline{M}} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

donde P es el funtor de olvido (de las diferenciales) y G el de inclusión. Es evidente que $PG = Id_{Gr^b\underline{\underline{M}}}$, mientras que el razonamiento anterior induce una equivalencia homotópica (en $BQC^b(\underline{\underline{M}})$)

$$GP = \sum_{j \geq 0} P^j \sim I.$$

Así pues, P y G son equivalencias homotópicas y por consiguiente

$$BQC^b(\underline{\underline{M}}) \xrightarrow{\sim} BQGr^b\underline{\underline{M}};$$

pero dada la conmutatividad de BQ con límites directos, se tiene

$$BQGr^b\underline{\underline{M}} \simeq V_N \, BQ\underline{\underline{M}}\,,$$

lo que acaba la demostración.

(3.3) Consideremos ahora $C^b(\underline{\underline{M}})$ como una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles, definiendo las cofibraciones de $C^b(\underline{\underline{M}})$ como los monomorfismos admisibles y las equivalencias débiles, $wC^b(\underline{\underline{M}})$, como la categoría de cuasi-isomorfismos (en $C^b(\underline{\underline{A}})$). Se tiene:

(3.4) ***Lema.*** Con las nociones anteriores, $C^b(\underline{\underline{M}})$ es una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles que verifica los axiomas de saturación y extensión (cf. (2.5)) y que posee un funtor cilindro para el que se verifica el axioma del cilindro (cf. (2.10)).

En efecto: los axiomas (Cof 1)-(Cof 3) son inmediatos, pues $C^b(\underline{\underline{M}})$ es una categoría exacta, al igual que (w1) y (w2); el axioma de saturación (w3) y el de extensión (w4) se deducen del lema de los cinco en $C^b(\underline{\underline{A}})$. En cuanto al funtor cilindro, dado un morfismo de complejos $f\colon M^{\cdot} \longrightarrow N^{\cdot}$ definimos $T(f)$ por:

$$T(f)^n = M^{n+1} \oplus M^n \oplus N^n \quad .$$

con la diferencial

$$d_{T(f)} = \begin{pmatrix} -d_M & 0 & 0 \\ -id_M & d_M & 0 \\ f & 0 & d_N \end{pmatrix}$$

y el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^{\cdot} \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f"'] & T(f) \arrow[d, "p"] & N^{\cdot} \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, equal] \\ & N^{\cdot} & \end{tikzcd}$$

según: p es el morfismo de componentes (0, f, id)

j_1 tiene componentes (0, id, 0)
j_2 es la inclusión de $N^{\cdot}$ en el tercer factor de $T(f)$.

Es inmediato comprobar que con estas definiciones el diagrama anterior es un diagrama conmutativo en $C^b(\underline{\underline{M}})$ y que se verifican (cil 1)-(cil 2) de (2.10). Para comprobar el axioma del cilindro (cil 3) se ha de ver que $p\colon T(f) \longrightarrow N$. es un cuasi-isomorfismo. De hecho se comprueba facilmente que $j_2\, p$ es homótopo a la identidad de $T(f)$.

(3.5) Así pues, a $C^b(\underline{\underline{M}})$ se le puede aplicar la construcción de Waldhausen y obtener un espacio punteado $KW(C^b(\underline{\underline{M}}))$, la teoría K de $C^b(\underline{\underline{M}})$. (La notación $KW(C^b(\underline{\underline{M}}))$ es conveniente para distinguir esta construcción de la teoría K de Quillen de $C^b(\underline{\underline{M}})$, (3.2), que denotaremos por KQ( )).

(3.6) ***Teorema*** ([5] 6.1). Existe una equivalencia débil

$$KW(C^b(\underline{\underline{M}})) \xrightarrow{\sim} K(\underline{\underline{M}})$$

y por consiguiente, se tienen isomorfismos

$$KW_i(C^b(\underline{\underline{M}})) \cong KQ_i(\underline{\underline{M}}), \qquad i \geqslant 0.$$

Demostración. Denotemos por $wC^b(\underline{\underline{M}})$ la categoría de cuasi-isomorfismos de $C^b(\underline{\underline{M}})$ y por $iC^b(\underline{\underline{M}})$ la de isomorfismos. El teorema de fibración (2.12) aplicado a la inclusión $iC^b(\underline{\underline{M}}) \subset wC^b(\underline{\underline{M}})$ proporciona una fibración homotópica

$$iS.C^b(\underline{\underline{M}})^w \longrightarrow iS.C^b(\underline{\underline{M}}) \longrightarrow wS.C^b(\underline{\underline{M}}).$$

Por (2.8) se tienen las equivalencias débiles

$$iS.C^b(\underline{\underline{M}})^w \simeq BQC^b(\underline{\underline{M}})^w$$

y

$$iS.C^b(\underline{\underline{M}}) \simeq BQC^b(\underline{\underline{M}}),$$

y por lo tanto, bastará comprobar que la cofibra homotópica de la aplicación

$$BQC^b(\underline{\underline{M}})^w \longrightarrow BQC^b(\underline{\underline{M}})$$

inducida por la inclusión $C^b(\underline{\underline{M}})^w \longrightarrow C^b(\underline{\underline{M}})$ es $BQ\underline{\underline{M}}$. Para ello vamos a identificar esta aplicación en la categoría de homotopía estable Sho (Es conocido, cf. [5], que el teorema de aditividad de Quillen permite considerar $BQ\underline{\underline{M}}$ como el término 0-ésimo de un CW-Ω-espectro, y supondremos pues que estamos trabajando en Sho, con la ventaja de que Sho es una categoría aditiva). Por (3.2), $BQC^b(\underline{\underline{M}}) \cong V_N\, BQ\underline{\underline{M}}$. La identificación de $BQC^b(\underline{\underline{M}})^w$ la proporciona el siguiente resultado:

(3.6.1) ***Lema.*** $BQC^b(\underline{\underline{M}})^w \simeq V_N\, BQ\underline{\underline{M}}$.

En efecto, como en la proposición (3.2), el funtor identidad I^w: $C^b(\underline{\underline{M}})^w \longrightarrow C^b(\underline{\underline{M}})^w$ admite una cofiltración por subfuntores exactos

$$I^w \twoheadrightarrow L^0 \twoheadrightarrow L^1 \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow L^n \twoheadrightarrow \dots$$

definidos por

$$L^k(M^\cdot)^\ell = \begin{cases} M^\ell & \text{si} \quad \ell > k \\ B^k & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{si} \quad \ell < k \end{cases}$$

donde $B^k = \mathrm{Im}(M^k \longrightarrow M^{k+1})$. Obsérvese que en general B^k no será de $\underline{\underline{M}}$, aunque podemos añadir a $\underline{\underline{M}}$ estos objetos sin cambiar la teoría K de la categoría, como se deduce del teorema de resolución de Quillen, [12] § 4.

Si definimos ahora los funtores $B^k : C^b(\underline{\underline{M}})^w \longrightarrow C^b(\underline{\underline{M}})^w$ por

$$B^k(M^{\cdot})^{\ell} = \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \ell+1 \\ B^k & k = \ell, \ell+1 \ , \end{cases}$$

con la diferencial $B^k \longrightarrow B^k$ la identidad, se tendrán sucesiones exactas de funtores

$$0 \longrightarrow B^k \longrightarrow L^k \longrightarrow L^{k+1} \longrightarrow 0$$

y por consiguiente

$$K_*(I^w) = \sum_{j \geq 0} K_*(B^j) \, .$$

Por otra parte, el funtor $\sum_{j \geq 0} B^j$ factoriza a través de $Gr^b(\underline{\underline{M}})$ según

$$\begin{tikzcd} C^b(\underline{\underline{M}})^w \arrow[rr, "\Sigma B^j"] \arrow[dr, "H"'] & & C^b(\underline{\underline{M}})^w \\ & Gr^b(\underline{\underline{M}}) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

con H y S definidos por

$$H(M^{\cdot}) = \bigoplus_{j \geq 0} B^j(M^{\cdot})$$

y

$$S(M^{\cdot})^j = M^j \oplus M^{j+1} \ ,$$

lo que permite concluir, como en (3.2), que H y S son equivalencias débiles, a nivel BQ, y por lo tanto

$$K(C^b(\underline{\underline{M}})^w) \xrightarrow{\sim} K(Gr^b(\underline{\underline{M}})) \simeq V_N K(\underline{\underline{M}}) \ .$$

Volvamos ahora a la demostración de (3.6). Las equivalencias establecidas en (3.2) y (3.6.1), permiten identificar el morfismo de inclusión en Sho según el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
BQC^b(\underline{\underline{M}})^w \arrow[rr] \arrow[d, "\wr"', "H"] & & BQC^b(\underline{\underline{M}}) \arrow[d, "\wr"', "P"] \\
BQGr^b(\underline{\underline{M}}) \arrow[rr] \arrow[d, "\wr"'] & & BQGr^b(\underline{\underline{M}}) \arrow[d, "\wr"'] \\
V_N\, BQ\underline{\underline{M}} \arrow[rr, "J"] & & V_N\, BQ\underline{\underline{M}}
\end{tikzcd}\ ,$$

resultando pues

$$J(x_0, x_1, \ldots) = (x_0, x_0 + x_1, x_1 + x_2, \ldots).$$

La característica de Euler de un complejo, $\chi(M^{\cdot}) = \Sigma\ (-1)^j M^j$, define un funtor exacto

$$\chi : C^b(\underline{\underline{M}}) \longrightarrow \underline{\underline{M}}$$

y por consiguiente una aplicación

$$\chi : V_N\, BQ\underline{\underline{M}} \longrightarrow BQ\underline{\underline{M}}\,.$$

Es evidente que $\chi \circ J$ es el morfismo nulo en Sho, pero además χ se escinde por el funtor de inclusión de $\underline{\underline{M}}$ en $C^b(\underline{\underline{M}})$ que identifica $\underline{\underline{M}}$ con los complejos cuyo único grado no nulo es el 0-ésimo, lo que permite definir

$$C \vee J : BQ\underline{\underline{M}} \vee (V_N\, BQ\underline{\underline{M}}) \longrightarrow V_N\, BQ\underline{\underline{M}}\ ,$$

que es una equivalencia débil, pues la matriz $(\delta_{ij} + \delta_{i,\, j+1})$ es inversible sobre Z. En definitiva, χ es la proyección de una suma directa sobre el primer factor, lo que acaba la demostración.

(3.7) *Corolario.* Sea $\underline{\underline{A}}$ una categoría abeliana y $\underline{\underline{B}}$ una subcategoría de Serre de $\underline{\underline{A}}$. Denotemos por $C^b(\underline{\underline{A}})_{\underline{\underline{B}}}$ la categoría de complejos acotados en $\underline{\underline{A}}$ cuya cohomología es de $\underline{\underline{B}}$, y considerémosla como categoría con cofibraciones y equivalencias débiles según la estructura inducida por $C^b(\underline{\underline{A}})$. En estas condiciones, existe una equivalencia homotópica

$$KW(C^b(\underline{\underline{A}})_{\underline{\underline{B}}}) \simeq KQ(\underline{\underline{B}}).$$

En efecto: $C^b(\underline{\underline{B}})$ es una subcategoría de Serre de $C^b(\underline{\underline{A}})$, por lo que por el teorema de localización de Quillen, cf. [12] § 5, y (3.6), existe una fibración homotópica

$$KW(C^b(\underline{\underline{B}})) \longrightarrow KW(C^b(\underline{\underline{A}})) \longrightarrow KW(C^b(\underline{\underline{A}}) / C^b(\underline{\underline{B}}))\,.$$

Por otro lado, consideremos en $C^b(\underline{\underline{A}})$ la categoría $vC^b(\underline{\underline{A}})$ de equivalencias débiles siguiente: f: $A^{\cdot} \longrightarrow B^{\cdot}$ es una v-equivalencia si su imagen en $C^b(\underline{\underline{A}})$ / $C^b(\underline{\underline{B}})$ es un cuasi-isomorfismo, es decir, si el núcleo y conúcleo de f tienen cohomología en $\underline{\underline{B}}$. Si $wC^b(\underline{\underline{A}})$ es la categoría de cuasi-isomorfismos, se tiene la inclusión $wC^b(\underline{\underline{A}}) \subset vC^b(\underline{\underline{A}})$, y como en (3.4) se comprueba que $vC^b(\underline{\underline{A}})$ verifica las hipótesis del teorema de fibración (2.12), por lo que dicho teorema proporciona una fibración en homotopía

$$KW(wC^b(\underline{\underline{A}})^v) \longrightarrow KW(C^b(\underline{\underline{A}})) \longrightarrow KW(vC^b(\underline{\underline{A}})).$$

Obsérvese que, por la propia definición,

$$vC^b(\underline{\underline{A}}) = w(C^b(\underline{\underline{A}}) / C^b(\underline{\underline{B}})),$$

por lo que, comparando con la fibración en homotopía anterior, se deduce una equivalencia homotópica

$$KQ(\underline{\underline{B}}) \simeq KW(C^b(\underline{\underline{B}})) \simeq KW(wC^b(\underline{\underline{A}})^v)\,.$$

Finalmente, basta observar que por la definición de las v-equivalencias se tiene

$$C^b(\underline{\underline{A}})^v = C^b(\underline{\underline{A}})_{\underline{\underline{B}}}\,.$$

(3.8) Vamos a dar ahora una aplicación del teorema de aproximación (2.14). Para ello notemos $C^{+,b}(\underline{\underline{A}})$ la categoría de complejos de $\underline{\underline{A}}$ acotados inferiormente y a cohomología acotada. (i.e. el primer índice, +, denota una condición sobre los complejos, y el segundo, b, sobre su cohomología).

(3.9) ***Proposición.*** Para toda categoría exacta $\underline{\underline{M}}$, el funtor de inclusión $C^b(\underline{\underline{M}}) \longrightarrow C^{+,b}(\underline{\underline{M}})$ induce una equivalencia homotópica

$$KW(C^b(\underline{\underline{M}})) \simeq KW(C^{+,b}(\underline{\underline{M}}))$$

y por consiguiente, isomorfismos, cf. (3.6),

$$KQ_i(\underline{\underline{M}}) \cong KW_i(C^{+,b}(\underline{\underline{M}})) \qquad i \geqslant 0.$$

Con las notaciones de (3.7) y (3.8), existe una equivalencia homotópica

$$KQ(\underline{\underline{B}}) \simeq KW(C^{+,b}(\underline{\underline{M}})_{\underline{\underline{B}}}) .$$

Demostración. Es evidente que basta demostrar la primera aserción y para ello vamos a aplicar el teorema de aproximación. Las hipótesis referentes a las categorías $C^b(\underline{\underline{M}})$ y $C^{+,b}(\underline{\underline{M}})$ de (2.14) se cumplen por (3.4). Hemos de comprobar pues que el funtor de inclusión verifica la propiedad de aproximación (2.13). La propiedad (Ap. 1) es evidente, estudiemos (Ap. 2):

Sea pues $M^\cdot$ un complejo acotado y $N^\cdot$ de $C^{+,b}(\underline{\underline{M}})$, y consideremos un morfismo $f: M^\cdot \longrightarrow N^\cdot$. Si $H^p(N^\cdot) = 0$ para $p > n$ y $H^n(N^\cdot) \neq 0$, consideremos la truncación de $N^\cdot$ definida por

$$(\tau_n N^\cdot) = \begin{cases} 0 & p > n \\ \ker\, d_n & p = n \\ N^p & p < n \end{cases}$$

(La posible no existencia de ker d en $\underline{\underline{M}}$ se resuelve como en (3.6.1)). El morfismo $f: M^\cdot \longrightarrow N^\cdot$ factorizará en la forma

$$\begin{tikzcd} M^\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N^\cdot \\ \tau_n N^\cdot \arrow[ur, "f'"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

siendo $\tau_n N^\cdot$ acotado y cuasi-isomorfo a $N^\cdot$. Así, se verificará (Ap. 2) si substituimos $\tau_n N^\cdot$ por $T(g)$, cf. (3.4).

(3.10) ***Proposición.*** Sea $\underline{\underline{A}}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y denotemos por $\underline{\underline{I}}$ la categoría exacta formada por estos objetos. La inclusión $\underline{\underline{I}} \longrightarrow \underline{\underline{A}}$ induce una equivalente homotópica

$$KW(C^{+,b}(\underline{\underline{I}})_{\underline{\underline{B}}}) \cong KW(C^{+,b}(\underline{\underline{A}})_{\underline{\underline{B}}}) \cong KQ(\underline{\underline{B}}) ,$$

donde $\underline{\underline{B}}$ es una subcategoría de Serre, arbitraria, de $\underline{\underline{A}}$.

La demostración vuelve a ser una aplicación sencilla del teorema de aproximación (2.14), trabajando esta vez con la categoría dual $\underline{\underline{A}}^0$, por lo que la dejamos para el lector.

(3.11) ***Observaciones:*** 1) Hinich-Schechtman, [6], han dado otra construcción equivalente de la teoría K de la categoría de complejos módulo cuai-isomorfismos. Concretamente, dada una categoría exacta $\underline{\underline{M}}$, definen una pseudo-categoría simplicial, loc. cit., $U.(\underline{\underline{M}})$ que en grado n está formada por las sucesiones de n-complejos de $\underline{\underline{M}}$

$$M_1 \xrightarrow{f_{12}} M_2 \xrightarrow{f_{23}} M_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n$$

y donde los morfismos cara están definidos por

$$d_i(M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n) = M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \hat{M}_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow \quad i \geqslant 1$$

$$d_0(M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n) = M_{12} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{1n},$$

donde M_{1i} es el cono del morfismo

$$f_{1i} = f_{12} \circ f_{23} \circ \cdots \circ f_{1-i,i} : M_1 \longrightarrow M_i$$

Estos morfismos cara verifican todas las compatibilidades de una categoría simplicial salvo la identidad $d_0 d_0 = d_0 d_1$ que se reemplaza aquí por un morfismo

$$d_0 d_0 \longrightarrow d_0 d_1$$

inducido por el axioma del octaedro. Aunque $U.(\underline{\underline{M}})$ no es una categoría simplicial, Hinich-Schechtman definen la realización geométrica de $U.(\underline{\underline{M}})$ (y más generalmente, de las pseudo-categorías simpliciales) y establecen el siguiente resultado, análogo a (3.6),

Proposición ([6] (3.4)). Existe una equivalencia homotópica

$$KQ(\underline{\underline{M}}) \simeq |U.(\underline{\underline{M}})| .$$

2) Como hemos comentado en la introducción, la teoría K de Quillen no se adapta a las categorías derivadas, y en cierto modo este apartado construye una teoría K de tales categorías. Si $\underline{\underline{D}}$ es una categoría triangulada, Freyd [2] le asocia una categoría abeliana y un funtor de inclusión

$$F : \underline{\underline{D}} \longrightarrow \underline{\underline{AD}}$$

que sumerge $\underline{\underline{D}}$ como la categoría de inyectivos-proyectivos de $\underline{\underline{AD}}$ y que verifica una propiedad universal respecto a funtores de $\underline{\underline{D}}$ a valores en categorías abelianas. Esta construcción y su universalidad sugieren definir la teoría K de $\underline{\underline{D}}$ según

$$K_i(\underline{\underline{D}}) := KQ_i(\underline{\underline{AD}}) .$$

Si $\underline{\underline{D}}$ es la categoría derivada de una categoría abeliana $\underline{\underline{B}}$, la composición

$$C^b(\underline{\underline{B}}) \longrightarrow D^b(\underline{\underline{B}}) \longrightarrow \underline{\underline{A}}D^b(\underline{\underline{B}})$$

define un funtor

$$C^b(\underline{\underline{B}}) \longrightarrow \underline{\underline{A}}\, D^b(\underline{\underline{B}})$$

y es natural preguntarse si este funtor es una equivalencia a nivel de teoría K, lo que permitirá dar otra versión de los resultados de este apartado. Este es un problema abierto; obsérvese que el teorema de aproximación (2.15) no se aplica en esta situación.

§ 4. TEORIA K DE LOS TOPOS ANILLADOS

(4.1) En este apartado notaremos por (X,A) un topos anillado, donde el anillo A no es necesariamente conmutativo, y usaremos las notaciones siguientes (cf. SGA 6, exp. I, II):

Pcoh $({}_AX)$: categoría de complejos pseudo-coherentes y con cohomología acotada de A-módulos por la izquierda. (Recuérdese que un complejo de A-módulos es pseudo-coherente si localmente es cuasi-isomorfo a un complejo cuyas componentes son localmente libres y de tipo finito).

Perf $({}_AX)$: categoría de complejos perfectos de A-módulos (es decir, complejos localmente cuasi-isomorfos a un complejo acotado de componentes libres y de tipo finito).

$\underline{\underline{P}}({}_AX)$: categoría de A-módulos localmente factores directos de módulos libres de tipo finito.

Coh $({}_AX)$: categoría de A-módulos coherentes.

(4.2) Las categorías *Pcoh*$({}_AX)$ y *Perf*$({}_AX)$ tienen estructura de categorías con cofibraciones y equivalencias débiles definidas de forma análoga a (3.3), por ser categorías de complejos, mientras que las categorías *Coh*$({}_AX)$ y $\underline{\underline{P}}({}_AX)$ son categorías exactas. (En $\underline{\underline{P}}({}_A X)$ los monomorfismos admisibles son, como es habitual, los monomorfismos escindidos, que se utilizan también para la definición de las cofibraciones de $Perf({}_A X)$).

(4.3) ***Definición.*** Con las notaciones anteriores definimos

$$\begin{aligned} KW({}_A X) &= KW(Perf\,({}_A X)) \\ GW({}_A X) &= KW(Pcoh\,({}_A X)) \\ KQ({}_A X) &= KQ(\underline{\underline{P}}\,({}_A X)) \\ GQ({}_A X) &= KQ(Coh\,({}_A X)) \end{aligned}$$

y denotaremos por $KW_i({}_A X)$, $GW_i({}_A X)$, etc. los grupos de homotopía correspondientes.

(4.4) ***Observaciones:*** 1) En adelante suprimiremos el anillo A de las notaciones anteriores, si no hay peligro de confusión.

2) Los grupos $KW_*(X)$ y $GW_*(X)$ son los grupos de teoría K superior análogos a $K^0(X)$ y $K_0(X)$ de SGA 6, mientras que $KQ_*(X)$ y $GQ_*(X)$ corresponden a los grupos $K^0(X)_{naif}$ y $K_0(X)_{naif}$ definidos por Grothendieck.

En los topos que provienen de situaciones geométricas (de la geometría algebraica o analítica), los grupos $GW_*(X)$ y $GQ_*(X)$ coinciden, pues se tiene:

(4.5) ***Proposición.*** Si A es coherente, existe una equivalencia homotópica

$$GW(X) \simeq GQ(X) \;,$$

y por consiguiente,

$$GW_i(X) \cong GQ_i(X), \; i \geqslant 0.$$

Demostración. Al ser A cohetente, está definido el funtor de inclusión $Coh(X) \longrightarrow Pcoh(X)$, que induce un morfismo

$$GQ(X) \longrightarrow GW(X).$$

La coherencia de A permite identificar a la categoría $Pcoh(X)$ con la categoría de complejos de A-módulos acotados superiormente y con cohomología acotada coherente (cf. SGA 6, I, (3.5)) y por lo tanto, con las notaciones de § 3,

$$GW(X) = KW(C^{-,b}(X)_{Coh(X)}).$$

Así pues, aplicando (3.9) se acaba la demostración.

(4.6) ***Ejemplos.*** La situación de la proposición anterior se da en los siguientes ejemplos:

(4.6.1) (X,A) es el topos asociado a la topología de Zariski de un esquema neothereiano y separado X con $A = \underline{O}_X$.

(4.6.2) (X,A) es el topos asociado a un espacio analítico complejo X con la topología usual (teorema de coherencia de Oka).

(4.6.3) Sea S un esquema noetheriano separado y G un S-esquema en grupos. Si X es un S-esquema noetheriano y de tipo finito sobre el que actúa G, podemos considerar el topos clasificante $B_G(X)$ de los haces de $\underline{O}_X$-módulos dotados de una G-acción; como G actúa sobre X, el topos está anillado por $\underline{O}_X$.

(4.6.4) Sea k un cuerpo de característica cero y X un k-esquema de tipo finito, separado y liso. Tomamos $A = D_X$ el anillo de operadores diferenciales sobre X, y consideramos el topos formado por los A-módulos por la izquierda (cf. [7]). Obsérvese que el teorema fundamental de los anillos filtrados ([12] § 6) induce una equivalencia homotópica

$$KQ({}_{D_X}X) \longrightarrow KQ({}_{\underline{O}_X}X).$$

Este ejemplo admite también una variante analítica, aunque en este caso se deben considerar unicamente los D_X-módulos dotados de una buena filtración, [7].

KQ(X) y KW(X) son homotópicamente equivalentes unicamente bajo hipótesis de existencia de resoluciones globales:

(4.7) ***Proposición.*** Si (X,A) es un topos anillado tal que el funtor natural de inclusión

$$C^b(\underline{P}(X)) \longrightarrow \mathit{Perf}(X)$$

verifica la propiedad de aproximación (2.14), entonces existe una equivalencia homotópica natural

$$KQ(X) \xrightarrow{\sim} KW(X) ,$$

y por consiguiente

$$KQ_i(X) \cong KW_i(X), \quad i \geqslant 0 .$$

Demostración. Consideremos la composición de funtores

$$\underline{\underline{P}}(X) \longrightarrow C^b(\underline{\underline{P}}(X)) \longrightarrow \mathit{Perf}(X) .$$

El primero induce una equivalencia homotópica en teoría K por (3.9), mientras que el segundo induce también una equivalencia homotópica según el teorema de aproximación (2.15), de donde se sigue el resultado.

(4.8) ***Observaciones:*** 1) Los complejos de $C^b(\underline{\underline{P}}(X))$ suelen llamarse complejos estrictamente perfectos.

2) Observemos que la inclusión

$$C^b(\underline{\underline{P}}(X)) \longrightarrow \mathit{Perf}(X)$$

verifica trivialmente (Ap. 1) de (2.14), y que pedir que verifique (A.2) es exigir que todo complejo perfecto $E^{\cdot}$ de X sea cuasi-isomorfo (globalmente) a un complejo estrictamente perfecto, es decir, reencontramos la propiedad de existencia de resoluciones globales de SGA 6, exp. II.

(4.9) ***Ejemplos.*** De la observación anterior y los resultados de SGA 6, se deduce que (4.7) es de aplicación en los ejemplos siguientes:

(4.9.1) (X,A) es el topos anillado correspondiente a la topología de Zariski de un esquema noetheriano divisorial (cf. [1] y SGA 6, exp. II, (2.2.9)). En particular si X es un esquema cuasi-proyectivo sobre un cuerpo base k, o un esquema noetheriano regular sobre k.

(4.9.2) (X,A) es el topos anillado asociado a un espacio analítico de Stein (cf SGA 6, exp. II (2.4.5)).

El funtor de inclusión $\mathit{Perf}(X) \longrightarrow \mathit{Pcoh}(X)$ induce una aplicación

$$KW(X) \longrightarrow GW(X) ,$$

y como en el caso de los grupos K_0 se tiene (cf. SGA, 6, I, 5.8.1):

(4.10) ***Proposición.*** Si (X,A) es un topos anillado cuyos objeto final es cuasi-compacto y tal que para todo punto x de X, todos los A_X-módulos son de tor-dimensión finita, entonces el funtor de inclusión *Perf*(X) $\longrightarrow$ *Pcoh*(X) induce una equivalencia

$$KW(X) \xrightarrow{\sim} GW(X) .$$

(En particular, la equivalencia anterior es válida si $(X,\underline{O}_X)$ es un esquema noetheriano regular).

Cuando se verifica el axioma de finitud (cf. SGA, 6), la teoría G de Waldhausen de X es covariante. Así por ejemplo, se tiene:

(4.11) ***Proposición.*** Sea f: X $\longrightarrow$ Y un morfismo propio entre esquemas noetherianos y separados, f induce una aplicación (en la categoría de homotopía)

$$f_*: GW(X) \longrightarrow GW(Y).$$

Demostración. Según SGA 6, (ver demostración (4.5)), $GW(X) \simeq$ $\simeq KW(C^{-,b}(X)_{Coh(X)})$ y como $C^{-,b}(X)$ tiene suficientes inyectivos, de (3.10) se deduce la equivalencia

$$GW(X) \simeq KW(C^{-,b}(\mathit{Iny}(X))_{Coh(X)}) .$$

Pero f_* restringido a $C(\mathit{Iny}(X))$ es exacto, y por tanto induce una aplicación

$$GW(X) \cong KW(C^{-,b}(\mathit{Iny}(X)_{Coh(X)}) \longrightarrow KW(C^{-,b}(Y))$$

y al ser f propio, el teorema de finitud, cf. EGA III, asegura que la imagen está en $KW(C^{-,b}(Y)_{Coh(Y)}) \cong GW(Y)$.

Teniendo en cuenta (4.5) y (4.6), y los teoremas de finitud correspondientes, esta proposición admite los corolarios y variaciones siguientes:

(4.12) ***Corolario.*** La teoría K de Quillen de la categoría de haces coherentes sobre esquemas noetherianos separados es covariante para morfismos propios.

(4.13) ***Corolario.*** En la situación de (4.6.3), la teoría K equivariante es covariante para G-morfismos propios.

(4.14) ***Corolario.*** Con las notaciones de (4.6.4), la teoría K de haces coherentes de D_X-módulos es covariante para morfismos propios (cf. [7], (5.6.3) y (5.7.1) para el teorema de finitud correspondiente).

(4.15) ***Observaciones.*** 1) Con la definición de teoría K de categorías exactas de Quillen el corolario (4.12) no es inmediato. De hecho, Quillen solo pudo probar la covariancia de (4.8) para morfismos proyectivos, cf. [12] § 7. Las demostraciones de que se disponía de (4.8), (cf. [4], [10] y [11]), tenían algunos inconvenientes importantes, por ejemplo, no se adaptaban al caso equivariante (4.13). La demostración que hemos presentado generaliza el esquema indicado por Thomason en [14] para estudiar dicho caso.

2) Los funtores

$$\otimes_A : \underline{\underline{P}}(X) \times \underline{\underline{P}}(X) \longrightarrow \underline{\underline{P}}(X)$$

y

$$\otimes_A : \underline{\underline{P}}(X) \times Coh(X) \longrightarrow Coh(X)$$

son biexactos e inducen una estructura de anillo en $KQ_*(X)$ y de $KQ_*(X)$-módulo en $GQ_*(X)$, cf. [16]. Análogamente, el producto tensorial sobre A induce una estructura de anillo en $KW_*(X)$ y de $KW_*(X)$-módulo en $GW_*(X)$, al menos en presencia de resoluciones globales. En la formulación de categorías derivadas, este hecho se debe a que $\otimes_A$ se deriva en funtores triangulados

$$\otimes_A : D(X)_{perf} \times D(X)_{perf} \longrightarrow D(X)_{perf}$$

y

$$\otimes_A : D(X)_{perf} \times D(X)_{coh} \longrightarrow D(X)_{coh}$$

(cf. SGA 6, exp. I, (4.19) y (5.8.4)). Desde la óptica adoptada en este artículo, la existencia del producto

$$KW_*(X) \otimes KW_*(X) \longrightarrow KW_*(X)$$

se razona en la forma siguiente: como suponemos que X admite resoluciones globales, bastará considerar los funtores (cf. (4.7))

$$\otimes_A : C^b(\underline{\underline{P}}(X)) \otimes C^b(\underline{\underline{P}}(X)) \longrightarrow C^b(\underline{\underline{P}}(X))$$

y

$$\otimes_A : C^b(\underline{\underline{P}}(X)) \otimes Pcoh(X) \longrightarrow Pcoh(X)$$

que son exactos.

Con estos preliminares, se puede completar la proposición (4.11) añadiendo que f_* es un morfismo de $KW_*(Y)$-módulos. Este hecho no es más que el reflejo de la fórmula de proyección

$$\mathbb{R}f_* (f^*E \otimes F) = E \otimes \mathbb{R}f_*F$$

en nuestra situación.

§ 5. TEORIA K BIVARIANTE

(5.1) En este apartado fijaremos un anillo base noetheriano k. Todos los esquemas serán k-esquemas cuasi-proyectivos (y por tanto divisoriales, cf. (4.8)).

Recordemos la siguiente definición (cf. SGA 6, exp. III, 4.1 y III, 4.4):

(5.2) ***Definición.*** Dado un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$, un complejo $A^{\cdot}$ de $\underline{O}_X$-módulos se dice que es f-perfecto si para alguna (y de hecho para cualquier) factorización de f por una inmersión cerrada i y un morfismo liso p

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P} \arrow[dl, "p"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

el complejo $i_*A^{\cdot}$ es perfecto.

(5.3) Dado que el esquema $\mathbb{P}$ de (5.2) es divisorial, la definición anterior significa que $i_*A^{\cdot}$ es cuasi-isomorfo a un complejo estrictamente perfecto, cf. (4.7), es decir a un complejo acotado de haces localmente libres de $\mathbb{P}$.

(5.4) Si denotamos por *Perf*(f) la categoría de haces f-perfectos, la podemos considerar como una categoría con cofibraciones y equivalencias débiles definiendo las primeras como los monomorfismos escindidos y w *Perf*(f) como los cuasi-isomorfismos, y por consiguiente podemos definir:

(5.5) ***Definición.*** El espacio de teoría K bivariante de un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ es

$$KW(f) = KW(\mathit{Perf}(f)) .$$

(5.6) ***Ejemplos.*** 1. si f es un morfismo liso, $KW(f) \cong KW(X)$ pues podemos considerar la factorización $f = id_X \circ f$, y por consiguiente

$$KW(f) \cong KQ(X)$$

según (4.9.1) y (5.3). En particular, $KW(id_X) = KQ(X)$. Más generalmente, si g es un morfismo liso $KW(g \circ f) \cong KW(f)$.

2. Si f es el morfismo estructural, $X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$, un complejo f-perfecto sobre X es simplemente un complejo pseudocoherente sobre X, pues si $i\colon X \longrightarrow \mathbb{P}$ es una immersión cerrada en un k-esquema liso el funtor i_* permite identificar,

por ser i propio, los complejos pseudocoherentes de X con los complejos pseudocoherentes de $\mathbb{P}$ con soporte en X, y al ser $\mathbb{P}$ un esquema k-liso, éstos son cuasiisomorfos a los complejos perfectos con soporte en X (comparar con (4.10)). Así pues

$$KW(f) \cong KW(Pcoh(X))$$

y por aplicación de (4.5) resulta, finalmente

$$KW(f) \cong GQ(X) \ .$$

De esta forma, los grupos $KQ_i(X)$ y $GQ_i(X)$ de Quillen aparecen como la cohomología y homología asociadas a la teoría bivariante KW(f), (cf. [3] (2.3)).

3. Si f: $X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada, los complejos f perfectos son aquellos complejos de X, $F^{\cdot}$, tales que $f_*F^{\cdot}$ es perfecto, y por consiguiente se identifican a los complejos perfectos de Y cuyo soporte está en X. De esta forma KW(f) se identifica con el espacio K(Y on X) introducido y estudiado por Thomason en [15], para obtener propiedades de escisión en la teoría K de haces localmente libres.

De la definición de KW(f) y estas observaciones, se deduce el siguiente resultado:

(5.7) ***Proposición.*** Sea $f = p \circ i$ una factorización de un morfismo f: $X \longrightarrow Y$ con p un morfismo liso. La categoría de complejos f-perfectos es equivalente a la categoría de complejos i-perfectos y por consiguiente existe una equivalencia homotópica

$$KW(f) \cong KW(i).$$

En particular, si i es una inmersión cerrada como en (5.2), *Perf*(f) es equivalente a la categoría de complejos perfectos de $\mathbb{P}$ cuyo soporte está en X, y por consiguiente

$$KW(f) \cong K(\mathbb{P} \text{ on } X) \ .$$

(5.8) ***Observación.*** Según (5.7) obsérvese que el espacio K($\mathbb{P}$ on X) no depende de la factorización escogia, y por consiguiente, si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}' \\ Y & \arrow[ul, phantom, ""] \end{tikzcd}$$

es otra factorización de f como (5.2), resulta la propiedad de escisión

$$K(\mathbb{P} \text{ on } X) \simeq K(\mathbb{P}' \text{ on } X) .$$

Es importante señalar que la equivalencia anterior no es cierta si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}'$ son k-esquemas arbitrarios que admitan X como subesquema cerrado, pues los grupos $KQ_i(X)$ no verifican la propiedad de escrisión. En nuestro caso, esta equivalencia puede interpretarse como el resultado análogo al teorema de pureza para esquemas regulares de Quillen, cf. [5] (2.14).

(5.9) ***Teorema.*** $\pi_*(KW(f))$ define una teoría bivariante en la categoría de k-esquemas cuasi-proyectivos.

Demostración. Escribamos simplemente $K_*(f) = \pi_*(KW(f))$. Hemos de precisar el resultado que pretendemos demostrar definiendo los productos, las imágenes directas e inversas, y comprobar los axiomas correspondientes (cf. [3], § 2). Usaremos libremente las notaciones de loc. cit.

Productos: Dada la composición

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] & & Z \end{tikzcd}$$

hemos de definir el producto

$$K_*(f) \times K_*(g) \longrightarrow K_*(g \circ f) .$$

Consideremos, en primer lugar, el caso en el que g es una inmersión cerrada. Según (5.8) y (5.3), la categoría de complejos g perfectos es equivalente a la categoría de los complejos estrictamente perfectos sobre Z con soporte en Y, que notaremos $C^p_Y(\underline{P}(Z))$. El producto tensorial define un funtor biexacto

$$\begin{aligned} Perf(f) \times C^b(\underline{P}(Z)) &\longrightarrow C^b(\underline{O}_X\text{-mod}) \\ (A^\cdot, B^\cdot) &\longrightarrow A^\cdot \otimes (gf)^*B \end{aligned}$$

de forma que si el soporte de $B^\cdot$ es Y, la imagen está en *Perf*($g \circ f$), según SGA 6, exp. III, 4.5. Así pues, el funtor biexacto

$$\otimes : Perf(f) \times C^p_Y(\underline{P}(Z)) \longrightarrow Perf(g \circ f)$$

induce una aplicación en la categoría de homotopía

$$KW(f) \wedge KW(g) \longrightarrow KW(g \circ f) \ ,$$

que al tomar homotopía induce el producto buscado.

Pasemos ahora al caso general. Tras factorizar g en la forma

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "g"] & & P \arrow[dl, "p"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] & & Z &
\end{tikzcd}$$

siendo i una inmersión cerrada y p un morfismo liso, y teniendo en cuenta (5.8), podemos suponer que g es una inmersión cerrada, y aplicar el razonamiento anterior. Para que esto tenga sentido hemos de comprobar que el producto así definido no depende de la factorización $p \circ i$ de g escogida.

Sea $p' \circ i'$ otra factorización de g por una inmersión cerrada y un morfismo liso. Tras sustituir $\mathbb{P}'$ por $\mathbb{P}' \times_Z \mathbb{P}$, y teniendo en cuenta que los morfismos lisos son estables por cambio de base, podemos suponer que existe un morfismo liso $\pi: \mathbb{P}' \longrightarrow \mathbb{P}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}' \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "p'"] & \\
Y \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbb{P} \arrow[dl, "p"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & K(f) \times K(i) \arrow[r, "\times"] & K(i \circ f) \cong K(g \circ f) \\
K(f) \times K(g) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \\
 & K(f) \times K(i) \arrow[uu, "\pi^*"] \arrow[r] & K(i' \circ f) \cong K(g \circ f) \arrow[uu, "\pi^*"] \arrow[uu, equal, shift left=8]
\end{tikzcd}$$

donde las equivalencias $K(i \circ f)$ y $K(i' \circ f)$ con $K(g \circ f)$ resultan de ser p y p′, respectivamente, lisos cf. (5.7), lo que demuestra que el producto está bien definido.

Imágnes directas: Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

con f un morfismo propio, vamos a definir

$$f_*: K_*(g \circ f) \longrightarrow K_*(g) .$$

(Es decir, en la terminología de [3], los morfismos propios son las 'confined maps' de la teoría K bivariante).

Como la categoría de $\underline{O}_X$-módulos tiene suficientes inyectivos, bastará definir un funtor exacto

$$Perf(\underline{\underline{I}}) \longrightarrow Perf(g)$$

donde $\underline{\underline{I}}$ denota la categoría de inyectivos, y aplicar (3.10). Ahora bien, si $I^{\cdot}$ es un complejo inyectivo gf perfecto, $f_*I^{\cdot}$ es g-perfecto, SGA 6, exp. III, 4.8, con lo que se define el morfismo f_* buscado.

Imágenes inversas: En la teminología de [3], los cuadrados independientes serán los cuadrados cartesianos Tor-independientes, i.e. cuadrados cartesianos del tipo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

con $Tor_i^Y(\underline{O}_X, \underline{O}_{Y'}) = 0$ para $i > 0$. Para estos cuadrados hemos de definir la imagen inversa

$$g^*: K_*(f) \longrightarrow K_*(f') ,$$

lo que se puede realizar de forma análoga a los productos:

En efecto, factorizando f en la forma como en (5.2)

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "i'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dr, "i"] \arrow[dd] & \\
& \mathbb{P}' \arrow[rr] \arrow[dl, "p'"] & & \mathbb{P} \arrow[dl, "p"] \\
Y' \arrow[rr, "g"'] & & Y &
\end{tikzcd}$$

y definiendo $\mathbb{P}' = Y' \times_Y \mathbb{P}$, resulta la factorización de f′ en una inmersión cerrada, i′, y un morfismo liso, p′, y por (5.6.1) será suficiente definir g* en el caso en que f y f′ son inmersiones cerradas (Obsérvese que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[d, "i"] \\
\mathbb{P}' \arrow[r] & \mathbb{P}
\end{tikzcd}$$

es cartesiano y tor-independiente).

Pero en este caso, utilizando una vez más (5.8), es suficiente definir un funtor exacto

$$C^b_{X'}(\underline{\underline{P}}(Y')) \longrightarrow C^b_X(\underline{\underline{P}}(Y)) \ ,$$

que se define mediante g* (comparar con SGA 6, exp. III, 4.7.2).

Las compatibilidades que han de verificar los productos, imágenes directas e inversas, cf. [3], § 2.2, se hallan todas ellas desarrolladas en SGA 6, exp. III, en el lenguaje de las categorías derivadas, y su trasposición a este contexto es inmediata. Así por ejemplo, para la fórmula de proyección hemos de comprobar que dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] & \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] & Z
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado es independiente y g es propio, se verifica

$$g'_*(g^*\alpha \,.\, \beta) = \alpha g_*(\beta)$$

para cualquiera $\alpha \in K_*(f)$ y $\beta \in K_*(hg)$, lo que es consecuencia de las definiciones adoptadas y la fórmula de proyección usual (compararlo con (4.15.2).

REFERENCIAS

EGA III. Grothendieck, A. Dieudonné, F. Éléments de Géométrie Algébrique III. Publ. Math. I.H.E.S. n. 11, (1961).

SGA 6. Grothendieck, A. et alt. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Springer LN 225 (1971).

[1] Borelli, M. Some results on ampleness and divisorial schemes. Pacific J. Math. 23 (1967), 217-227.

[2] Freyd, P. Stable homotopy. Proc. of the Conference on Categorical Algebra. La Jolla, 1965. Springer V. (1966), 121-172.

[3] Fulton, W., McPherson, R. Categorical framework for the study of singular spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 243 (1981).

[4] Gillet, H. Comparison of K-theory spectral sequences, with application. Springer LN 854 (1981), 141-167.

[5] Gillet, H. Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory. Adv. in Math. 40 (1981), 203-289.

[6] Hinich, V., Schechtman, V. Geometry of a category of complexes and algebraic K-theory. Duke Math. Journal (1985), 399-430.

[7] Laumon, G. Sur la catégorie dérivée des D-modules filtrés. Springer LN 1016 (1983), 151-237.

[8] Loday, J.l. Homotopie des espaces de concordances (d'après Waldhausen). Sêm. Bourbaki 516. Springer LN 710 (1979), 187-205.

[9] May, J.P. Simplicial objects in Algebraic Topology. Van Nostrand (1967).

[10] Pascual-Gainza, P. Contribució a la teoria d'espais algebraics. Tesi doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona (1983).

[11] Pascual-Gainza, P. On the simple object associated to a diagram in a closed model category. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 100 (1986), 459-474.

[12] Quillen, D. Algebraic K-theory I. Springer LN 341 (1973), 85-147.

[13] Segal, G. Configuration spaces and iterated loop spaces. Inv. Math. 21 (1973), 213-221.

[14] Thomason, R. Lefschetz-Riemann-Roch and Coherent Trace formula. Inv. Math. 85 (1986), 515-544.

[15] Thomason, R. Carta a Weibel, Mayo 1986.

[16] Waldhausen, F. Algebraic K-theory of generalized free products. Ann. of Math. 108 (1978), 135-256.

[17] Waldhausen, F. Algebraic K-theory of spaces. Springer LN 1126 (1986), 318-419.

Departament de Matemàtiques
Escola Tècnica Superior d'Enginyers
Industrials de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya
08028 - Barcelona
Spain