COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LAS DIFERENCIALES DE UNA FUNCION

por

P. GUIJARRO CARRANZA

SUMMARY:

In this article we do an analysis of asymptotic behavior of differentials of a holomorphic function and of bounded type, defined in an open and convex subset of a Banach space, and that has asymptotic expansion in the origine through a family of sets. The space of this functions is endowed of a topology of Frechet space.

En lo que sigue E y F representarán dos espacios de Banach complejos y U un subconjunto abierto y convexo de E con el origen en su frontera. Si L es un subconjunto no vacío de U, denotaremos por $\tilde{L}$ al estrellado de L respecto del origen, ésto es

$$\tilde{L} = \{ \lambda z / \lambda \epsilon (0,1], \ z \epsilon L \},$$

por las propiedades de U, $\tilde{L} \subset U$ y $0 \epsilon \bar{\tilde{L}}$.

Para cada m = 0,1,2. . . , representaremos por $P(^m E,F)$ el espacio de los polinomios m-homogéneos y continuos de E en F, y llamaremos topología natural de este espacio a la dada por la norma [1]. Y consideraremos como espacio básico en todo este trabajo el espacio $\mathscr{H}_b$ (U,F) de todas las funciones holomorfas de U en F que son de tipo acotado en U. En $\mathscr{H}_b$ (U,F) la topología natural será la de la convergencia uniforme sobre los conjuntos U-acotados τ_b.

DEFINICIONES 0: I) Diremos que una función $f \epsilon \mathscr{H}_b$ (U,F) posee desarrollo asintótico en el origen a través de los conjuntos U-acotados, si existe una serie entera $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ de E en F en z = 0, con $\hat{A}_j \epsilon P(^j E,F)$ j = 0,1,2. . . , tal que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\bar{L}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)}{\|z\|^n} = 0, \tag{1}$$

para todo conjunto U-acotado L y todo $n \epsilon Z$, $n \geqslant 0$.

II) Representaremos por $\mathcal{U}$ la familia de subconjuntos de U

$$\mathcal{U} = \{ \bar{L} / \text{ L es abierto, convexo y U-acotado} \}$$

y denotaremos por $\mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)$ el espacio vectorial de todos los elementos de $\mathscr{H}_b(U,F)$ que admiten desarrollo asintótico en el origen a través de los conjuntos U-acotados. Y escribiremos

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$$

si $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ es la única serie entera de E en F en $z = 0$ que verifica (1).

III) Diremos que una sucesión $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{U}$ es una $\mathcal{U}$-sucesión si

1º) $H_p \subset H_{p+1}$, $p = 1,2\ldots$, y $\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p = U$.

2º) Para cada $p = 1,2\ldots$, existe un número real $\beta_p \epsilon (0,1)$ tal que

$$\bar{B}(z, \beta_p \|z\|) \subset H_{p+1}, \text{ si } z \epsilon H_p.$$

3º) Si $H \epsilon \mathcal{U}$, entonces existe un $p \epsilon N$ tal que $H \subset H_p$.

4º) Si $H_p = \bar{L}_p$ con L_p abierto, convexo y U-acotado, $p = 1,2\ldots$, entonces para cada conjunto U-acotado X, existe un $p \epsilon N$ tal que $X \subset L_p$.

De la definición de desarrollo asintótico y del concepto de $\mathcal{U}$-sucesión, es inmediato que si $f \epsilon \mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)$ entonces $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, si y sólamente si, se verifica (1) para cada elemento de una $\mathcal{U}$-sucesión cualquiera y cada $n \epsilon Z$, $n \geqslant 0$.

ESTUDIO DE LAS DIFERENCIALES DE LOS ELEMENTOS DE $\mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)$

PROPOSICION 1: Si $f \epsilon \mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)$ y $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, entonces

$$df \epsilon \mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U, \mathcal{L}_s(E,F))$$

y

$$df(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} d\hat{A}_{j+1}(z).$$

Demostración: Por ser f un elemento de $\mathscr{H}_b(U,F)$

$$df \epsilon\ \mathscr{H}_b(U, L_s(E,F))$$

[1]. Para probar que $df(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} d\hat{A}_{j+1}(z)$ demostraremos

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \epsilon H_p}} \frac{df(a) - \sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)}{\| a \|^n} = 0, \quad p = 1,2\ldots, \quad n = 0,1,2\ldots,$$

donde $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una $\mathcal{U}$-sucesión cualquiera que a partir de ahora fijamos. Sea entonces β_p un número real de (0,1) verificando

$$\overline{B}(z, \beta_p \| z \|) \subset H_{p+1}, \text{ si } z \epsilon H_p.$$

Como $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, dado $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta' > 0$ tal que

$$\frac{\| f(z) - \sum_{j=0}^{n+1} \hat{A}_j(z) \|}{\| z \|^{n+1}} \leqslant \epsilon, \; z \epsilon H_{p+1} \cap \mathring{B}(0,\delta'), \tag{1}$$

Pongamos $\delta = \dfrac{\delta'}{1 + \beta_p}$ y sea $a \epsilon H_p \cap \mathring{B}(0,\delta)$. Para cada número complejo λ con $|\lambda| \leqslant \beta_p \| a \|$ y para cada $x \epsilon E$ con $\| x \| \leqslant 1$ se verifica

$$\| a + \lambda x - a \| = |\lambda| \cdot \| x \| \leqslant \beta_p \| a \|,$$

y

$$\| a + \lambda x \| \leqslant \| a \| + |\lambda| \cdot \| x \| \leqslant \| a \| (1 + \beta_p) < \delta (1 + \beta_p) = \delta'$$

por tanto

$$a + \lambda x \epsilon \overline{B}(a, \beta_b \| a \|) \cap \mathring{B}(o,\delta') \subset H_{p+1} \cap \mathring{B}(0,\delta)$$

y aplicando (1)

$$\frac{\| f(a + \lambda x) - \sum_{j=0}^{n+1} \hat{A}_{j+1} (a + \lambda x) \|}{\| a + \lambda x \|^{n+1}} \leqslant \epsilon.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la fórmula integral de Cauchy ([1])

$$df(a)(x) - \sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)\,x = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\beta_p \|a\|}\left(\frac{f(a+\lambda x)}{\lambda^2} - \frac{\sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)x}{\lambda}\right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\beta_p \|a\|}\frac{1}{\lambda^2}\,(f(a+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)(\lambda x))\, d\lambda$$

y como por el desarrollo de Taylor de $\hat{A}_{j+1}\epsilon P({}^{j+1}E,F)$ en $z = a$

$$d\hat{A}_{j+1}(a)(\lambda x) = \hat{A}_{j+1}(a+\lambda x) - A_{j+1}a^{j+1} - \sum_{k=2}^{j+1}\binom{j+1}{k}A_{j+1}a^{j+1-k}(\lambda x)^k,$$

entonces

$$\sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)(\lambda x) = \sum_{j=0}^{n}\hat{A}_{j+1}(a+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n}\hat{A}_{j+1}(a) -$$

$$-\lambda^2 \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=2}^{j+1}\binom{j+1}{k}\lambda^{k-2}A_{j+1}a^{j+1-k}x^k\right),$$

y por tanto

$$df(a)x - \sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\beta_p \|a\|} g(\lambda)\, d\lambda \quad ,$$

donde g es la aplicación de C en F definida por

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\,(f(a+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n+1}\hat{A}_j(a+\lambda x)),$$

(los restantes términos son nulos). Y puesto que

$$\|g(\lambda)\| = \frac{1}{|\lambda|^2}\,\frac{\|f(a+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n+1}\hat{A}_j(a+\lambda x)\|}{\|a+\lambda x\|^{n+1}}\,\|a+\lambda x\|^{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|^2}\,\epsilon\,\|a+\lambda x\|^{n+1},$$

si $|\lambda| = \beta_p \|a\|$ se tiene

$$\|g(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\beta_p^2 \|a\|^2} \epsilon \|a\|^{n+1} (1+\beta_p)^{n+1},$$

de donde resulta

$$\Big\| \int_{|\lambda| = \beta_p \|a\|} g(\lambda)\, d\lambda \Big\| \leqslant \frac{2\pi\epsilon}{\beta_p} \|a\|^n (1+\beta_p)^{n+1}$$

y en consecuencia si $a \epsilon H_p \cap \mathring{B}(0,\delta)$

$$\frac{\| df(a)x - \sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)x \|}{\|a\|^n} \leqslant \epsilon \frac{(1+\beta_p)^{n+1}}{\beta_p}$$

para todo $x \epsilon E$ con $\|x\| \leqslant 1$, deduciéndose

$$\frac{\| df(a) - \sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a) \|}{\|a\|^n} \leqslant \epsilon \frac{(1+\beta_p)^{n+1}}{\beta_p}$$

y por tanto

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \epsilon H_p}} \frac{df(a) - \sum_{j=0}^{n} d\hat{A}_{j+1}(a)}{\|a\|^n} = 0$$

COROLARIO 2: Si $f \epsilon \mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ y $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, entonces

$$d^m f \epsilon \mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U, L_s(^m E, F))$$

y

$$d^m f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} d^m \hat{A}_{j+m}(z),$$

para todo $m \epsilon Z$, $m \geqslant 0$.

PROPOSICION 3: Sea $f \epsilon \mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$. Entonces para todo $n \epsilon Z$ $n \geqslant 0$ y para todo $H \epsilon \mathfrak{U}$

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a\in H}} \hat{d}^n f(a) = n!\hat{A}_n$$

para la topología natural de $P(^nE,F)$.

Demostración: Nos basta probar que si $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una $\mathcal{U}$-sucesión,

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a\in H_p}} \hat{d}f(a) = n!\hat{A}_n, \quad n = 0,1 \ldots, \; p = 1,2\ldots .$$

Para n = 0 es inmediato ya que

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a\in H_p}} f(a) - \hat{A}_o = 0, \quad p = 1,2\ldots .$$

Sea $n \geqslant 1$ fijemos el conjunto H_p. Existe un número real $\beta_p > 0$ tal que

$$\overline{B}(z, \beta_p \|z\|) \subset H_{p+1}, \quad z\epsilon H_p.$$

Por una parte como $f\epsilon\ \mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\epsilon H_{p+1}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)}{\|z\|^n} = 0$$

por tanto fijado $\epsilon > 0$, existe un número real $\delta' > 0$ tal que

$$\frac{\|f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)\|}{\|z\|^n} \leqslant \epsilon, \quad z\epsilon H_{p+1} \cap \mathring{B}(0,\delta')$$

Sean $\delta = \dfrac{\delta'}{1+\beta_p}$ y $a\epsilon H_p \cap \mathring{B}(0,\delta)$. Si λ es un número complejo con $|\lambda| \leqslant \beta_p \|a\|$ y $x\epsilon E$ con $\|x\| \leqslant 1$, entonces

$$a + \lambda x\epsilon\overline{B}(a,\beta_p \|a\|) \cap \mathring{B}(0,\delta') \subset H_{p+1} \cap \mathring{B}(0,\delta')$$

y por tanto

$$\frac{\| f(a+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j (a+\lambda x) \|}{\| a+\lambda x \|^n} \leqslant \epsilon \qquad (1).$$

Por otra parte, aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{n!}\, \hat{d}^n f(a)(x) - \hat{A}_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \beta_p \|a\|} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (f(a+\lambda x) - \lambda^n \hat{A}_n(x))\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \beta_p \|a\|} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (f(a+\lambda x) - \hat{A}_n(\lambda x))\, d\lambda,$$

y como por la fórmula de Taylor de $\hat{A}_n \epsilon P({}^nE,F)$ en $z = a$ en el punto $a + \lambda x$

$$\hat{A}_n(\lambda x) = \hat{A}_n(a+\lambda x) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_n a^{n-k} (\lambda x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k (a+\lambda x) - \sum_{k=0}^{n-1} \hat{A}_k (a+\lambda x) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\lambda)$$

donde $P_k(\lambda) = \lambda^k \binom{n}{k} A_n a^{n-k} x^k = \lambda_k b_k$ con $b_k \epsilon F$, teniendo en cuenta que $P_k(\lambda)$ y $A_k(a + \lambda x)$ son polinomios de C en F de grado $k < n - 1$ resulta

$$\frac{1}{n!}\, \hat{d}^n f(a)(x) - \hat{A}_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \beta_p \|a\|} \frac{1}{\lambda^{n+1}} (f(a+\lambda x) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k(a+\lambda x))\, d\lambda.$$

Finalmente, si $|\lambda| = \beta_p \|a\|$ en virtud de (1) se obtiene

$$\| \frac{1}{\lambda^{n+1}} (f(a+\lambda x) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k(a+\lambda x)) \| =$$

$$= \frac{\| f(a+\lambda x) - \sum_{k=0}^{n} \hat{A}_k(a+\lambda x) \|}{(\beta_p \|a\|)^{n+1} \|a+\lambda x\|^n} \|a+\lambda x\|^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\beta_p \|a\|)^{n+1}} \epsilon (1+\beta_p)^n \|a\|^n,$$

y por tanto

$$\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(a)(x) - \hat{A}_n(x) \| < \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon(1+\beta_p)^n}{\beta_p^{n+1} \|a\|} 2\pi\beta_p \|a\| = \epsilon\left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p}\right)^n$$

para todo $a \epsilon H_p \cap \mathring{B}(0,\delta)$ y para todo $x \epsilon E$ con $\|x\| \leqslant 1$, de donde resulta

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \epsilon H_p}} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(a) = \hat{A}_n .$$

El recíproco nos lo da la siguiente proposición:

PROPOSICION 4: Si f es una función holomorfa de U en F de tipo acotado en U y tal que para cada $n \epsilon Z$, $n \geqslant 0$ y cada $H \epsilon \mathcal{U}$ existe el límite

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \epsilon H}} \hat{d}^n f(a)$$

cuando se considera en $P(^n E,F)$ su topología natural, entonces

$$f \epsilon \mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F).$$

Demostración: Como el espacio $P(^n E,F)$ es de Banach, y para cada $H_1, H_2 \epsilon \mathcal{U}$ también $H_1 \cup H_2 \epsilon \mathcal{U}$, existe un polinomio $\hat{A}_n \epsilon P(^n E,F)$ tal que

$$\frac{1}{n!} \lim_{\substack{a \to 0 \\ a \epsilon H}} \hat{d}^n f(a) = \hat{A}_n$$

para todo $H \epsilon \mathcal{U}$ y todo $n \epsilon Z$, $n \geqslant 0$. Veamos que

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z).$$

En efecto, por las hipótesis de la proposición si $n \epsilon Z$, $n \geqslant 0$ y $H \epsilon \mathcal{U}$ existen dos números reales $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que

$$\| \hat{d}^{n+1} f(a) \| \leqslant M_n, \quad a \epsilon H \cap \mathring{B}(0,\delta).$$

Tomemos $z \epsilon H \cap \mathring{B}(a,\delta)$ y a en el segmento $(0,z)$; como el segmento $[a,z]$ está contenido en $H \cap \mathring{B}(0,\delta)$, por la fórmula de Taylor

$$\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) \| \leqslant M_n \frac{\| z - a \|^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{1}$$

y como para $j = 0,1,2. \dots,$

$$\| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) - \hat{A}_j(z) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) - \hat{A}_j(z-a) \| + \| \hat{A}_j(z-a) - \hat{A}_j(z) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a) - \hat{A}_j \| \cdot \| z - a \|^j + \| \hat{A}_j(z-a) - \hat{A}_j(z) \| \tag{2}$$

de (1) y (2) se obtiene

$$\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) \| + \sum_{j=0}^{n} \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) - \hat{A}_j(z) \| \leqslant$$

$$\leqslant M_n \frac{\| z - a \|^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{j=0}^{n} \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a) - \hat{A}_j \| \cdot \| z - a \|^j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \| \hat{A}_j(z-a) - \hat{A}_j(z) \|$$

y tomando límites cuando a tiende hacia 0 y $a \epsilon (0,z)$

$$\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) \| \leqslant M_n \frac{\| z \|^{n+1}}{(n+1)!},$$

y por tanto

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \epsilon H}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)}{\| z \|^n} = 0 .$$

OBSERVACION 5: De las proposiciones 3 y 4 podemos deducir que el espacio $\mathscr{H}_{u.b}(U,F)$ de todas las funciones holomorfas y de tipo acotado en U que admiten desarrollo asintótico en el origen a través de los conjuntos U-acotados coincide con el espacio de todas las funciones $f \in \mathscr{H}_b(U,F)$ para las cuales existen los límites

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a \in H}} \hat{d}^m f(a) \qquad m = 0,1\ldots, \quad H \in \mathfrak{U},$$

cuando en $P(^m E,F)$ se considera su topología natural.

SISTEMAS DE COTAS EN $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$

DEFINICION 6: Sea f un elemento de $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ tal que $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$. Llamaremos transformada de orden n de la función f, $n = 0,1,2\ldots$, a la función

$$f^{[0]}(z) = f(z), \quad f^{[n]}(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z), \quad n = 1, 2\ldots,$$

y diremos que una sucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales positivos es un sistema de cotas de la función f en un subconjunto V de U si

$$\frac{\| f^{[n]}(z) \|}{\| z \|^n} \leqslant m_n, \quad z \in V, \quad n = 0,1,2\ldots .$$

PROPOSICION 7: Sean $f \in \mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ una $\mathfrak{U}$-sucesión. Si en cada H_p la función admite el sistema de cotas $\{m_n^{(p)}\}_{n=0}^{\infty}$ y si $\beta_p \in (0,1)$ es un número real que verifica

$$\overline{B}(z, \beta_p \| z \|) \subset H_{p+1}, \quad z \in H_p,$$

entonces df admite en H_p el sistema de cotas $\{m_n^{(p,1)}\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$m_n^{(p,1)} = m_{n+1}^{(p+1)} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p}\right)^{n+1} .$$

Demostración: Por la proposición 1 sabemos que $df \in \mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U, L_s(E,F))$, y

$$df(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} d\hat{A}_{j+1}(z).$$

Fijemos el conjunto H_p y sea $x \epsilon E$ con $\|x\| \leqslant 1$, entonces para cada $\lambda \epsilon C$ con $|\lambda| \leqslant \beta_p \|z\|$ se tiene

$$z + \lambda x \epsilon \bar{B}(z, \beta_p \|z\|) \subset H_{p+1} \subset U,$$

y aplicando la fórmula integral de Cauchy resulta

$$df(z)(x) - \sum_{j=0}^{n-1} d\hat{A}_j(z)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \beta_p \|z\|} \frac{1}{\lambda^2} (f(z + \lambda x) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z + \lambda x))\, d\lambda.$$

pero si $|\lambda| = \beta_p \|z\|$, entonces

$$\frac{1}{|\lambda|^2} \|f(z + \lambda x) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z + \lambda x)\| =$$

$$= \frac{\|f(z + \lambda x) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z + \lambda x)\|}{|\lambda|^2 \,.\, \|z + \lambda x\|^n} \|z + \lambda x\|^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\beta_p^2 \|z\|^2} m_n^{(p+1)} \|z\|^n (1 + \beta_p)^n,$$

y por tanto

$$\|df(z)(x) - \sum_{j=0}^{n-1} d\hat{A}_j(z)(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\beta_p^2 \|z\|^2} m_n^{(p-1)} \|z\|^n (1 + \beta_p)^n 2\pi\beta_p \|z\| =$$

$$= \frac{1}{\beta_p} m_n^{(p+1)} \|z\|^{n-1} (1 + \beta_p)^n, \quad n = 1,2\ldots,$$

resultando así que

$$\|df^{[0]}(z)(x)\| = \|df(z)(x)\| = \|df(z)(x) - d\hat{A}_o(z)(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\beta_p} m_1^{(p+1)} (1 + \beta_p) \leqslant m_1^{(p+1)} \left(\frac{1 + \beta_p}{\beta_p}\right),$$

y para cada $n \geqslant 1$

$$\frac{\| df^{[n]}(z)(x) \|}{\| z \|^n} = \frac{\| df(z)(x) - \sum_{j=0}^{n-1} d\hat{A}_{j+1}(z)(x) \|}{\| z \|^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\beta_p} m_{n+1}^{(p+1)} (1+\beta_p)^{n+1} \leqslant m_{n+1}^{(p+1)} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p} \right)^{n+1}.$$

COROLARIO 8: Sea f un elemento de $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$, tal que f admite en U el sistema de cotas $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$. Entonces , para cualquier $\mathfrak{U}$-sucesión $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ df admite en H_p el sistema de cotas $\{m_n^{(p)}\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$m_n^{(p)} = m_{n+1} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p} \right)^{n+1}$$

y β_p es un número real de (0,1) tal que $\overline{B}(z, \beta_p \| z \|) \subset H_{p+1}$ para todo $z \epsilon H_p$ $p = 1,2 \ldots$.

PROPOSICION 9: Sea $f \epsilon \mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y tal que f admite en cada elemento de la $\mathfrak{U}$-sucesión $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ el sistema de cotas $\{m_n^{(p)}\}_{n=1}^{\infty}$. S: β_p es un número real de (0,1) que verifica

$$\overline{B}(z, \beta_p \| z \|) \subset H_{p+1}, \quad z \epsilon H_p,$$

entonces $\hat{d}^m f$ admite en H_p el sistema de cotas $\{m_n^{(p,m)}\}_{m=0}^{\infty}$, donde

$$m_n^{(p,m)} = m_{n+m}^{(p+1)} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p} \right)^{n+m} m!$$

$p = 1,2 \ldots$.

Demostración: Por el Corolario 2

$$d^m f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} d^m \hat{A}_{j+m}(z).$$

Fijemos el conjunto H_p y sean $z \epsilon H_p$ y $x \epsilon E$ con $\| x \| \leqslant 1$. Como para cada $\lambda \epsilon C$ con $|\lambda| \leqslant \beta_p \| z \|$ se tiene

$$z + \lambda x \epsilon \overline{B}(z, \beta_p \| z \|) \subset H_{p+1} \subset U,$$

aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{m!}\,(\hat{d}^m f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{d}^m \hat{A}_{j+m}(z))(x) = \frac{1}{m!}\,\hat{d}^m(f(z) - \sum_{j=0}^{n+m-1} \hat{A}_j(z))(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \beta_p \|z\|} \frac{f(z+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n+m-1} \hat{A}_j(z+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda .$$

Ahora bien, si $|\lambda| = \beta_p \|z\|$ entonces

$$\frac{\|f(z+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n+m-1} \hat{A}_j(z+\lambda x)\|}{|\lambda|^{m+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f(z+\lambda x) - \sum_{j=0}^{n+m-1} \hat{A}_j(z+\lambda x)\|}{|\lambda|^{m+1}\,\|z+\lambda x\|^{n+m}}\, \|z+\lambda x\|^{n+m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\beta_p \|z\|)^{m+1}}\, m_{n+m}^{(p+1)} (\|z\| + \beta_p \|z\|)^{n+m} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\beta_p^{m+1}}\, m_{n+m}^{(p+1)} \|z\|^{n-1} (1+\beta_p)^{n+m},$$

y por tanto

$$\|\frac{1}{m!}\,(\hat{d}^m f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{d}^m \hat{A}_{j+m}(z))(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\beta_p^{m+1}}\, m_{n+m}^{(p+1)} \|z\|^{n-1} (1+\beta_p)^{n+m}\, 2\pi\beta_p \|z\| \leqslant$$

$$\leqslant m_{n+m}^{(p+1)} \|z\|^n \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p}\right)^{n+m}$$

para todo $x \in E$ con $\|x\| \leqslant 1$, luego

$$\frac{\|\hat{d}^m f^{[n]}(z)\|}{\|z\|^n} \leqslant m!\, m_{n+m}^{(p+1)} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p}\right)^{n+m}, \qquad n = 1,2,\ldots\ .$$

Finalmente, como

$$\hat{d}^m f(z)(x) = (\hat{d}^m f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} \hat{d}^m \hat{A}_j(z))(x) =$$

$$= m!\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \beta_p \|z\|} \frac{f(z+\lambda x) - \sum_{j=0}^{m-1} \hat{A}_j(z+\lambda x)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda,$$

y si $|\lambda| = \beta_p\ \|z\|$

$$\frac{\| f(z+\lambda x) - \sum_{j=0}^{m-1} \hat{A}_j(z+\lambda x)\|}{|\lambda|^{m+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\beta_p\ \|z\|)^{m+1}} \frac{\| f(z+\lambda x) - \sum_{j=0}^{m-1} \hat{A}_j(z+\lambda x)\|}{\|z+\lambda x\|^m} \|z+\lambda x\|^m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\beta_p^{m+1}\ \|z\|}\ m_m^{(p+1)} (1+\beta_p)^m,$$

se tiene

$$\| \hat{d}^m f(z)(x)\| < m!\ m_m^{(p+1)} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p}\right)^m$$

para todo $x \epsilon E$ con $\|x\| \leqslant 1$, de donde se deduce

$$\| \hat{d}^m f^{[0]}(z)\| \leqslant m!\ m_m^{(p+1)} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p}\right)^m.$$

COROLARIO 10: Sea f un elemento de $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ que admite en U el sistema d cotas $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces para cada $\mathfrak{U}$-sucesión $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ y cada $m = 1,2\ldots$ $\hat{d}^m f$ admite en H_p el sistema de cotas $\{m_n^{(p,m)}\}_{n=0}^{\infty}$, donde

$$m_n^{(p,m)} = m_{n+m} \left(\frac{1+\beta_p}{\beta_p}\right)^{n+m} m!\ ,$$

y β_p es un número real de (0,1) que verifica que $\overline{B}(z, \beta_p\ \|z\|) \subset H_{p+1}$ para tod $z \epsilon H_p$.

TOPOLOGIA ASOCIADA AL ESPACIO $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$

Sea $f\epsilon\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$. Para cada $n\epsilon Z$, $n \geqslant -1$ y cada $H\epsilon\mathfrak{U}$ consideremos en $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ la seminorma $q_{H,n}$ definida por

$$q_{H,n}(f) = \begin{cases} \sup \{ \|f(z)\| \,/\, z\epsilon H \ , & \text{si } n=-1 \\ \sup \left\{ \dfrac{\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)\|}{\|z\|^n} \,/\, z\epsilon H \right\}, & \text{si } n \geqslant 0. \end{cases}$$

Llamaremos topología natural del espacio $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$, y la denotaremos $\tau_{\mathfrak{U}b}$, a la topologla localmente convexa definida sobre este espacio por la familia de seminormas $\{ q_{H,n} \}$ donde H recorre los elementos de $\mathfrak{U}$ y $n\epsilon Z$, $n \geqslant -1$.

PROPOSICION 11: El espacio $(\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F), \tau_{\mathfrak{U}b})$ es de Frechet.

Demostración: a) La topología $\tau_{\mathfrak{U}b}$ es separada por ser más fina que la topología de la convergencia uniforme sobre los U-acotados, τ_b.

b) El espacio $(\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F), \tau_{\mathfrak{U}b})$ es metrizable. Basta observar que la familia numerable de seminormas $\{ q_{H_p,n} \}$ $p=1,2\ldots$, $n=-1,0,1\ldots$, define la misma topología $\tau_{\mathfrak{U}b}$ en $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ cualquiera que sea la $\mathfrak{U}$-sucesión $\{ H_p \}_{p=1}^{\infty}$.

c) El espacio $(\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F), \tau_{\mathfrak{U}b})$ es completo. Sea $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ que es de Cauchy para la topología $\tau_{\mathfrak{U}b}$. Como $\tau_{\mathfrak{U}b}$ es más fina que la topología de subespacio que $(\mathscr{H}_{\mathcal{K}}(U,F), \tau_{\mathcal{K}})$ induce en $\mathscr{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$, ([6]), la sucesión $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ es también de Cauchy para la topología $\tau_{\mathcal{K}}$, y por tanto $f_n \longrightarrow f\epsilon \mathscr{H}_{\mathcal{K}}(U,F)$ por $\tau_{\mathcal{K}}$. Además, si en $\mathscr{H}_{\mathcal{K}}(U,F)$

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z) \ \text{ y } \ f_n(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,f_n}(z), \ n=1,2\ldots,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} \hat{A}_{j,f_n}(z) = \hat{A}_j(z), \ j=0,1\ldots,$$

para cada $z\epsilon U$, ([6]). Por otro lado, como $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ es también de Cauchy en $(\mathscr{H}_b(U,F), \tau_b)$, y este espacio es completo

$$f\epsilon\, \mathscr{H}_b(U,F)$$

Sean $H \in \mathcal{U}$ y $n \in Z$, $n > -1$. Fijado $\epsilon > 0$, existe un natural n_0 tal que

$$q_{H,n}(f_p - f_q) \leqslant \epsilon, \quad \text{si } p, q \geqslant n_0,$$

por tanto, si $z \in H$

$$\| f_p(z) - f_q(z) \| \leqslant q_{H,-1}(f_p - f_q) \quad , \quad \text{si} \quad n = -1,$$

y

$$\frac{\| f_p(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,f_p}(z) + \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,f_q}(z) - f_q(z) \|}{\| z \|^n} < \epsilon, \quad \text{si} \quad n \geqslant 0,$$

y si tomamos límites cuando $q \to \infty$ se obtiene

$$\| f_p(z) - f(z) \| \leqslant \epsilon, \quad z \in H \tag{1}$$

$$\frac{\| f_p(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,f_p}(z) + \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) - f(z) \|}{\| z \|^n} \leqslant \epsilon, \quad z \in H, \tag{2}$$

$n = 0,1\ldots$, resultando

$$\frac{\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) \|}{\| z \|^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) + \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,f_p}(z) - f_p(z) \|}{\| z \|^n} + \frac{\| f_p(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,f_p}(z) \|}{\| z \|^n} \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon + \frac{\| f_p(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_{j,f_p}(z) \|}{\| z \|^n}; \quad z \in H, \quad n = 0,1\ldots,$$

y en consecuencia

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in H}} \frac{\| f(z) - \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z) \|}{\| z \|^n} = 0 .$$

Finalmente de (1) y (2) se sigue que la sucesión $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f por la topología $\tau_{\mathcal{U}b}$.

PROPOSICION 12: Sea $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)$ que converge hacia la función f por la topología $\tau_{\mathcal{U}b}$. Si

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z) \text{ y } f_n(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,f_n}(z), \ n = 1,2 \ldots,$$

entonces para cada $k = 0,1 \ldots$, la sucesión $\{ \hat{A}_{k,f_n} \}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\hat{A}_k$ por la topología natural de $P(^kE,F)$.

Demostración: Como $\{ \hat{A}_{k,f_n} \}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente hacia $\hat{A}_k$ y $P(^kE,F)$ es completo para la topología de la norma, nos basta probar que la sucesión $\{ \hat{A}_{k,f_n} \}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para dicha topología, y para ello probaremos primero que es de Cauchy para la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos U-acotados τ_b.

En efecto, sea X un conjunto U-acotado y H un elemento de la familia $\mathcal{U}$ tal que $X \subset H$. Si $M = \sup \{ \| z \| / z \epsilon H \}$ y $z \epsilon X$, entonces

$$\| \hat{A}_{k,f_p}(z) - \hat{A}_{k,f_q}(z) \| \leqslant \| z \|^k q_{H,k}(f_p - f_q) + \| z \|^{k-1} q_{H,k-1}(f_p - f_q) \leqslant$$

$$\leqslant M^k q_{H,k}(f_p - f_q) + M^{k-1} q_{H,k-1}(f_p - f_q),$$

$k = 1,2 \ldots$, y

$$\| \hat{A}_{0,f_p} - \hat{A}_{0,f_q} \| = \| \hat{A}_{0,f_q}(z) - \hat{A}_{0,f_q}(z) \| \leqslant q_{H,0}(f_p - f_q) + q_{H,-1}(f_p - f_q),$$

de donde se obtiene que la sucesión $\{ \hat{A}_{k,f_n} \}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para la topología τ_b, $k = 0,1 \ldots$.

Sea ahora $x \epsilon E$ con $\| x \| \leqslant 1$, y fijemos un elemento $a \epsilon U$ y un número real $\rho > 0$ tal que $\overline{B}(a,\rho) \subset U$. Como para cada $\lambda \epsilon C$ con $|\lambda| \leqslant \frac{\rho}{2}$, $a + \lambda x$ está en la bola cerrada $\overline{B}(a, \frac{\rho}{2})$, si $p,q \epsilon N$ entonces

$$\hat{A}_{k,f_p}(x) - \hat{A}_{k,f_q}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \frac{\rho}{2}} \frac{\hat{A}_{k,f_p}(a + \lambda x) - \hat{A}_{k,f_q}(a + \lambda x)}{\lambda^{k+1}} \, d\lambda,$$

y por tanto

$$\| \hat{A}_{k,f_p}(x) - \hat{A}_{k,f_q}(x) \| \leq \frac{2^k}{\rho^k} \sup \{ \| \hat{A}_{k,f_p}(z) - \hat{A}_{k,f_q}(z) \| / z \in \overline{B}(a, \frac{\rho}{2}) \}$$

resultando así que la sucesión $\{ \hat{A}_{k,f_n} \}_{n=1}^{\infty}$ es también de Cauchy para la topología natural de $P({}^kE,F)$, $k = 0,1, \ldots$.

Por último, a la vista de los resultados obtenidos en las proposiciones 3 y 4 y que se recogen en la observación 5, se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICION 13: La topología $\tau_{\mathfrak{U}b}$ del espacio $\mathcal{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ coincide con la topología localmente convexa $\tau^*_{\mathfrak{U}b}$ definida por la familia de seminormas $\{ Q_{H,m} \}$, donde H recorre los elementos de $\mathfrak{U}$ y m el conjunto de los enteros, $m \geq 0$, dadas por

$$Q_{H,m}(f) = \sup \{ \| \hat{d}^m f(a) \| \ a \in H \}, \quad f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F).$$

Demostración: Sean $m \in Z$, $m \geq 0$ y $H \in \mathfrak{U}$. Para cada $f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{U}b}(U,F)$ con

$$Q_{H,m+1}(f) \leq 1,$$

si $f(z) \cong \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, $z \in H$ y a está en el segmento $(0,z) \subset H$, como $[a,z] \subset H \subset U$

$$\| f(z) - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) \| \leq \frac{\| z-a \|^{m+1}}{(m+1)!} \quad (1),$$

|8|, y por otra parte, si $j = 0,1 \ldots, m$

$$\| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) - \hat{A}_j(a) \| \leq$$

$$\leq \| (\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a) - \hat{A}_j)(z-a) \| + \| \hat{A}_j(z-a) - \hat{A}_j(a) \| \leq$$

$$\leq \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a) - \hat{A}_j \| . \| z-a \|^j + \| \hat{A}_j(z-a) - \hat{A}_j(a) \|, \quad (2)$$

y como

$$\| f(z) - \sum_{j=0}^{m} \hat{A}_j(z) \| \leq \| f(z) - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(a)(z-a) \| +$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\left\|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(a)(z-a)-\hat{A}_j(z)\right\|,$$

de (1) y (2) se deduce

$$\left\|f(z)-\sum_{j=0}^{m}\hat{A}_j(z)\right\|\leqslant\frac{\|z-a\|^{m+1}}{(m+1)!}+\sum_{j=0}^{m}\left\|\frac{1}{j!}\hat{d}^j f(a)-\hat{A}_j\right\|.\|z-a\|^j+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\left\|\hat{A}_j(z-a)-\hat{A}_j(a)\right\|,$$

y si tomamos límites cuando a tiende hacia 0 y $a\epsilon(0,z)$ por la proposición 3 se obtiene

$$\left\|f(z)-\sum_{j=0}^{m}\hat{A}_j(z)\right\|\leqslant\frac{\|z\|^{m+1}}{(m+1)!}$$

por tanto, si $M=\sup\ \{\|z\|\ /\ z\epsilon H\}$

$$q_{H,m}(f)\leqslant\frac{M}{(m+1)!}\ ,$$

y como para $m=-1$

$$q_{H,-1}(f)=\sup_{a\epsilon H}\ \|f(z)\|=\sup\ \|\hat{d}^0 f(z)\|=Q_{H,0}(f)$$

resulta que $\tau^*_{\mathcal{U}b}\geqslant\tau_{\mathcal{U}b}$.

Recíprocamente, si $Q_{H,m}$ es una de las seminormas que definen la topología $\tau^*_{\mathcal{U}b}$, entonces el conjunto

$$L=\{f\epsilon\mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)\ /\ Q_{H,m}(f)\leqslant 1\}$$

es un entorno de 0 para la topología $\tau_{\mathcal{U}b}$ y en consecuencia $\tau^*_{\mathcal{U}b}\leqslant\tau_{\mathcal{U}b}$.

En efecto, como L es equilibrado, absorbente y convexo, si probamos que L es cerrado para la topología $\tau_{\mathcal{U}b}$, entonces L es un tonel en $(\mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F),\tau_{\mathcal{U}b})$, y como este espacio es tonelado, L es un entorno de 0 para $\tau_{\mathcal{U}b}$. Sea entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión cualquiera de elementos de L que converge hacia una función $f\epsilon\mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)$ por la topología $\tau_{\mathcal{U}b}$. Como para cada $a\epsilon H$, la aplicación

$$\hat{d}^m_a:\ f\epsilon\mathscr{H}_{\mathcal{U}b}(U,F)\ \longrightarrow\ \hat{d}^m f(a)\epsilon P(^mE,F)$$

es continua cuando se considera en $\mathscr{H}_{\mathfrak{u}b}(U,F)$ la topología $\tau_{\mathfrak{u}b}$ y en $P(^mE,F)$ la topología de la norma, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}^m f_n(a) = \hat{d}^m f(a)$$

y como

$$\| \hat{d}^m f_n(a) \| \leqslant \sup_{a\in H} \| \hat{d}^m f_n(a) \| = Q_{H,m}(f_n) \leqslant 1$$

$n = 1, 2. \ldots$, también

$$\| \hat{d}^m f(a) \| \leqslant 1$$

para todo $a\in H$ y por tanto

$$Q_{H,m}(f) \leqslant 1.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BARROSO, J.A. Introducción a la holomorfía entre espacios normados. Universidad de Santiago de Compostela. 1976.

[2] BOCHNAK, J. and SICIAK. Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces. Studia Math. 39. 1971. pp 39-76.

[3] BOCHNAK, J. and SICIAK. Analytic functions in topological vector espaces. Studia Math. 39. pp 77-112.

[4] DINEEN, S. Complex Analysis in locally convex spaces. North-Holland. New York, 1981.

[5] FERNANDEZ, M. Algunos resultados sobre desarrollos asintóticos en una y varias variables complejas. Tesis doctoral. Valencia 1980.

[6] GUIJARRO, P. Desarrollos asintóticos en espacios de Banach desde los conjuntos compactos (Aceptado para su publicación en la Revista de la Real Academia de Ciencias).

[7] HERRERO, C. Espacios de funciones holomorfas cuyas derivadas se extienden por continuidad en un punto de la frontera del dominio y su relación con los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico. Tesis doctoral. Valencia 1979.

[8] SCHWARTZ, L. Cours d'analyse. Hermann. París 1967.

[9] VALDIVIA, M. Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. Rev. R. Acad. Ciencias de Madrid, LIX, 1965.

Piedad Guijarro Carranza
Dpto. de Matemáticas.
Facultad de Informática
Universidad Politécnica
C/ Gargallo nº 5
08028 Barcelona.