SULLE IPERSUPERFICIE GENERATE DALLA JACOBIANA DI UN SISTEMA LINEARE DI QUADRICHE

por

LANDO DEGOLI

ABSTRACT:

We first focus our attention on some important properties of the hypersurfaces $A_{ij} = 0$ obtained from the jacobian matrix of rank r of a linear system of quadrics in S_r. Then we find the birational transformations wich exist between those hypersurfaces and the hyperplanes of S_r. We finally give some significant examples.

1 – Nello spazio complesso lineare S_r riferito a coordinate proiettive omogenee x_i *($i = 0,1, \ldots ,r$)* scegliamo *$d+1$* quadriche linearmente indipendenti:

$$f_0 = 0 \quad , \quad f_1 = 0, \; . \; . \; . \; , f_d = 0$$

con:

$$f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} \, x_i \, x_k \qquad (a_q^{ik} = a_q^{ki})$$

Il sistema lineare L_d di dimensione *d*, che ne risulta, è espresso dall'equazione:

$$\sum_{q=0}^{d} \lambda_q \; f_q = 0 \tag{1}$$

Supponiamo che la matrice Jacobiana ad *$r+1$* righe e *$d+1$* colonne:

1980 Mathematics Subject Classification:
Primary: 51-XX GEOMETRY
Secondary: 51-N-15 Projective analytic geometry
Keywords and phrases: Quadric, linear system of quadrics

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\| \qquad \begin{pmatrix} q = 0,1,\ldots,d \\ i = 0,1,\ldots,r \end{pmatrix}$$

sia di caratteristica $r \leqslant d$.

La varietà Jacobiana data dalla matrice precedente uguagliata a zero rappresenta il luogo dei vertici dei coni del sistema (1). Supponiamo che il sistema lineare L_d sia *irriducibile di prima specie.* (vedi [6]). Ciò significa che L_d non possiede dei *sistemi subordinati essenziali,* ossia sistemi $L_{g/c}$ di dimensione g e Jacobiana di caratteristica c con:

$$2 \leqslant g \leqslant d-1 \quad , \quad 2 \leqslant c \leqslant r-1 \quad , \quad c \leqslant g.$$

In tal caso abbiamo dimostrato il teorema (vedi [6]): "*Le quadriche di* L_d *che passano per un punto hanno in comune una retta*".

Poichè la Jacobiana ha caratteristica r, tutti i minori di ordine $r+1$ estratti da J sono identicamente nulli. Ricordando che è: $r \leqslant d$, consideriamo il determinante individuato da $r+1$ quadriche qualsiasi lin. ind. del sistema (1). Potremo scegliere, senza nuocere alla generalità, le primer $r+1$ quadriche: $f_0, f_1, \ldots, f_r$ e si avrà:

$$J = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0,1,\ldots,r \\ j = 0,1,\ldots,r \end{pmatrix}$$

D è dunque identicamente nullo, però non sono tutti nulli i minori di ordine r estratti da J. Indichiamo con:

$$A_{ij} \begin{pmatrix} i = 0,1,\ldots,r \\ j = 0,1,\ldots,r \end{pmatrix}$$

il complemento algebrico di: $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ in D.

Gli A_{ij} risultano delle forme algebriche di ordine r, che, uguagliate a zero, rappresentano delle ipersuperficie di S_r. Supponiamo che non sia nullo il minóre A_{rr}. Ne deriva che non sarà identicamente nulla nemmeno la matrice:

$$H = \left\| \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \right\| \qquad \begin{pmatrix} s = 0,1,\ldots,r-1 \\ i = 0,1,\ldots,r \end{pmatrix}$$

i cui minori di ordine r sono le forme A_{rj} *($j = 0,1,\ldots,r$).*

Consideriamo il sistema lineare di quadriche contenuto in (1):

$$\sum_{s=0}^{r-1} \lambda_s f_s = 0 \qquad (2)$$

Dimostiamo il seguente Lemma.

LEMMA: *Il luogo geometrico dei punti coniugati dell'iperpiano:* $x_i = 0$ *rispetto alle quadriche del sistema:*

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{r-1} f_{r-1} = 0 \qquad (3)$$

è l'ipersuperficie: $A_{ri} = 0$

Consideriamo innanzitutto gli iperpiani di equazione:

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_t} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_t} + \ldots + \lambda_{r-1} \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_t} = 0 \quad (t = 0,1,\ldots,i-1,i,i+1,\ldots,r) (4)$$

Essi risultano gli iperpiani polari degli *r* punti vertice della piramide di riferimento opposti alla faccia: $x_i = 0$.

Eliminando i λ dalle equazioni precedenti si ottiene il luogo geometrico cercato. Poichè il sistema (4) è omogeneo rispetto ai λ, tale luogo risulta evidentemente: $A_{ri} = 0$.

Ciò premesso dimostriamo il:

TEOREMA A: *Se una delle forme* A_{rj}, *per esempio:* A_{r0}, *è identicamente nulla le forme* A_{rs} *(s = 1,2, . . . ,r) differiscono per un fattore costante e sono espresse dalla formula:*

$$A_{rs} = h_s\ \beta^b\ \gamma^c \ldots \mu^m \qquad (s = 1,2,\ldots,r)$$

dove: h_s *sono costanti non nulle,* $\beta, \gamma, \ldots, \mu$ *sono delle forme omogenee irriducibili distinte fra loro, mentre a, b, . . . ,m sono dei numeri interi positivi.*

Cominciamo con l'osservare che non possono essere identicamente nulli due qualunque dei determinanti A_{rj} *(j = 0,1, . . . ,r)* altrimenti per un noto teorema di Kronecker sarebbero nulli tutti gli altri compreso A_{rr}, il che è impossibile. Supponiamo ora che, per ipotesi, uno solo degli A_{rj} sia nullo, ad esempio: A_{r0}. Un punto di S_r che annulli uno qualsiasi dei rimanenti A_{rj}, cioè degli A_{rs} *(s = 1,2, . . . ,r)* ad esempio: A_{r1}, per il teorema di Kronecker annullerà tutti gli altri $A_{r\alpha}$ *(α = 2,3, . . . ,r).*

Pertanto tutti i punti di S_r che annullano un divisore primo di A_{r1}, annulleranno tutti gli $A_{r\alpha}$, che perciò risultano tutti divisibili per ogni divisore primo di A_{r1}.

Se ripetiamo un identico ragionamento per ciascuno degli $A_{r\alpha}$ dovremo concludere che è valida la seguente identità:

$$A_{rs} = h_s \; \beta^{b_s} \; \gamma^{c_s} \; \ldots \; \mu^{m_s} \qquad (s = 1,2, \ldots ,r)$$

con β, γ, . . . ,μ funzioni omogenee distinte ed irriducibili e b_s, c_s, . . . ,m_s interi positivi non tutti nulli ed h_s costanti non nulle.

Ora proviamo che si ha:

$$\begin{array}{l} b_1 = b_2 = \ldots = b_r = b \\ c_1 = c_2 = \ldots = c_r = c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1 = m_2 = \ldots = m_r = m \end{array}$$

Infatti se i b_s, non fossero tutti uguali, possiamo supporre che uno di essi, ad esempio: b_1, sia > 1. Poniamo $b_1 = 2$. Allora risulterà:

$$A_{r1} = \beta^2 \; R$$

dove R è una forma di ordine $\leqslant r-2$.

Derivando si ha:

$$\frac{\partial A_{r1}}{\partial x_k} = 2\beta \; \frac{\partial \beta}{\partial x_k} \; R + \beta^2 \; \frac{\partial R}{\partial x_k} \qquad (k = 0,1, \ldots ,r)$$

Perciò sopra l'ipersuperficie $\beta = 0$ si avrà:

$$\frac{\partial A_{r1}}{\partial x_k} = 0 \qquad (k = 0,1, \ldots ,r)$$

Ma dal determinante D identico a zero si deducono le identità:

$$\sum_{s=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_j} A_{rj} = 0 \qquad (q = 0,1, \ldots ,r)$$

Derivando queste ultime:

$$\sum_{s=0}^{r} \left(\frac{\partial^2 f_q}{\partial x_j \, \partial x_k} A_{rj} + \frac{\partial f_q}{\partial x_j} \frac{\partial A_{rj}}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (q = 0,1,\dots,r) \tag{5}$$

Ma essendo $A_{r0} = 0$, poichè $\beta = 0$ si annulla anche A_{r1} e per quanto detto prima si annullano anche gli A_{rj} e le (5) diventano:

$$\sum_{\alpha=2}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_\alpha} \frac{\partial A_{r\alpha}}{\partial x_k} = 0 \qquad (q = 0,1,\dots,r) \tag{6}$$

Le (6) per ogni valore di k formano un sistema di $r+1$ equazioni lineari in $r-1$ incognite $\partial A_{r\alpha}\, \partial x_k$.

Ora, essendo (6) un sistema omogeneo, poichè la matrice di $r-1$ righe ed $r+1$ colonne:

$$\left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_\alpha} \right\| \qquad \begin{pmatrix} q = 0,1,\dots,r \\ \alpha = 2,3,\dots,r \end{pmatrix}$$

non si annulla nel generico punto di $\beta = 0$, si avrà:

$$\frac{\partial A_{r\alpha}}{\partial x_k} = 0 \qquad (\alpha = 2,3,\dots,r)$$

Da ciò ne segue che $\beta = 0$ è ipersuperficie almeno doppia per tutte le $A_{r\alpha} = 0$ e perciò $b_\alpha \geqslant 2$.

Supponiamo ora: $b_1 = 3$. Si otterrà, operando in modo analogo:

$$\frac{\partial^2 A_{r1}}{\partial x_k \, \partial x_p} = 0 \qquad (k,p = 0,1,\dots,r)$$

Poichè le: $\dfrac{\partial^2 f_q}{\partial x_j \, \partial x_k}$ che compaiono nelle (5) sono costanti in quanto risultano i coefficienti delle quadriche f_q e la loro derivata è nulla, derivando le (5) rispetto ad x_p si otterrà:

$$\sum_{j=0}^{r} \left(\frac{\partial^2 f_q}{\partial x_j \, \partial x_k} \frac{\partial A_{rj}}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_j \, \partial x_p} \frac{\partial A_{rj}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_q}{\partial x_j} \frac{\partial^2 A_{rj}}{\partial x_k \, \partial x_p} \right) = 0 \quad (q = 0,1,\dots,r)$$

Ora essendo $A_{r0} = 0$ e, per $\beta = 0$, anche $\dfrac{\partial A_{r1}}{\partial x_p} = 0$, $\dfrac{\partial A_{r\alpha}}{\partial x_k} = 0$ e che $\dfrac{\partial^2 A_{r1}}{\partial x_k\, \partial x_p} = 0$, si ottiene:

$$\sum_{\alpha=2}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_\alpha} \; \frac{\partial^2 A_{r\alpha}}{\partial x_k\, \partial x_p} = 0 \qquad (q = 0,1, \ldots\ldots ,r)$$

e quindi su $\beta = 0$ coesistono le identità:

$$\frac{\partial^2 A_{r\alpha}}{\partial x_k\, \partial x_p} = 0$$

Quindi $\beta = 0$ è un'ipersuperficie almeno tripla componente della $A_{r\alpha} = 0$. Ne segue: $b_\alpha \geqslant 3$.

Cosi proseguendo si dimostra che $b_\alpha \geqslant b_1$ ed analogamente $c_\alpha \geqslant c_1$ e così via. Perciò applicando a ciascuna delle $A_{r\alpha}$ il ragionamento precedente si conclude che deve essere:

$$A_{rj} = h_j \;\; \beta^b \;\; \gamma^c \ldots \mu^m \qquad (j = 1,2, \ldots r)$$

come volevasi dimostrare.

2 — **TEOREMA B**: *Se il sistema lineare (2) è privo di punti base doppi nessuna delle forme* A_{rj} *(*$j = 0,1, \ldots ,r$*) è identicamente nulla.*

Il sistema (2) può considerarsi associato alla matrice H. Ora poichè un punto generico P $(x_0, x_1, \ldots ,x_r)$ di S_r non annulla la matrice H, consideriamo gli iperpiani polari di P rispetto alle quadriche del sistema (2):

$$\sum_{j=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_j} \; x_j = 0 \qquad (q = 0,1, \ldots ,r-1) \quad ,$$

i quali si segano nel punto Q di coordinate:

$$\rho \, x'_j = A_{rj}(P) \qquad (7)$$

essendo $A_{rj}(P)$ il valore della forma A_{rj} nel punto P e ρ un fattore di proporzionalità. Se una delle forme A_{rj}, per esempio: A_{r0}, è identicamente nulla, per il Teorema A si ha:

$$A_{rt} = h_t \;\; \beta^b \;\; \gamma^c \ldots \mu^m \qquad (t = 1,2, \ldots ,r)$$

(Dovremo anche avere $A_{rt} \neq 0$, altrimenti se uno solo degli A_{rt} fosse identicamente nullo per un noto Teorema di Kronecker sarebbero tutti nulli e quindi sarebbe nulla la matrice H, il che è assurdo). Quindi per le (7) si avrebbe:

$$\rho x_0' = 0 \ , \ \rho x_t' = h_t \qquad (t = 1,2,\ldots,r)$$

Ciò significa che Q risulterebbe indipendente da P e perciò punto doppio per la varietà base del sistema (2) contro l'ipotesi. Se ne deduce che nessuma delle forme A_{rj} è identicamente nulla.

Indichiamo con Ω la varietà Jacobiana del sistema (2). Essa è il luogo dei punti di S_r che annullano la matrice H.

COROLLARIO B$_1$: *Un punto P di* S_r *appartenente all'ipersuperficie* $A_{r0} = 0$, *ma non alla varietà* Ω, *giace su tutte le ipersuperficie di ordine r:* $A_{s0} = 0$ *(s = 0,1, . . . ,r−1) che non siano indeterminate.*

Consideriamo il sistema lineare:

$$\sum_{q=0}^{r} \lambda_q f_q = 0 \tag{8}$$

che contiene il sistema (2) ed è contenuto nel sistema (1). Derivando rispetto ad $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$, sostituendo le coordinate di P in tali derivate e risolvendo il sistema, che ne risulta, rispetto ai rapporti: $\lambda_0/\lambda_r, \lambda_1/\lambda_r, \ldots, \lambda_{r-1}/\lambda_r$ si ottiene:

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_r} = \frac{A_{s0}(P)}{A_{r0}(P)} \qquad (s = 0,1,\ldots,r-1) \tag{9}$$

Poichè P non giace su Ω e la quadrica f_r non appartiene al sistema (2) sarà: $\lambda_r \neq 0$. Ora se P appartiene all'ipersuperficie $A_{r0} = 0$, dalle (9) si deduce: $A_{s0}(P) = 0$ *(s = 0,1, . . . ,r−1)*, il che mostra che P appartiene a tutte le ipersuperficie A_{s0}, che non risultino indeterminate.

COROLLARIO B$_2$: *Le ipersuperficie* $A_{rj} = 0$ *(j = 0,1, . . . ,r) sono tutte riducibili ed ammettono una sottomultipla comune. Lo stesso accade per le ipersuperficie:* $A_{s0} = 0$ *(s = 0,1, . . . ,r).*

Se, per esempio, fosse irriducibile A_{r0}, il punto generico di questa ipersuperficie se giace sulla varietà Jacobiana Ω, giacerebbe su tutte le ipersuperficie: A_{rt} *(t = 1,2, . . . ,r)* poichè Ω risulta varietà individuata dal sistema algebrico formato dai minori di ordine *r* estratti dalla matrice H, uguagliati a zero e cioè da:

$$A_{r0} = 0 \ , \ A_{r1} = 0 \ , \ \ldots \ , \ A_{rr} = 0$$

In questo caso le A_{rt} coinciderebbero tutte con A_{r0}, perchè A_{r0} è irriducibile e si avrebbero le identità:

$$A_{rt} = k_t A_{r0} \qquad (t = 1, 2, \ldots, r)$$

con k_t costanti non tutte nulle.

Ma allora per le (7) esisterebbe un punto base doppio contro l'ipotesi del Teorema B valide naturalmente anche per il presente corollario. Se poi il punto generico non giace sulla Jacobiana Ω, per il corollario precedente giacerebbe su tutte le ipersuperficie $A_{s0} = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ che non siano indeterminate e coinciderebbero con $A_{r0} = 0$. Ma essendo questa ipersuperficie irriducibile esisterebbero le identità:

$$A_{s0} = K_s A_{r0} \qquad (s = 0, 1, \ldots, r-1)$$

con K_s costanti non tutte nulle. Allora sviluppando il determinante $D = 0$, si dimostra (vedi: [7]) che esiste l'identità:

$$\sum_{i=0}^{r} A_{i0} f_i = 0$$

e quindi:

$$\sum_{i=0}^{r} k_i f_i = 0$$

dal che si deduce che le quadriche non sarebbero lin. ind. il che è assurdo. Consideriamo ora l'ipersuperficie A_{rm} $(0 \leqslant m \leqslant r)$ del sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^{r} \mu_j A_{rj} = 0 \tag{10}$$

Se A_{rm} possiede una componente multipla β^h, essendo β una forma irriducibile, ed h un numero intero > 1, quest'ultima non può variare quando A_{rm} descrive il sistema (10), perchè, per un noto teorema di Bertini (vedi: [1]), giace sulla varietà base del sistema. Pertanto anche β^h non può variare al variare di A_{rm}.

Ne deriva che ogni componente multipla di una qualsiasi delle ipersuperficie $A_{rj} = 0$ è componente di tutte le rimanenti e possiede la stessa molteplicità.

Se le forme A_{rj} fossero prime tra loro, il generico punto di una qualsiasi componente $\beta^k = 0$, per esempio della A_{r0}, non giacerebbe sulla varietà base del sistema (10) cioè sulla varietà Jacobiana del sistema (2) e perciò per il Corollario

B_1 giacerebbe su tutte le $A_{s0} = 0$ che non siano indeterminate. Inoltre dovrebbe essere $k = 1$, perchè tali componenti non sono mai multiple. Pertanto le forme A_{s0} differirebbero dalla forma A_{r0} soltanto per costanti non tutte nulle e per una dimostrazione analoga alla precedente le quadriche non sarebbero lin. ind. Quindi le A_{rj} non sono prime tra loro.

Indicando con Θ_r il massimo comun divisore delle forma A_{rj}, si ottengono le identità:

$$A_{rj} = \Theta_r \ \Psi_j \qquad (j = 0,1, \ldots ,r) \qquad (11)$$

in cui le Ψ_j sono forme di ugual grado, prime tra loro.

Nel caso $j = 0$, si ha: $A_{r0} = \Theta_r \Psi_0$. Dimostriamo che Θ_r e Ψ_0 sono prime tra loro. Infatti se avessero un divisore comune β, multiplo secondo $h > 0$ oer Θ_r e secondo $k > 0$ per Ψ_0, la A_{r0} per le (7) avrebbe la componente multipla $\beta^{h+k} = 0$ $(h + k \geqslant 2)$, la quale per la dimostrazione precedente sarebbe contenuta in tutte le A_{rt} $(t = 1,2, \ldots ,r)$. Ne seguirebbe che Θ_r sarebbe divisibile per β^{h+k} anzichè solo per β^h. Da ciò ne segue che ogni divisore di $\Psi_0 = 0$ non può essere multiplo; altrimenti comparirebbe in tutte le $A_{rt} = 0$ e perciò anche in $\Theta_r = 0$.

Ne deriva che $\Psi_0 = 0$ per il Corollario B_1 giace in tutte le $A_{s0} = 0$ che non siano indeterminate e quindi si hanno le identità:

$$A_{s0} = \Theta_s \ \Psi_0 \qquad (s = 0,1, \ldots ,r) \qquad (12)$$

3 – Consideriamo il determinante aggiunto E formato coi complementi algebrici degli elementi di D:

$$E = \left| \ A_{ij} \ \right| \qquad \begin{pmatrix} i = 0,1, \ \ldots \ ,r \\ \\ j = 0,1, \ \ldots \ ,r \end{pmatrix}$$

In ogni sua colonna uno solo degli elementi A_{ij} può essere nullo perchè se due lo fossero sarebbero tutti nulli per un teorema di Kronecker e quindi il sistema L_d possederebbe un sistema subordinato essenziale $L_{r-1/r-1}$ di dimensione $r-1$ e Jacobiana di caratteristica $r-1$ contro l'ipotesi che esso sia irriducibile di prima specie. Però se è nullo uno degli A_{ij} e nessun altro della sua colonna, per una nota proprietà del determinante aggiunto, saranno nulli tutti quelli appartenenti alla sua riga. Scambiando opportunamente le righe o le colonne si può fare assumere all'elemento nullo il posto di A_{r0} e quindi determinare tutti gli altri elementi della stessa colonna mediante la formula del Teorema A:

$$A_{rs} = h_s \ \beta^b \ \gamma^c \ldots \mu^m \qquad (s = 1,2, \ldots ,r)$$

che risulta essere un caso particolare delle formule (11) e (12). Quindi in generale si avrà:

$$E = \left| \Theta_i \ \Psi_j \right| \qquad \begin{pmatrix} i = 0,1,\ldots,r \\ \\ j = 0,1,\ldots,r \end{pmatrix}$$

TEOREMA C: *Se le ipersuperficie del sistema lineare:*

$$\sum_{j=0}^{r} \mu_j \ A_{rj} = \sum_{j=0}^{r} \mu_j \, \Theta_r \, \Psi_j = 0 \tag{13}$$

che passano per un punto generico P di S_r *passano anche per un altro punto Q, il sistema risulta composto con una congruenza lineare. Nel caso invece che il sistema 13) sia semplice, l'ipersuperficie generica di detto sistema risulta il luogo dei punti coniugati di un iperpiano rispetto alle singole quadriche del sistema (2).*

Supponiamo, se possibile, che le ipersuperficie del sistema suddetto che passano per il punto generico P di S_r non situato sulla varietà Jacobiana Ω del sistema (2) passino per un punto Q pur esso non situato su Ω. Questa risulta anche la varietà base del sistema (13), perciò saranno soddisfatte le due condizioni:

$$\sum_{j=0}^{r} \mu_j \ A_{rj}(P) = 0 \quad , \quad \sum_{j=0}^{r} \mu_j \ A_{rj}(Q) = 0$$

Di conseguenza il punto R coniugato di P rispetto alle quadriche del sistema (2) le cui coordinate sono date dalle formule (7):

$$\rho \, x'_j = A_{rj}(P) \qquad (j = 0,1,\ldots,r)$$

risulta coniugato con la retta PQ e quindi le ipersuperficie del sistema (13) che passano pe P contengono tutte la retta PQ. Ne deriva che il sistema dato è composto con una congruenza di spazi lineari.

Si invece il sistema è semplice, esso risulta omaloidico (vedi: [1]).

Consideriamo perciò la totalità degli iperpiani di S_r dati dal sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^{r} \vartheta_j \, x_j = 0 \tag{14}$$

Tra il sistema (13) e il sistema (14) possiamo stabilire la proiettività:

$$\sigma \mu_j = \vartheta_j \qquad (j = 0,1,\ldots,r)$$

Assunti sull'iperpiano generico r generici punti P_t $(t = 1,2,\ldots,r)$ di coordinate $(x_0^{(t)}, x_1^{(t)}, \ldots, x_r^{(t)})$, consideriamo i loro iperpiani polari rispetto alla quadrica variabile del sistema (2), cioè gli iperpiani di equazioni:

$$\sum_{i=0}^{r} \left(\sum_{s=0}^{r-1} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \right) x_i^{(t)} = 0 \qquad (t = 1,2,\ldots,r) \qquad (15)$$

L'equazione del luogo cercato si ottiene eliminando i λ_s dalle equazioni precedenti. Essendo il sistema (15) omogeneo rispetto ai λ_s si ottiene:

$$\sum x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_r}^{(r)} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \ldots & \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_{i_1}} \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_{i_2}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \ldots & \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_{i_2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_{i_r}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_r}} & \ldots & \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x_{i_r}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

dove $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ rappresenta una disposizione qualsiasi di classe r dei numeri: $0,1,\ldots,r$.

Ora il determinante del termine generico della sommatoria (16) è identicamente nullo quando due degli indici i,k sono uguali, ed è uguale ad una delle forme A_{rj} se gli indici sono diversi. Quindi la sommatoria (16) è una combinazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti delle A_{rj} ed i coefficienti sono proporzionali ai coefficienti omologhi delle variabili dell'equazione dell'iperpiano considerato, cioè ai minori di ordine r estratti dalla matrice:

$$\begin{Vmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \ldots & x_r^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_r^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{(r)} & x_1^{(r)} & \ldots & x_r^{(r)} \end{Vmatrix}$$

formata con le coordinate dei punti P_t. Perciò il teorema è dimostrato.

Dividendo la (13) per la componente fissa Θ_r delle A_{rj} si ottiene il sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^{r} \mu_j \Psi_j = 0 \tag{17}$$

COROLLARIO C: *Sempre nell'ipotesi che il sistema (13) sia semplice, tra il sistema lineare (17) e la totalità degli iperpiani di* S_r *esiste una proiettività, che genera in* S_r *una trasformazione birazionale, la cui varietà dei punti uniti giace sulla varietà base del sistema (1) e viceversa.*

Il sistema (17) deriva dal sistema semplice (13) con l'eliminazione della componente fissa Θ_r, perciò anche (17) risulterà semplice ed omaloidico. E' quindi possibile introdurre tra detto sistema e quello generato dalla totalità degli iperpiani di S_r:

$$\sum_{j=0}^{r} \vartheta_j x_j = 0$$

una proiettività, indicando come corrispondenti l'iperpiano e l'ipersuperficie che hanno parametri proporzionali:

$$\sigma\mu_j = \vartheta_j \qquad (j = 0,1, \ldots ,r)$$

Tale proiettività dà origine alla trasformazione birazionale:

$$\rho\, x_i' = \Psi_i \qquad (i = 0,1, \ldots ,r) \tag{18}$$

Per determinare i punti uniti della trasformazione basterà porre: $x_i' = x_i$ Detto ρ' un particolare valore di ρ si avrà:

$$\rho' x_i = \Psi_i (x_0, x_1, \ldots ,x_r) \qquad (i = 0, 1, \ldots ,r)$$

Eliminando ρ' si ottiene:

$$\frac{\Psi_0}{x_0} = \frac{\Psi_1}{x_1} = \ldots = \frac{\Psi_r}{x_r} \tag{19}$$

che costituiscono un sistema di $\binom{r+1}{2}$ ipersuperficie, la cui varietà base è formata dai punti uniti dellla corrispondenza (13).

Consideriamo ora le identità che scaturiscono dal determinante D, identicamente nullo in S_r:

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \Psi_i = 0 \qquad (q = 0,1, \ldots ,r)$$

Sostituendo alle Ψ_i i valori dati dalle (19) si ha:

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} x_i = 0 \qquad (q = 0,1,\ldots,r)$$

Ossia:

$$f_q = 0 \qquad (q = 0,1,\ldots,r)$$

No segue che detta varietà è contenuta in tutte le *r+1* quadriche scelte. Ma siccome la scelta è stata operate in modo arbitrario, il ragionamento può ripetersi per tutte le quadriche del sistema L_d, perciò si avrà:

$$f_s = 0 \qquad (s = 0,1,\ldots,d)$$

cioè tutte le quadriche del sistema (1) contengono la varietà dei punti uniti della trasformazione birazionale (18).

Viceversa la quadrica generica del sistema (1) può scriversi:

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} x_i = 0 \qquad (q = 0,1,\ldots,d) \tag{20}$$

Le (16) possono considerarsi un sistema lineare omogeneo nelle x_i, la cui soluzione:

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{\Psi_i}{\Psi_0}$$

dà esattamente *r* ipersuperficie del tipo (19) e quindi tutte le altre. Il che significa che la varietà base delle f_q giace sulla varietà dei punti uniti delle (18). Perciò tale varietà è la stessa in entrambi i sistemi.

4 – Diamo ora alcuni esempi significativi di quanto abbiamo dimostrato. Per evitare scritture complicate useremo le coordinate omogenee: *(a,b,c,d,e,f)* al posto di: $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

I) Sia il sistema lineare di quadriche dell' S_5:

$$\lambda_0 (ac - b^2) + \lambda_1 (ac - bd) + \lambda_2 (af - be) + \lambda_3 (be - cd) + \lambda_4 (bf - ce) +$$

$$+ \lambda_5 (df - e^2) = 0$$

la cui varietà base è data dalle equazioni parametriche:

$$a = 1 \ , \ b = \eta \ , \ c = \eta^2 \ , \ d = \varphi \ , \ e = \eta \varphi \ , \ f = \eta^2 \varphi \tag{21}$$

e risulta la superficie razionale rigata dell' S_5, le cui corde riempiono tutto l' S_5, il che è condizione necessaria e sufficiente perchè la Jacobiana abbia caratteristica 5 (vedi: [8]).

Scritto il determinante $D = 0$, si ottiene:

$$\Theta_5 = ac - b^2$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= 2abe + acd - 2b^2 d - a^2 f \\
\Psi_1 &= abf + bcd - 2ace \\
\Psi_2 &= 2bce + acf - 2b^2 f - c^2 d \\
\Psi_3 &= 2bde + adf - 2ae^2 - cd^2 \\
\Psi_4 &= cde + aef - 2bdf \\
\Psi_5 &= 2bef + cdf - 2ce^2 - af^2
\end{aligned}$$

Il sistema lineare di cubiche:

$$\sum_{q=0}^{5} \lambda_q \Psi_q = 0 \tag{22}$$

è composto con una congruenza di piani. Ad esempio: per il punto P (1,1,0,1,0,0) passamo le ultime 5 cubiche, ma non la prima e quindi si ha: $\lambda_0 = 0$. Le altre 5 cubiche hanno in comune il piano di equazione: $c = e = f = 0$, passante per P. Il sistema lineare (22) ha per varietà base i due piani:

$$a = b = c = 0 \qquad \text{e} \qquad d = e = f = 0$$

ed inoltre la superficie razionale (21), che è varietà base del sistema dato !

II) Il sistema lineare di quadriche dell' S_5:

$$\lambda_0 (ac - b^2) + \lambda_1 (ae - bd) + \lambda_2 (be - cd) + \lambda_3 (af - bf) + \lambda_4 (bf - cf) +$$
$$+ \lambda_5 (df - ef) = 0$$

la cui varietà base, composta da una V_2^3 dell' S_4 di equazioni: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ e dal piano: a = b, b = c, d = e avente una retta in comune con essa, ha le equazioni parametriche: per la V_2^3:

$$a=1 \; , \; b=\eta \; , \; c=\eta^2 \; , \; d=\varphi \; , \; e=\eta\varphi \; , \; f=0 \tag{23}$$

ed: $a=b=c=1 \; , \; d=e=\xi \; , \; f=\zeta$ per il piano.

Anche le corde di questa varietà riempiono tutto l' S_5.

Sviluppando il determinante D si ricava:

$$\Theta_5 = f(ac-b^2)$$

e inoltre:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= f(2b-a-c)\\
\Psi_1 &= ce+2bd-2cd-ae\\
\Psi_2 &= cd+2ae-2be-ad\\
\Psi_3 &= c^2+2b^2-2bc-ac\\
\Psi_4 &= 2ac-bc-ab\\
\Psi_5 &= a^2+2b^2-2ab-ac
\end{aligned}$$

Le Ψ_i sono quindi delle quadriche. La Jacobiana del sistema da esse costituito risulta:

$$J=(2b-a-c)\begin{vmatrix} 2b-2c & c-a \\ c-a & 2a-2b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -c & 2c-b & 2a-2b-c \\ 4b-2c & -a-c & 4b-2a \\ 2c-2b-a & 2a-b & -a \end{vmatrix}$$

non è identicamente nulla. Perciò il sistema delle quadriche Ψ_i non può essere composto con una congruenza lineare in virtù di un teorema precedentemente dimostrato (vedi: [6]). Quindi si tratta di un sistema semplice e perciò omaloidico. Osserviamo che le prime tre Ψ_i risultano di primo grado rispetto a: *d, e, f,* mentre le tre successive possiedono solo le variabili *a,b,c.* Pertanto ponendo:

$$\begin{aligned}
a^2+2b^2-2ab-ac &= \rho\alpha\\
2ac-bc-ab &= -\rho\beta\\
c^2+2b^2-2bc-ac &= \rho\gamma
\end{aligned}$$

ed osservando che se $\frac{-1}{\rho} = (2\beta - \alpha - \gamma)^3$, sommando membro a membro dopc aver raddoppiato la seconda uguaglianza, si ha:

$$(2b - a - b)^2 \quad (2\beta - \alpha - \gamma)^2 = 1$$

Si ottiene cosi una perfetta inversione del sistema:

$$\begin{aligned} \sigma a &= \pm (\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta - \alpha\gamma) \\ \sigma b &= \mp (2\alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\beta) \\ \sigma c &= \pm (\gamma^2 + 2\beta^2 - 2\beta\gamma - \alpha\gamma) \end{aligned}$$

in cui vanno presi solo i segni superiori o inferiori e quindi si ottiene sempre lc stesso punto di S_r.

I punti uniti della trasformazione omalòidica sono i punti della varietà bas(del sistema generato dalle ipersuperficie cubiche estratte dalle seguenti propor zioni:

$$\frac{a^2 + 2b^2 - 2ab - ac}{a} = \frac{2ac - be - ab}{-b} = \frac{c^2 + 2b^2 - 2bc - ac}{c} = \tag{24}$$

$$= \frac{cd + 2ae - 2be - ad}{-d} = \frac{ce + 2bd - 2cd - ae}{e} = \frac{f(2b - a - b)}{-f}$$

Si tratta di $\binom{6}{2} = 15$ cubiche. Ponendo nelle (24): $a = 1$, $b = \eta$, $d = \varphi$ s ricava: $c = \eta^2$, $e = \eta\, \varphi$, $f = 0$, cioè le equazioni parametriche (23). Anche $a = b = c$, $d = e = \xi$, $f = \zeta$ soddisfano le (24) e verificano il Corollario C.

III) Consideriamo il sistema lineare di quadriche dell' S_5:

$$\lambda_0 (ad - bc) + \lambda_1 (af - be) + \lambda_2 (a^2 - b^2) + \lambda_3 (cf - de) + \lambda_4 (ac - bd) +$$
$$+ \lambda_5 (ae - bf) = 0$$

Questo sistema possiede una varietà base formata da due piani sghembi d equazioni:

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ d - c &= 0 \\ e - f &= 0 \end{aligned} \qquad \text{ed} \qquad \begin{aligned} a + b &= 0 \\ d + c &= 0 \\ e + f &= 0 \end{aligned}$$

Ovviamente le corde che congiungono due punti presi sui due piani riempiono tutto l' S_5. Pertanto la Jacobiana del sistema lineare ha caratteristica 5. Costruito il determinante D si trova:

$$\Theta_5 = 2\,(ad - bc)\;(b^2 - a^2)$$

e inoltre:

$$\Psi_0 = b \;,\; \Psi_1 = -a \;,\; \Psi_2 = d \;,\; \Psi_3 = -c \;,\; \Psi_4 = f \;,\; \Psi_5 = -e$$

Siamo quindi di fronte a sei iperpiani, il cui sistema lineare è ovviamente semplice ed omaloidico. In questo caso speciale la trasformazione birazionale diventa una omografia data dalle seguenti equazioni, in cui si devono scegliere solo i segni superiori od inferiori:

$$\begin{array}{lll} b = \pm\,\rho\alpha & a = \pm\,\rho\beta & d = \pm\,\rho\gamma \\ c = \pm\,\rho\delta & f = \pm\,\rho\epsilon & e = \pm\,\rho\chi \end{array}$$

i cui punti uniti sono dati dalla intersezione delle 15 quadriche estratte dalle proporzioni:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{c}{d} = \frac{f}{e} = \frac{e}{f}$$

Ora i piani base: $a = \pm b$, $d = \pm c$, $e = \pm f$ conducono all'identità: $\pm 1 = \pm 1 = \pm 1 = \pm 1 = \pm 1 = \pm 1$, che soddisfa tutte le precedenti proporzioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERTINI, E. *"Sui sistemi lineari"*. Rend. Istit. Lombardo – 15 (2) 1880 – Milano.

[2] BONFERRONI, G.: *"Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare"*. R. Acc. Scienze di Torino vol. 50 – 1914-15, 425-438.

[3] TERRACINI, A.: *"Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ed una varietà"*. R. Acc. Scienze di Torino. 51 (1916), 55 (1919-20), 695-714 e 480-500.

[4] MURACCHINI, L.: *"Sulle varietà* V_5 *i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria"*. (parte II), Riv. Mat. Univ. di Parma, 3, (1952), 75-89.

[5] XAMBO', S.: *"On projective varieties of minimal degree"*. Collectanea Mathematica – vol. XXXII Fasc. 2 – 1981 – Barcelona. 149-163.

[6] DEGOLI, L.: *"Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla"*. Collectanea Mathematica – Vol. XXXIII fasc. 2 – 1982 – 125-138. Barcelona.

[7] DEGOLI, L.: *"Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle"*. Demonstratio Mathematica n° 3 Vol. 10 – 1983 – 723-733. Warszawa.

[8] DEGOLI, L.: *"Sui sistemi lineari di quadriche riducibili ed irriducibili a Jacobiana identicamente nulla"*. Collectanea Mathematica – vol. XXXV Fasc. 2 – 1984 – 131-147. Barcelona.

Prof. DEGOLI Lando
Via Berengario n° 82/C
41012 CARPI (Modena)
(Italy)