ESTRUCTURAS ORDENADAS RELACIONADAS CON EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA

por

B. CASCALES*

ABSTRACT

This paper is devoted to the study of some problems and structures concerning with the Closed Graph Theorem. We study the topological vector spaces generated by completing sequences and as a consequence we characterize, in this context, the spaces which are locally complete. We introduce the quasi $L_\Lambda B$-spaces, $\Lambda \subset (0,1]$, and we relate them with the classes of webbed spaces introduced by De Wilde, and the class of spaces with bounded web studied by the author in a previous paper. For a wide class of domain spaces, the strictly Λ-barrelled spaces, we give localization and closed graph theorems when the range spaces are the quasi-$L_\Lambda B$-spaces, as well as some lifting properties. When $\Lambda = \{1\}$ our results include that of Valdivia for quasi-LB-spaces. A localization result for certain subsets of continuous linear mappings from a strictily Λ-barrelled space into a quasi-$L_\Lambda B$-space is presented. This result allow us to obtain localization properties for subsets of linear mappings with values in inductive limits that extend previous results by Köthe and De Wilde. New results of localization of bounded subsets in generalized inductive limits are also given.

1.– INTRODUCCION Y TERMINOLOGIA

Todos los espacios vectoriales topológicos (brevemente EVT) considerados aquí son Hausdorff y están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales ó complejos. Denotaremos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos y por $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de las sucesiones de enteros positivos. Si Λ es un subconjunto de $(0,1]$, diremos que un conjunto B de un espacio vectorial es absolutamente Λ-convexo si es absolutamente p-convexo para algún $p \in \Lambda$. Un EVT E es localmente Λ-convexo si tiene una base de entornos del origen formada por conjuntos

* Este artículo constituye parte de la tesis doctoral del autor, realizada bajo la dirección del profesor M. Valdivia.

absolutamente Λ-convexos. Si $\Lambda = \{p\}$, $p \in (0,1]$, (resp. $\Lambda = (0,1]$) hablaremos simplemente de conjuntos absolutamente p-convexos y espacios localmente p-convexos (resp. conjuntos absolutamente semiconvexos y espacios localmente semiconvexos). Si A es un subconjunto de un espacio vectorial E denotaremos por $< A >$ el espacio vectorial generado por A, y por $\Gamma_p A$ la envoltura absolutamente p-convexa de A,$p\epsilon(0,1]$. Si E es un EVT y A es un conjunto absolutamente p-convexo y acotado de E denotaremos por E_A a $<A>$ dotado de la p-norma $p_A(x) = \inf \{ \lambda^p : x \epsilon \lambda A, \lambda \geqslant 0 \}$. A es un p-disco de Banach si E_A es completo. Referencias básicas para notación y conceptos son [10] y [12].

De las soluciones dadas a la conjetura de Grothendieck, [9], concerniente al Teorema de la Gráfica Cerrada, tal vez la más conocida es la de los espacios con red de De Wilde [5], [6]. Recientemente, M. Valdivia ha introducido en [19] la clase de espacios cuasi-LB, que también da solución a la conjetura de Grothendieck y simplifica la teoría de espacios con red de De Wilde, siendo sus ideas bastante próximas a las del clásico teorema de Banach [1].

El propósito de este artículo es desarrollar las ideas de [19] en el caso de EVT dotados de una estructura ordenada dada a través de una familia de subconjuntos absolutamente Λ-convexos, y dar nuevas aplicaciones de los teoremas de gráfica cerrada y localización.

En el epígrafe siguiente estudiamos los espacios generados por sucesiones completantes de un EVT. A continuación introducimos los espacios cuasi-$L_\Lambda B$, estudiamos sus propiedades de estabilidad, y los relacionamos con los espacios con red de De Wilde [5], [6] y con los espacios con red acotada estudiados por el autor en [3]. Los espacios estrictamente Λ-tonelados son estudiados en el cuarto epígrafe; para el estudio de sus propiedades de estabilidad damos algunos resultados concernientes al producto tensorial de espacios localmente semiconvexos. Establecemos teoremas de gráfica cerrada y localización para espacios estrictamente Λ-tonelados y espacios cuasi-$L_\Lambda B$, así como algunas propiedades de levantamiento. En el caso $\Lambda = \{1\}$ nuestros resultados incluyen los dados por Valdivia en [19]. Como aplicación de los resultados establecidos, obtenemos propiedades de localización para conjuntos de aplicaciones lineales continuas que nos permiten extender otras previas de Köthe [11] y De Wilde [5], [6], así como nuevos resultados de localización para subconjuntos acotados en ciertos límites inductivos generalizados. El artículo finaliza con un epígrafe dedicado a ejemplos y contraejemplos que ponen de manifiesto el comportamiento de las clases de espacios estudiadas, y que muestran que los resultados establecidos aquí extienden propiamente otros ya conocidos.

2.– SUCESIONES ESTRICTAMENTE COMPLETAS Y F-ESPACIOS ASOCIADOS

En esta sección estudiamos como generar espacios metrizables, y más concretamente F-espacios localmente Λ-convexos, a partir de ciertas sucesiones de conjuntos de un EVT. Trabajaremos con las siguientes nociones:

DEFINICION 1: *Sea F un EVT. Una sucesión decreciente de subconjuntos de F, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, se dice que es:*

(a) Absolutamente Λ-convexa, si cada A_n es absolutamente Λ-convexo.

(b) Acotada, [3], si para cada entorno del origen U en F, existe un entero positivo n_u y un escalar $\rho_u > 0$ tal que $A_{n_u} \subset \rho_u U$.

(c) Completante, [6, p. 48], si existe una sucesión de escalares $\lambda_k > 0$ tales que si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$ y $x_k \in A_k$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge en F.

(d) Estrictamente completa [6, p. 49], si es completante y la sucesión (λ_k) se puede escoger de manera que $\sum_{k=m}^{\infty} \mu_k x_k \in A_m$, $m = 1, 2, \ldots$

En (c) (resp. (d)) a (λ_k) se le llama sucesión de escalares asociada (resp. estrictamente asociada) a (A_k).

Toda sucesión completante es acotada [6, prop. IV. 1. 7]. La sucesión (A_n) es acotada en F si, y solo si, para cada subconjunto finito $H_k \subset A_k$, $k = 1, 2, \ldots$; el conjunto $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ es acotado en F.

EJEMPLOS 2: *Si F es un EVT metrizable y (V_n) es una base decreciente de entornos del origen, entonces (V_n) es acotada. Si además F es completo y $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces (V_n) es completante. Si además F es localmente Λ-convexo con V_n absolutamente p_n-convexo $p_n \in \Lambda$, (p_n) decreciente, entonces para cada acotado $A \subset F$ la sucesión $(\Gamma_{p_n} A)$ es completante y $(\overline{\Gamma_{p_n} A})$ es estrictamente completa–tomar $(\frac{1}{2^k})^{1/p_k}$ por sucesión de escalares asociada.*

Si (A_n) es una sucesión absolutamente Λ-convexa en F, no es restrictivo para nuestros propósitos suponer que cada A_n es un conjunto absolutamente p_n-convexo, $p_n \in \Lambda$, siendo (p_n) una sucesión decreciente. A una tal (p_n) la llamaremos sucesión de convexidad asociada a (A_n).

TEOREMA 3: *Sea $F[\mathfrak{X}]$ un EVT, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ una sucesión de conjuntos absolutamente Λ-convexa y (p_n) una sucesión de convexidad asociada a (A_n).*

(a) *Si (A_n) es acotada, la sucesión $\{C_k := (\frac{1}{2^k})^{1/p_k} A_k : k = 1, 2, \ldots\}$ es base de entornos del origen para una topología $\mathcal{A}$ en F, más fina que $\mathfrak{X}$, con la que F es un grupo aditivo metrizable. Si $L := \bigcap_{k=1}^{\infty} \langle A_k \rangle$, entonces L con la topología inducida por es un EVT metrizable y localmente Λ-convexo.*

(b) *Si además (A_n) es estrictamente completa, entonces $F[\mathcal{A}]$ es un grupo aditivo metrizable y completo, y $L[\mathcal{A}]$ es un F-espacio localmente Λ-convexo.*

Demostración: (a) $\{C_k : k = 1, 2, \ldots\}$ es una base de filtro en F con las propiedades: $0 \in C_k$, y $C_{k+1} - C_{k+1} \subset C_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Así, $\{C_k : k = 1, 2, \ldots\}$ es base de entornos del origen en F para una única topología $\mathcal{A}$, compatible con la estructura de gurpo aditivo de F. De la acotación de (A_n) se sigue que $\mathcal{A} \geqslant \mathfrak{X}$. De otra parte puesto que $C_k \cap L$ es absolutamente Λ-convexo y absorbente en L,k = 1, 2, . . . , L con la topología inducida por $\mathcal{A}$ es un EVT metrizable y localmente Λ-convexo.

(b) Se ahora (A_n) una sucesión estrictamente completa. Para probar que $F[\mathcal{A}]$ es completo es suficiente probar que si $y_k \in C_k$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ converge en $F[\mathcal{A}]$. Para una tal (y_k) existen $x_k \in A_k$ tales que $y_k = (\frac{1}{2^k})^{1/p_k} x_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $S_m = \sum_{k=1}^{m} y_k$. De la convexidad de cada A_k se obtiene.

$$S_m - S_n \in (\frac{1}{2^k})^{1/p_k} A_k \text{ si } m \geqslant n \geqslant k, \quad [A]$$

Si (λ_k) es una sucesión de escalares estrictamente asociada a (A_n), existe una sucesión de naturales $1 \leqslant q(1) < q(2) < \ldots < q(k) < \ldots$ tales que

$$(\frac{1}{2^{q(k)}})^{1/p_{q(k)}} \leqslant \lambda_k \cdot (\frac{1}{2^k})^{1/p_k}, \ k = 1, 2, \ldots$$

En particular se tiene que

$$S_{q(r+1)} - S_{q(r)} \in \lambda_r (\frac{1}{2^r})^{1/p_r} A_r, \ r = 1, 2, \ldots \quad [B]$$

y de aquí se obtiene que $\sum_{r=1}^{\infty} (S_{q(r+1)} - S_{q(r)})$ converge en $F[\mathfrak{X}]$, ó lo que es lo mismo que la subsucesión $(S_{q(r)})$ de (S_m) es convergente en $F[\mathfrak{X}]$. De otra parte [A] nos da que (S_m) es una sucesión de Cauchy en $F[\mathcal{A}]$ y por tanto en $F[\mathfrak{X}]$, siendo en consecuencia $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ convergente en $F[\mathfrak{X}]$ a un punto que llamaremos y. Veamos que la convergencia de la serie es en $F[\mathcal{A}]$. Tomando en [B] un $k \in \mathbb{N}$ y $r \geqslant k$ tenemos que

$$(2^k)^{1/p_k}(S_{q(r+1)} - S_{q(r)}) \in \lambda_r A_r$$

La completitud estricta de (A_n) nos da que $y - S_{q(k)} \in C_k$, $k = 1, 2, \ldots$ De esta forma podemos concluir que

$$y - S_k = (y - S_{q(k)}) + (S_{q(k)} - S_k) \in C_k + C_k \subset C_{k-1}, k = 2, 3, \ldots$$

y por tanto $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$ en $F[\mathcal{A}]$.

Que $L[\mathcal{A}]$ es un F-espacio localmente Λ-convexo se obtiene de (a) y de lo ya probado en (b) teniendo en cuenta que L es cerrado en $F[\mathcal{A}]$.

Q.E.D.

NOTA 4: En la prueba anterior se ha obtenido que si (A_n) es absolutamente Λ-convexa y completamente en $F[\mathfrak{X}]$ con sucesión de convexidad asociada (p_n), entonces la sucesión $\lambda_k = (\frac{1}{2^k})^{1/p_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, puede tomarse como sucesión de escalares asociada a (A_n).

Es interesante conocer en que EVT se puede pasar de sucesiones acotadas a sucesiones completantes o estrictamente completas. Para el concepto de EVT localmente completo referenciamos a [7].

PROPOSICION 5: *Sea $F[\mathfrak{X}]$ un EVT localmente completo y $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ una sucesión absolutamente Λ-convexa en F. Son equivalentes:*

(i) La sucesión (A_n) es acotada en $F[\mathfrak{X}]$.

(ii) La sucesión (A_n) es completante en $F[\mathfrak{X}]$.

(iii) La sucesión de clausuras $(\overline{A_n})$ es estrictamente completa en $F[\mathfrak{X}]$.

Demostración: Sea (p_n) una sucesión de convexidad asociada a (A_n).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Veamos que si $x_n \in A_n$ y $|\mu_n| \leq (\frac{1}{2^n})^{1/p_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$ converge en $F[\mathfrak{X}]$. Para una tal (x_n) sea $A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$. La acotación de (A_n) nos da que $(\Gamma_{p_n} A)$ es una sucesión acotada en $F[\mathfrak{X}]$. En el espacio generado por A, F_A, la sucesión $\{(\frac{1}{2^k})^{1/p_k} \Gamma_{p_k} A : k = 1, 2, \ldots\}$ es base de entornos del origen para una topología $\mathcal{A}$, más fina que la inducida por $\mathfrak{X}$, con la que F_A es un EVT matrizable y localmente Λ-convexo, teorema 3. (a). Como $F[\mathfrak{X}]$ es localmente completo, la inmersión $i: F_A[\mathcal{A}] \hookrightarrow F[\mathfrak{X}]$ se extiende a una aplicación lineal continua $\hat{i}: \hat{F}_A[\hat{\mathcal{A}}] \longrightarrow F[\mathfrak{X}]$ definida en la complección de $\hat{F}_A[\hat{\mathcal{A}}]$, [7, theorem 1]. La sucesión de clausuras $(\overline{\Gamma_{p_n} A})$ en $\hat{F}_A[\hat{\mathcal{A}}]$ es estrictamente completa en este espacio, con sucesión de escalares asociada $((\frac{1}{2^n})^{1/p_n})$. De la continuidad de $\hat{i}$ y de la inclusión $A \subset \bigcap_{n}^{\infty} \hat{i}(\overline{\Gamma_{p_n} A})$

se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$ converge en $F[\mathfrak{X}]$ si $|\mu_n| \leqslant (\frac{1}{2^n})^{1/p_n}$, $n = 1, 2, \ldots$
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si (A_n) es completante entonces es acotada. Obviamente $(\overline{A_n})$ es también acotada. Por (i) $\Rightarrow$ (ii) la sucesión $(\overline{A_n})$ es completante con sucesión de escalares asociada $((\frac{1}{2^n})^{1/p_n})$, la que se comprueba que está estrictamente asociada a $(\overline{A_n})$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Es consecuencia inmediata de la proposición IV.1.7 de [6].

Q.E. D.

COLORARIO 1.5.: *Para un EVT F las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) F es localmente completo.
(ii) Cada sucesión absolutamente Λ-convexa $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots, \Lambda \subset (0, 1]$, acotada en F y con cada A_n cerrado es estrictamente completa.
(iii) Cada conjunto absolutamente p-convexo A, $p \in (0, 1]$, cerrado y acotado de F es un p-disco de Banach.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) se sigue directamente de la proposición 5. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Para $\Lambda = \{p\}$ y $A_n = A$, $n = 1, 2, \ldots$, el ser (A_n) estrictamente completa significa que el espacio p-normado F_A es un p-Banach. (iii) $\Rightarrow$ (i) Inmediato tomando $p = 1$.

Q.E.D.

Una sucesión (p_n) en Λ diremos que es una Λ-sucesión si: (p_n) es decreciente y $\lim p_n = \inf \Lambda$ obligando a que $p_n = \inf \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si $\inf \Lambda \in \Lambda$.

COROLARIO 2.5: *Sea F un espacio localmente Λ-convexo y localmente completo. Para cada Λ-sucesión (p_n) en Λ, y para cada acotado A de F la sucesión $(\overline{\Gamma_{p_n} A})$ es estrictamente completa en F.*

Demostración: La sucesión $(\Gamma_{p_n} A)$ es acotada en F. El resultado se sigue de la proposición 5.

Q.E.D.

El corolario 2.5 es la versión general del ejemplo 2, cuando F es un F-espacio localmente Λ-convexo. Para este último tipo de espacios el resultado anterior se puede mejorar extraordinariamente. Denotaremos por $\ell_0 = \cap \{\ell^p \colon p > 0\}$, ver [10, p. 121].

PROPOSICION 6: *Sea F un F-espacio localmente Λ-convexo. Si (x_n) es una sucesión acotada de F y $(\mu_n) \in \ell_0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$ es rapidamente conver-*

gente en F, i.e., existe un disco de Banch D en F tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$ *converge en* F_D.

Demostración: F es isomorfo a un subespacio cerrado de un producto $\Pi\ \{F_n: n = 1, 2, \ldots\}$ donde cada F_n es un espacio p_n-Banach, $p_n \in \Lambda$. Es suficiente hacer la demostración en el caso $F = \Pi F_n$. Sea $(\mu_n) \in \ell_0$ y (x_n) una sucesión acotada de $F = \Pi F_n$.

Si $\pi_j: \Pi F_n \longrightarrow F_j$ es la j-ésima proyección, $(\pi_j(x_n))$ es una sucesión acotada en F_j. La sucesión $(|\mu_n|^{1/2}) \in \ell_0$; la prueba de la proposición 6 de [14] nos da la existencia de un disco de Banach $D_j \subset F$ para el que se tiene

$$(|\mu_n|^{1/2}\, \pi_j(x_n)) \subset D_j.$$

El producto $D = \Pi\ \ D_j\ : J = 1, 2, \ldots$ es un disco de Banach de F para el que se tiene que $(|\mu_n|^{1/2} x_n) \subset D$. Como quiera que $(|\mu_n|^{1/2}) \in \ell^1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|\, x_n$ es normalmente convergente en F_D y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$ converge en F_D.

Q.E.D.

PROPOSICION 7: *Sea F un espacio vectorial y* $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ *dos topologias vectoriales en F tales que* $\mathfrak{X}_2 \geqslant \mathfrak{X}_1$ *y* $\mathfrak{X}_2$ *tiene una base entornos del origen cerrados para* $\mathfrak{X}_1$. *Si* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ *es una sucesión absolutamente Λ-convexa en F y estrictamente completa en* $F[\mathfrak{X}_1]$, *entonces* (A_n) *es estrictamente completa en* $F[\mathfrak{X}_2]$.

Demostración: Si (p_n) es una sucesión de convexidad asociada a (A_n), la sucesión $\{(\frac{1}{2^k})^{1/p_k} A_k : k = 1, 2, \ldots\}$ es base de entornos del origen en F para una topologia $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \geqslant \mathfrak{X}_1$, para la que $F[\mathcal{A}]$ es un grupo aditivo metrizable y completo, teorema 3.(b). Vamos a probar que $\mathcal{A} \geqslant \mathfrak{X}_2$. Será suficiente ver que id: $F[\mathcal{A}] \longrightarrow F[\mathfrak{X}_2]$ es continua en el origen. Sea V un $\mathfrak{X}_2$-entorno del origen en F y U un $\mathfrak{X}_2$-entorno del origen equilibrado y $\mathfrak{X}_1$-cerrado con $U - U \subset V$. Como $\mathcal{A} \geqslant \mathfrak{X}_1$ cada múltiplo escalar ρU, $\rho \in \mathbb{K}$, es $\mathcal{A}$-cerrado. Como $F[\mathcal{A}]$ es un espacio de Baire y $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 U$ tiene punto interior en $F[\mathcal{A}]$. La diferencia $n_0 U - n_0 U$ es un entorno del origen en $F[\mathcal{A}]$, y así para un adecuado $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(\frac{1}{2^k})^{1/p_k} A_k \subset U - U \subset V$$

quedando probado que $\mathcal{A} \geqslant \mathfrak{X}_2$.

Para $|\mu_n| \leqslant (\frac{1}{2^n})^{1/p_n}$ y $x_n \in A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, la prueba del teorema 3.(b) nos da que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$ converge en $F[\mathcal{A}]$. Es claro ahora que si (λ_k) es una sucesión estrictamente asociada a (A_n) para $F[\mathfrak{X}_1]$ con $0 < \lambda_k \leqslant (\frac{1}{2^k})^{1/p_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces (λ_k) está estrictamente asociada a (A_n) para $F[\mathfrak{X}_2]$.

Q.E.D.

3.– ESPACIOS CUASI-L_ΛB Y ESPACIOS CON RED

En $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ consideramos la siguiente relación de orden $\leqslant$, para $\alpha = (a_n)$ y $\beta = (b_n)$ diremos que $\alpha \leqslant \beta$ si y solo si $a_n \leqslant b_n$ para cada entero positivo n.

DEFINICION 8: *Dado $\Lambda \subset (0, 1]$, una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de un EVT $F[\mathfrak{X}]$ es una familia $\{F_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de subespacios de F y una familia de subconjuntos $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, $A_\alpha \subset F_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con las siguientes propiedades:*

(a) Cada F_α es un F-espacio localmente Λ-convexo para una topologia $\mathfrak{X}_\alpha$ más fina que la inducida por $\mathfrak{X}$ en F_α y A_α es un acotado de $F_\alpha[\mathfrak{X}_\alpha]$.

(b) Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $\alpha \leqslant \beta$ se tiene $A_\alpha \subset A_\beta$ y $F_\alpha \subset F_\beta$ siendo la inmersión $F_\alpha[\mathfrak{X}_\alpha] \longrightarrow F_\beta[\mathfrak{X}_\beta]$ continua.

(c) $\cup \{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = F$.

Un espacio con una cuasi-$L_\Lambda B$-representación diremos que es un espacio cuasi-$L_\Lambda B$.

Obviamente todo F-espacio localmente Λ-convexo es un espacio cuasi-L_ΛB. Para $\Lambda = \{p\}$ $p \in (0, 1]$, hablaremos simplemente de espacios cuasi-LpB. F es un espacio cuasi-LpB si y sólo si existe una familia $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de p-discos de Banach en F tal que:

$$\text{(a) } A_\alpha \subset A_\beta \text{ si } \alpha \leqslant \beta \text{ en } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \text{ (b) } \cup \{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = F.$$

Para p=1 los espacios cuasi-L_1 B son los espacios cuasi-LB de Valdivia [19].

TEOREMA 9: *Para un EVT $F[\mathfrak{X}]$ son equivalentes:*

(i) $F[\mathfrak{X}]$ es un espacio cuasi-$L_\Lambda B$.

(ii) Existe una familia $\mathfrak{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}: k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de F tal que:

(a) Cada $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ es absolutamente Λ-convexo y $C_{n_1 n_2 \ldots n_k} \subset C_{m_1 m_2 \ldots m_k}$ si $n_j \leqslant m_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

(b) Para cada $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *se tienen las inclusiones* $C_{n_1} \supset C_{n_1 n_2} \supset \ldots \supset \supset C_{n_1 n_2 \cdots n_k} \supset \ldots$ *siendo esta sucesión estrictamente completa en* $F[\mathfrak{X}]$.

(c) $\cup \{ \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n_1 n_2 \cdots n_k} : \alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \} = F.$

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una cuasi-L_ΛB-representación de F y (p_n) una Λ-sucesión en Λ. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la sucesión $(\overline{\Gamma_{p_n} A_\alpha})$, donde las clausuras están calculadas en $F_\alpha[\mathfrak{X}_\alpha]$, es estrictamente completa en este espacio, y por tanto en $F[\mathfrak{X}]$, con sucesión de escalares estrictamente asociada $((\frac{1}{2^n})^{1/p_n})$ corolario 2.5. Para los enteros positivos k, n_1, $n_2, \ldots, n_k$ ponemos

$$C_{n_1 n_2 \cdots n_k} = \cup \{ \overline{\Gamma_{p_k} A_\alpha} : \alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, a_j = n_j, j = 1, 2, \ldots, k \}$$

y $\mathfrak{W} = \{C_{n_1 n_2 \cdots n_k} : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$. Obviamente $\mathfrak{W}$ satisface (a) y dado que para $\alpha = (n_k)$ se tiene que $A_\alpha \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n_1 n_2 \cdots n_k}$, también se satisface (c). Veamos que se satisface (b). Sea $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y tomemos $x_k \in C_{n_1 n_2 \cdots n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Para todo $j \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_j = (a_n^j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $a_\ell^j = n_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, j$, de forma que $x_j \in \overline{\Gamma_{p_j} A_{\alpha_j}}$. Para cada $\ell, m \in \mathbb{N}$ ponemos

$$b_\ell^m = \text{máx} \{ a_\ell^j : j = m, m+1, \ldots \}$$

que es obviamente finito, y $\beta_m = (b_\ell^m)$. Tenemos $\beta_m \geqslant \alpha_j$, $j = m, m+1, \ldots$ y $b_\ell^m = n_\ell$ si $\ell = 1, 2, \ldots, m$; $m = 1, 2, \ldots$ Así se obtiene que $x_j \in \overline{\Gamma_{p_j} A_{\beta_m}}$ para $j = m, m+1, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$ Si tomamos $0 \leqslant \mu_n \leqslant (\frac{1}{2^n})^{1/p_n}$ es claro que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge en $F[\mathfrak{X}]$ y que

$$\sum_{k=m}^{\infty} \mu_k x_k \in \overline{\Gamma_{p_m} A_{\beta_m}} \subset C_{n_1 n_2 \cdots n_m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

quedando así probado que $(C_{n_1 n_2 \cdots n_k})$ es estrictamente completa.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Para cada $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la sucesión $(C_{n_1 n_2 \cdots n_k})$ tiene asociado un F-espacio localmente Λ-convexo $F_\alpha[\mathfrak{X}_\alpha]$ en el que $A_\alpha = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ es un acotado, teorema 3.(b). Las familias $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ nos dan una cuasi-L_ΛB-representación de $F[\mathfrak{X}]$.

Q.E.D.

Para el concepto de red en un conjunto referenciamos a [6]. Una red $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ en un EVT F se dice que es: (a) Ordenada, [19], si para cualesquiera enteros positivos k, $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $m_1, m_2, \ldots, m_k$ tales que $n_j \leqslant m_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ se tiene que $C_{n_1 n_2 \cdots n_k} \subset C_{m_1 m_2 \cdots m_k}$. (b) Completante, [6], si cada sucesión $C_{n_1} \supset C_{n_1 n_2} \supset \ldots \supset C_{n_1 n_2 \cdots n_k} \supset \ldots$ es completante. (c) p-estricta, $p \in (0, 1]$, [14], si cada $C_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ es absolutamente p-convexo y cada sucesión $C_{n_1} \supset C_{n_1 n_2} \supset \ldots \supset C_{n_1 n_2 \cdots n_k} \supset \ldots$ es estrictamente completa.

COROLARIO 1.9. *Si F es cuasi-$L_\Lambda B$, entonces tiene una red ordenada completante.*

Demostración: Con las notaciones del teorema 9, si $\{F_\alpha \colon \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha \colon \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F y para los enteros positivos k, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ponemos

$$B_{n_1 n_2 \cdots n_k} = \cup \{A_\alpha : \alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ a_j = n_j,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$$

entonces $\mathcal{V} = \{B_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ es una red ordenada, que es completante puesto que tenemos $B_{n_1 n_2 \cdots n_k} \subset C_{n_1 n_2 \cdots n_k}$, k, $n_1\ n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

COROLARIO 2.9. *Un EVT F es un espacio cuasi-LpB si, y solo si, tiene una red ordenada p-estricta.*

Demostración: La condición suficiente es consecuencia inmediata del teorema 9. Reciprocamente, Si F es un espacio cuasi-LpB la familia $\mathcal{W}$ construida en el teorema 9 es en este caso una red ordenada p-estricta.

Q.E.D.

En conexión con el concepto de sucesión de conjuntos acotada hemos dado en [3] la siguiente:

DEFINICION 10: *Una red $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ en un EVT F se dice acotada si para cada $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la sucesión $(C_{n_1 n_2 \cdots n_k})$ es acotada en F.*

Cada EVT metrizable tiene una red acotada: Efectivamente, si (V_n) es una base de entornos del origen en F, entonces $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k} := n_1 V_1 \cap n_2 V_2 \cap \cap \ldots \cap n_k V_k : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$ es una red acotada en F. Cada EVT quasi-Suslín, K-Suslín ó con red completante tiene una red acotada, ver [3].

TEOREMA 11: *Para un espacio localmente Λ-convexo y localmente completo F son equivalentes:*

(i) F tiene una red acotada.

(ii) F es un espacio cuasi-$L_\Lambda B$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Por [3, theorem 5] existe una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de subconjuntos acotados de F que cubre y tal que $A_\alpha \subset A_\beta$ si $\alpha \leqslant \beta$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Si (p_n) es una Λ-sucesión en Λ, para cada $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la sucesión $(\overline{\Gamma_{p_n} A_\alpha})$ es estrictamente completa en F, corolario 2.5, y tiene asociado un F-espacio localmente Λ-convexo $F_\alpha[\mathfrak{T}\alpha]$, teorema 3.(b). $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Combinar el corolario 1.9 y [6, proposition IV.1.7].

Q.E.D.

COROLARIO 1.11. *Para un espacio localmente p-convexo y localmente completo F son equivalentes:*

(i) F tiene una red p-estricta.

(ii) F tiene una red completante.

(iii) F tiene una red acotada.

(iv) F es un espacio cuasi-LpB.

(v) F tiene una red ordenada p-estricta.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) y (v) $\Rightarrow$ (i) Obvias. (ii) $\Rightarrow$ (iii) Por [6, prop. IV.1.7]. (iii) $\Rightarrow$ (iv) Por el teorema 11. (iv) $\Rightarrow$ (v) Por el corolario 2.9.

Q.E.D.

La equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) en el corolario anterior ha sido obtenida recientemente por Valdivia, [19], en el caso localmente convexo, contestando así a una vieja cuestión de De Wilde [5, p. 123] en la que se demandaba si un espacio de Suslín sucesionalmente completo tiene ó no red estricta. En este orden de ideas los resultados anteriores dan respuestas positivas a esta cuestión en un contexto más general: de hecho refinando la prueba del teorema 9 se pueden caracterizar los espacios cuasi-$L_\Lambda B$ en términos análogos al corolario 2.9 y así obtener 1.11 en el caso localmente Λ-convexo. Recogemos en la siguiente proposición las propiedades de estabilidad de los espacios cuasi-$L_\Lambda B$.

PROPOSICION 12. *Sea $\Lambda \subset (0, 1]$ un conjunto fijo y F un EVT.*

(a) Si F es un espacio cuasi-$L_\Lambda B$ y G un subespacio tal que para cada disco de Banach $D \subset F$, $G \cap F_D$ es cerrado en F_D, entonces G es cuasi-$L_\Lambda B$.

(b) Si T: $F \longrightarrow G$ es lineal, continua y sobreyectiva con F cuasi-$L_\Lambda B$, entonces G es cuasi-$L_\Lambda B$.

(c) *Si* $\{F_m: m = 1, 2, \ldots\}$ *es una sucesión de subespacios cuasi-*$L_\Lambda B$ *que cubre F, entonces F es cuasi-*$L_\Lambda B$.

(d) *El producto numerable de espacios cuasi-*$L_\Lambda B$ *es cuasi-*$L_\Lambda B$.

(e) *Si* $\{F_m: m = 1, 2, \ldots\}$ *es una sucesión de subespacios cuasi-*$L_\Lambda B$ *de F, entonces* $\cap \{F_m: m = 1, 2, \ldots\}$ *es cuasi-*$L_\Lambda B$.

(f) *Sean* $\mathfrak{X}_1$ *y* $\mathfrak{X}_2$ *dos topologias vectoriales en F tales que* $\mathfrak{X}_2 \geqslant \mathfrak{X}_1$. *Si* $\mathfrak{X}_2$ *tiene una base de entornos del origen cerrados para* $\mathfrak{X}_1$ *y* $F[\mathfrak{X}_1]$ *es cuasi-*$L_\Lambda B$, *entonces* $F[\mathfrak{X}_2]$ *es cuasi-*$L_\Lambda B$.

Demostración. Usando la caracterización del teorema 9, tenemos que: (a) Se obtiene utilizando la proposición 6. (b) Se obtiene teniendo en cuenta que la imagen lineal y continua de una sucesión estrictamente completa es estrictamente completa. (e) Se obtiene combinando (a) y (d). (f) Es consecuencia de la proposición 7. (c) Sea $\{F^m_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A^m_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F_m. Dada una Λ-sucesión (p_n) en Λ, para cada $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ consideramos

$$B^n_\alpha = \overline{\Gamma_{p_n} A^1_\alpha} + \overline{\Gamma_{p_n} A^2_\alpha} + \ldots + \overline{\Gamma_{p_n} A^{a_1}_\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

donde los cierres $\overline{\Gamma_{p_n} A^i_\alpha}$ están calculados en F^i_α. Si F_α es el F-espacio localmente Λ-convexo asociado a la sucesión estrictamente completa (B^n_α) y definimos $A_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} B^n_\alpha$ entonces $\{F_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F. (d) Para cada j de un conjunto numerable J sea F_j un espacio con una cuasi-$L_\Lambda B$-representación $\{F^j_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A^j_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Sea $F = \Pi\{F_j: J \in J\}$ dotado de su topologia producto y $\varphi: J \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una biyección. La aplicación $\psi: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{J \times \mathbb{N}}$ dada por

$$\psi(\{a_n: n \in \mathbb{N}\}) = \{a_{\varphi(j,n)}: (j,n) \in J \times \mathbb{N}\}$$

es una biyección. Para $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, dado $j \in J$ definimos $\alpha_j = (a_{\varphi(j,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ y ponemos $F_\alpha = \Pi\{F^j_{\alpha_j}: j \in J\}$ con su topologia producto y $A_\alpha = \Pi\{A^j_{\alpha_j}: j \in J\}$. Las familias $\{F_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ nos dan una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F.

Q.E.D.

4.– ESPACIOS ESTRICTAMENTE Λ-TONELADOS

En el epígrafe siguiente estudiaremos teoremas de gráfica cerrada y localización en los que los espacios cuasi-$L_\Lambda B$ serán los espacios de llegada. Estudiamos aquí la clase de espacios de partida que intervendrán en estos teoremas: los espacios estrictamente Λ-tonelados.

DEFINICION 13. *Un EVT E es estrictamente Λ-tonelado si para cualquier red ordenada* $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ *en E y cualquier Λ-sucesión* (p_n) *en Λ, existe* $(r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $\overline{\Gamma_{p_n} C_{r_1 r_2 \ldots r_n}}$ *es entorno del origen en E, n = 1, 2, . . .*

Todo EVT de Baire es estrictamente Λ-tonelado. E es estrictamente Λ-tonelado sí y sólo sí para cada red ordenada $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ en E donde cada $C_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ es absolutamente Λ-convexo existe $(r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\overline{C_{r_1 r_2 \ldots r_n}}$ es entorno del origen, n = 1, 2, . . . Para $\Lambda = \{p\}$, $p \in (0, 1]$, hablaremos simplemente de espacios estrictamente p-tonelados. Para p = 1 los espacios estrictamente 1-tonelados son los espacios estrictamente tonelados de Valdivia [19].

PROPOSICION 14. *Sean E y F dos EVT.*
(i) Si E es estrictamente Λ-tonelado y $T: E \longrightarrow F$ *es lineal, continua y abierta, entonces F es estrictamente Λ-tonelado.*
(ii) Si F es un subespacio denso de E y estrictamente Λ-tonelado, entonces E es estrictamente Λ-tonelado.
(iii) Si E y F son estrictamente Λ-tonelados, entonces E x F también lo es.
(iv) Si E es estrictamente Λ-tonelado y F es un subespacio de codimensión numerable de E, entonces F es estrictamente Λ-tonelado.

Demostración: (i), (ii) y (iii) se obtienen facilmente.
(iv) Sea $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ una red ordenada en F y $(x_h) \subset E$ tal que $F + \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle = E$. Para $n, m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ ponemos

$$B_n = \Gamma\{nx_1, nx_2, \ldots, nx_n\} \quad \text{y} \quad A_{m_1 m_2 \ldots m_n} = C_{m_1 m_2 \ldots m_n} + B_{m_1}$$

$\mathcal{V} = \{A_{m_1 m_2 \ldots m_n}\}$ es una red ordenada en E, y por tanto dada una Λ-sucesión (p_n) existe $(r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\overline{\Gamma_{p_n} A_{r_1 r_2 \ldots r_n}}$ es entorno del origen en E, n = 1, 2, . . . La compacidad de B_{r_1} nos da que $\overline{\Gamma_{p_n} A_{r_1 r_2 \ldots r_n}} \subset \overline{\Gamma_{p_n} C_{r_1 r_2 \ldots r_n}} + B_{r_1}$, y por tanto $G_{r_1 r_2 \ldots r_n} := \langle \overline{\Gamma_{p_n} C_{r_1 r_2 \ldots r_n}} \rangle$ tiene codimensión finita en E. Así, si $F_{r_1 r_2 \ldots r_n} := \langle C_{r_1 r_2 \ldots r_n} \rangle$, entonces $\overline{F_{r_1 r_2 \ldots r_n}} \cap F$ tiene codimensión finita en F. Vamos a determinar una sucesión $(s_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $s_n \geqslant r_n$, tal que $\overline{F_{s_1 s_2 \ldots s_n}} \supset F$, n = 1, 2, . . . Como $\overline{F_r} \cap F$ tiene codimensión finita en F, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$ tales que $\overline{F_{r_1}}^{1} \cap F + < y_1, y_2, \ldots, y_n > = F$. Por ser $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, unión creciente, existe $s_1 \geqslant r_1$ tal que $< y_1, y_2, \ldots, y_n > \subset F_{s_1}$ y así $F \subset \overline{F_{s_1}}$. Supongamos que hemos determinado $s_1 \geqslant r_1, \ldots, s_n \geqslant r_n$, tales que $\overline{F_{s_1 s_2 \ldots s_n}} \supset F$. Al ser $\overline{F_{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}}} \cap \cap F_{s_1 s_2 \ldots s_n}$ de codimensión finita en $F_{s_1 s_2 \ldots s_n}$, existe $s_{n+1} \geqslant r_{n+1}$ tal que $\overline{F_{s_1 s_2 \ldots s_{n+1}}} \supset \overline{F_{s_1 s_2 \ldots s_n}} \supset F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\rho_n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{s_1} \cap G_{s_1 s_2 \ldots s_n} \subset \rho_n \overline{\Gamma_{p_n} C_{s_1 s_2 \ldots s_n}}$. Tenemos así que

$$\overline{\Gamma_{p_n} A_{s_1 s_2 \ldots s_n}} \cap G_{s_1 s_2 \ldots s_n} \subset (\overline{\Gamma_{p_n} C_{s_1 s_2 \ldots s_n}} + B_{s_1}) \cap G_{s_1 s_2 \ldots s_n} \subset$$
$$\subset 2^{1/p_n} \rho_n \overline{\Gamma_{p_n} C_{s_1 s_2 \ldots s_n}}$$

Así $\overline{\Gamma_{p_n} C_{s_1 s_2 \ldots s_n}}$ es un entorno del origen en $G_{s_1 s_2 \ldots s_n}$, y de las inclusiones $F \subset \overline{F_{s_1 s_2 \ldots s_n}} \subset \overline{G_{s_1 s_2 \ldots s_n}}$, se obtiene que $\overline{\Gamma_{p_n} C_{s_1 s_2 \ldots s_n}} \cap F$ es entorno del origen en F.

Q.E.D.

Incluso para espacios estrictamente tonelados, [19], no se sabe si el producto arbitrario de estos es de nuevo estrictamente tonelado. Sin embargo, como vamos a ver, cualquier potencia de un espacio estrictamente Λ-tonelado metrizable es de nuevo estrictamente Λ-tonelado. Para establecer esto necesitamos algunos resultados previos que desarrollamos a continuación.

Sean E y F dos espacios localmente semiconvexos con bases respectivas de entornos del origen absolutamente semiconvexos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$. Denotemos por $E \otimes F$ el producto tensorial de E y F, por $\Psi : E \times F \longrightarrow E \otimes F$ la aplicación bilineal canónica y para $A \subset E$ y $B \subset F$ sea $A \otimes B = \Psi(A \times B)$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ (resp. $V \in \mathcal{V}$) sea r_u (resp. r_v) un número positivo tal que U (resp. V) es absolutamente r_u-convexo (resp. absolutamente r_v-convexo). Se comprueba facilmente que

$$\mathcal{W} = \left\{ \Gamma_r (U \otimes V) : 0 < r \leqslant \min \{r_u, r_v\} , U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V} \right\}$$

en base de entornos del origen para una topologia localmente semiconvexa $\mathcal{S}$ en $E \otimes F$. $\mathcal{S}$ es la topologia localmente semiconvexa más fina que hace continua la aplicación bilineal Ψ. Usando ahora 3.6 de [16] se obtiene que $\mathcal{S}$ es separada. A $E \otimes F$ dotado de la topologia $\mathcal{S}$ lo denotaremos por $E \otimes_T F$.

Para un conjunto no vacio I, E^I denota el espacio $\Pi \{E_i : i \in I\}$, $E_i = E$ $i \in I$, dotado de su topologia producto. Para la aplicación bilineal continua $u : E \times F^I \longrightarrow (E \otimes_T F)^I$ dada por $u(x, (y_i)_{i \in I}) = (x \otimes y_i)_{i \in I}$, la universalidad del producto tensorial nos garantiza la existencia de una única aplicación lineal continua $F : E \otimes_T F^I \longrightarrow (E \otimes_T F)^I$ para la que $T \cdot \Psi = u$.

PROPOSICION 15. *La aplicación* $T: E \otimes_T F^I \longrightarrow (E \otimes_T F)^I$ *es un isomorfismo de espacios localmente semiconvexos sobre su imagen.*

Demostración: Sea $W = \Gamma_r (U \otimes \prod_{i \in I} U_i)$ donde U es un entorno del origen en E absolutamente r_u-convexo, y cada U_i es un entorno del origen en F absolutamente r_{u_i}-convexo siempre que $i \in H$, $H \subset I$ finito, $U_i = F$ si $i \notin H$, siendo $r \leqslant r_u$, r_{u_i}, $i \in H$. Es suficiente probar que para cualquier W en estas condiciones existe V entorno del origen en $(E \otimes_T F)^I$ tal que $T^{-1}(V) \subset W$.
Sea $\epsilon > 0$ tal que card (H). $\epsilon < 1$ y consideremos el entorno del origen $V = \prod_{i \in I} V_i$ donde $V_i = \epsilon^{1/r} \Gamma_r (U \otimes U_i)$ si $i \in H$ y $V_i = E \otimes F$ si $i \notin H$. Veamos que $T^{-1}(V) \subset W$. Sea $z' \in T^{-1}(V)$. Si $P_i: (E \otimes_T F)^I \longrightarrow E \otimes_T F$ es la i-ésima proyección, para cada $j \in H$ existen escalares μ_j^k y vectores $x_j^k \in U$ y $w_j^k \in U_j$, $k = 1, 2, \ldots, n_j$, tales que $\sum_{k=1}^{n_j} |\mu_j^k|^r \leqslant \epsilon$ siendo

$$P_j T(z') = \sum_{k=1}^{n_j} \mu_j^k x_j^k \otimes w_j^k$$

Para $k = 1, 2, \ldots, n_j$, sea $(w_i^{j,k})_{i \in I} \in F^I$ tal que $w_j^{j,k} = w_j^k$ y $w_i^{j,k} = 0$ si $i \neq j$, y pongamos

$$z_j = \sum_{k=1}^{n_j} \mu_j^k x_j^k \otimes (w_i^{j,k})_{i \in I}$$

Realicemos esta operación para cada $j \in H$ y definamos $z = \sum_{j \in H} z_j$. Un sencillo cálculo nos da que

$$z \in \left(\sum_{j \in H} \sum_{k=1}^{n_j} |\mu_j^k|^r \right)^{1/r} W$$

donde $\mu = \left(\sum_{j \in H} \sum_{k=1}^{n_j} |\mu_j^k|^r \right) \leqslant$ card (H) . $\epsilon < 1$. Si llamamos $t = z' - z$ y expresamos $t = \sum_{n=1}^{m} x_n \otimes (y_i^n)_{i \in I}$ donde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son linealmente independientes en E, para cada $j \in H$ se tiene que $\sum_{n=1}^{m} x_n \otimes y_j^n = 0$, y así § 9.6.(4) de [12] nos da que $y_j^1 = y_j^2 = \ldots = y_j^m = 0$ para $j \in H$. No es difícil comprobar ahora que para cada $\delta > 0$ se tiene $t \in \delta$. W, y así tomando $\delta = (1 - \mu)^{1/r}$ concluimos que $z' = z + t \in W$ terminando con esto la demostración.

Q.E.D.

En la siguiente proposición F es un espacio localmente semiconvexo con la siguiente propiedad: Si (A_n) es una sucesión en F de conjuntos cerrados absolutamente Λ-convexos tal que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que A_m es entorno del origen en F. En terminologia de Valdivia, [18], F es un espacio red-$\mathcal{A}$-tonelado donde $\mathcal{A}$ es la familia saturada de los espacios localmente Λ-convexos.

PROPOSICION 16. *Si E es un espacio localmente semiconvexo, metrizable y estrictamente Λ-tonelado, entonces $E \otimes_T F$ es estrictamente Λ-tonelado.*

Demostración: Supongamos que la propiedad no es cierta. Sea $\mathfrak{W} = \{C_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ una red ordenada en $E \otimes_T F$ y (p_n) una Λ-sucesión, tal que para cada $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $\overline{\Gamma_{p_m} C_{n_1 n_2 \dots n_m}}$ no es entorno del origen en $E \otimes_T F$. Sea (V_n) una base decreciente de entornos del origen absolutamente semiconvexos en E. Si para los enteros positivos $h, m_1, m_2, \dots, m_h$ ponemos

$$A_{m_1 m_2 \dots m_h} = \{y \in F\colon x \otimes y \in \overline{\Gamma_{p_n} C_{m_1 m_2 \dots m_h}} \text{ para todo } x \in V_{m_h}\}$$

entonces

$$F = \cup \{A_{m_1 m_2 \dots m_h}\colon \overline{\Gamma_{p_h} C_{m_1 m_2 \dots m_h}} \text{ no es entorno del origen en } E \otimes_T F\}$$

Efectivamente, dado $y \in F$ la familia

$$\mathfrak{V} = \{B_{m_1 m_2 \dots m_h} := \{x \in E\colon x \otimes y \in C_{m_1 m_2 \dots m_h}\}\}$$

es una red ordenada en E. Existe $(r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tal que $\overline{\Gamma_{p_n} B_{r_1 r_2 \dots r_n}}$ es entorno del origen en E, $n = 1, 2, \dots$ Sea $(s_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $s_n \geqslant r_n$, tal que $V_{s_n} \subset \overline{\Gamma_{p_n} B_{r_1 r_2 \dots r_n}}$ y sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\Gamma_{p_q} C_{s_1 s_2 \dots s_q}}$ no es entorno del origen en $E \otimes_T F$. No es dificil comprobar que $x \otimes y \in \overline{\Gamma_{p_q} C_{s_1 s_2 \dots s_q}}$ para todo $x \in V_{s_q}$ y así $y \in A_{s_1 s_2 \dots s_q}$.
Utilizando la propiedad de tonelación de F, obtenemos que para ciertos enteros positivos $m_1, m_2, \dots, m_k$, $A_{m_1 m_2 \dots m_k}$ es entorno del origen en F y $\overline{\Gamma_{p_k} C_{m_1 m_2 \dots m_k}}$ no es entorno del origen en $E \otimes_T F$. Tomando $r > 0$ menor que p_k y menor que el grado de convexidad de V_{m_k} se obtiene que

$$\Gamma_r (V_{m_k} \otimes A_{m_1 m_2 \dots m_k}) \subset \overline{\Gamma_{p_k} C_{m_1 m_2 \dots m_k}}$$

y así llegamos a un absurdo con el que acaba la demostración.

Q.E.D.

PROPOSICION 17. *Sea E un espacio metrizable, localmente semiconvexo y extrictamente Λ-tonelado. Si I es un conjunto no vacio, entonces E^I es estrictamente Λ-tonelado.*

Demostración: Para $F = \mathbb{K}$, el cuerpo, $E \otimes_T \mathbb{K}^I$ es estrictamente Λ-tonelado, proposición 16. Como $T{:}E \otimes_T \mathbb{K}^I \longrightarrow (E \otimes_T \mathbb{K})^I$ es un isomorfismo sobre su imagen, proposición 15, la aplicación $S{:}E \otimes_T \mathbb{K}^I \longrightarrow E^I$ dada por

$$S\Big(\sum_{n=1}^{m} x_n \otimes (y_i^n)_{i\in I}\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{m} r_i^n \cdot x_n\Big)_{i\in I}$$

es también un isomorfismo sobre su imagen. $G = S(E \otimes_T \mathbb{K})^I$ es estrictamente Λ-tonelado, proposición 14, y dado que G es denso en E^I una nueva aplicación de la proposición 14 nos da que E^I es estrictamente Λ-tonelado.

Q.E.D.

5.– TEOREMAS DE GRAFICA CERRADA, LOCALIZACION Y LEVANTAMIENTO

A lo largo de este epígrafe F es un EVT con una cuasi-$L_\Lambda B$-representación $\{F_\alpha\colon \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha\colon \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$; para una Λ-sucesión fija (p_n), $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ es la familia construida en F en el teorema 9 y asociada a la cuasi-$L_\Lambda B$-representación dada. Para $\alpha = (n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, F^α es el F-espacio localmente Λ-convexo asociado a la sucesión $(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})$ según el teorema 3.

TEOREMA 18 (Localización y gráfica cerrada). *Sea E un espacio estrictamente Λ-tonelado y F un espacio cuasi-$L_\Lambda B$. Si $T{:}E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal, entonces:*

(i) Existe $\alpha = (r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\overset{\circ}{\overline{T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_n})}} \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$

Si además T tiene gráfica cerrada (ó gráfica $(T) \cap E \times F_\alpha$ es cerrado para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y E es metrizable), entonces para cada $\alpha = (r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ satisfaciendo (i) se tiene:

(ii) $\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/p_n} \overset{\circ}{\overline{T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_n})}} \subset T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_n})$, $n = 1, 2, \ldots$

(iii) $T(E) \subset F^\alpha$ y $T{:}E \longrightarrow F^\alpha$ es continua.

En particular $T{:}E \longrightarrow F$ es continua.

Demostración: Sea $\mathcal{V} = \{B_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ la red ordenada en F que nos da el corolario 1.9. Si $\mathcal{V}' = \{T^{-1}(B_{n_1 n_2 \ldots n_k})\}$, entonces existe $\alpha = (r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\Gamma_{p_n} \overset{\circ}{\overline{T^{-1}(B_{r_1 r_2 \ldots r_n})}} \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$, y así $\overset{\circ}{\overline{T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_n})}} \neq \emptyset$, quedando establecido (i). De otra parte (iii) se sigue directamente de (ii) y la continuidad de $T: E \longrightarrow F$ es consecuencia inmediata de (iii).

(i) Haremos la demostración de el caso E metrizable – el caso general se reduce a este en forma análoga a como Valdivia reduce la proposición 11 a la proposición 10 en [19].

Sea $\alpha = (r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ como en (i) y para $k \in \mathbb{N}$ fijo sea (V_n) una base decreciente de entornos del origen en E tal que $V_n \subset \overset{\circ}{\overline{T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_{k+n}})}}$, $n = 1, 2, \ldots$ Dado $x \in E$ con $(2^k)^{1/p_k} x \in \overset{\circ}{\overline{T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_k})}}$ existe $x_k \in T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_k})$ tal que

$$y_1 = (2^k)^{1/p_k} x - x_k \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/p_{k+1}} . V_1$$

Procediendo por recurrencia determinamos dos sucesiones (y_m) y (x_{k+m}) tales que $x_{k+m} \in T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_{k+m}})$ siendo

$$y_{m+1} = y_m - \left(\frac{1}{2^{k+m}}\right)^{1/p_{k+m}} x_{k+m} \in \left(\frac{1}{2^{k+m+1}}\right)^{1/p_{k+m+1}} V_{m+1}$$

Utilizando que (y_m) es nula en E, un sencillo cálculo nos da

$$x = \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p_k} x_k + \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p_k} \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/p_{k+1}} x_{k+1} + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p_k} \left(\frac{1}{2^{k+m}}\right)^{1/p_{k+m}} x_{k+m} + \ldots$$

Para cada entero positivo j, $T(x_{k+j-1}) \in C_{r_1 r_2 \ldots r_{k+j-1}}$. Teniendo en mente la prueba del teorema 9, podemos determinar $\beta = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $b_j = r_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, de forma que $T(x_{k+j-1}) \in \overline{\Gamma_{p_{k+j-1}} A_\beta}$, $j = 1, 2, \ldots$ Así la serie

$$\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p_k} T(x_k) + \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p_k} \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/p_{k+1}} T(x_{k+1}) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p_k} \left(\frac{1}{2^{k+n}}\right)^{1/p_{k+n}} T(x_{k+n}) + \ldots$$

converge en F a un vector $u \in \overline{\Gamma_{p_k} A_\beta} \subset C_{r_1 r_2 \ldots r_k}$. Utilizando ahora que la gráfica de T corta a $E \times F_\beta$ en un cerrado se obtiene que $T(x) = u$ y así $x \in T^{-1}(C_{r_1 r_2 \ldots r_k})$.

Q.E.D.

Cuando E es metrizable el teorema anterior es cierto si suponemos que para cada disco de Banach $D \subset F$ la gráfica de T corta a $E \times F_D$ en un cerrado: observar que la serie construida en la demostración y que representa a T(x) converge en un cierto F_D, proposición 6.

M. Valdivia ha probado en [18] un teorema de localización y gráfica cerrada, en términos análogos a los del teorema 18, cuando E es un espacio totalmente $\mathcal{A}$-tonelado y F tiene una red completante $\mathcal{A}$-regular. Para la clase $\mathcal{A}$ de espacios localmente Λ-convexos, a los espacios totalmente $\mathcal{A}$-tonelados los llamaremos totalmente Λ-tonelados. La prueba de Valdivia, [18, theorem 3], puede adaptarse para una aplicación $T: E \longrightarrow F$ donde E es totalmente Λ-tonelado y F es cuasi-$L_\Lambda B$. Como veremos en la sección 7, nuestros resultados no pueden derivarse de estos de Valdivia, puesto que la clase de espacios estrictamente Λ-tonelados es estrictamente más amplia que la clase de espacios totalmente Λ-tonelados.

COROLARIO 1.18. *Si F es un espacio estrictamente Λ-tonelado y cuasi-$L_\Lambda B$, entonces F es un F-espacio localmente Λ-convexo.*

COROLARIO 2.18. *Si F es un espacio cuasi-$L_\Lambda B$, existe una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F, $\{F_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ y $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$, tal que para cualquier p-disco de Banach $A \subset F$ existe $\alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ de forma que $A \subset A_\alpha$.*

Demostración: Sean $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ y F^α como en el teorema 18. Para $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ pongamos $\alpha_1 = (a_{2n-1})$ y definamos

$$A_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} a_{2n} (F^{\alpha_1} \cap C_{a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}}) \text{ y } F_\alpha = F^{\alpha_1}$$

Usando el teorema 18 se comprueba que $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ y $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ es una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F con la propiedad requerida.

Q.E.D.

El colorario anterior, que para $\Lambda = \{1\}$ ha sido obtenido en [19], es una herramienta bastante útil en ciertas cuestiones: una aplicación al estudio de espacios localmente convexos debilmente K-analíticos puede encontrarse en [3].

COROLARIO 3.18. *Sea F un espacio localmente convexo. El bidual F'' $[\beta(F'', F')]$ es cuasi-LB si, y solo si, existe una familia de acotados $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ en F que cubre tal que $A_\alpha \subset A_\beta$ si $\alpha \leqslant \beta$ y para todo acotado $A \subset F$ existe $\alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ con $A \subset A_\alpha$.*

En el siguiente lema adaptamos ideas de A. y W. Robertson, ver [10, p. 182].

LEMA 19. *Sea E un EVT metrizable y $A \subset E$ precompacto. Para cualquier sucesión decreciente (p_n) en $(0, 1]$, existe una sucesión nula (x_n) en E y una sucesión de enteros positivos $0 := k_o < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ de forma que cada $z \in A$ se expresa como*

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2^i}\right)^{1/p_i} x_{k(i)}$$

donde para cada $i \in \mathbb{N}$, $k_{i-1} < k(i) \leq k_i$.

Demostración: Sea (U_n) una base decreciente de entornos del origen en E tal que $U_1 = E$. Pongamos $A_o = A$. Tomemos un conjunto finito $N_1 \subset A_o$ tal que $A \subset N_1 + (\frac{1}{2^2})^{1/p_2} U_2$ y sea $A_1 := (A_o - N_1) \cap (\frac{1}{2^2})^{1/p_2} U_2$. Procediendo por recurrencia y supuesto que hemos construido un precompacto A_{n-1}, determinamos un conjunto finito $N_n \subset A_{n-1}$ tal que $A_{n-1} \subset N_n + (\frac{1}{2^{n+1}})^{1/p_{n+1}} U_{n+1}$ y definimos $A_n = (A_{n-1} - N_n) \cap (\frac{1}{2^{n+1}})^{1/p_{n+1}} U_{n+1}$ que es de nuevo un conjunto precompacto.
Sea $0 =: k_o < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ una sucesión de enteros positivos tal que $k_n - k_{n-1}$ es el número de elementos de N_n. Si escribimos

$$(2^n)^{1/p_n} N_n = \{ x_{k_{n-1}+1}, \ldots, x_{k_n} \}$$

de la inclusión $(2^n)^{1/p_n} N_n \subset U_n$, $n = 1, 2, \ldots$, se obtiene que la sucesión $\{ x_h : n \in \mathbb{N} \} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2}, \ldots\}$ es nula en E. No es difícil probar ahora que dado $z \in A$, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $k(i) \in \mathbb{N}$, $k_{i-1} < k(i) \leq k_i$, tal que $z = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^{1/p_i} x_{k(i)}$.

Q.E.D.

LEMA 20. *Sea E un F-espacio localmente Λ-convexo y (x_n) una sucesión nula en E. Si (p_n) es una Λ-sucesión y $0 =: k_o < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces el conjunto*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i}\right)^{1/p_i} x_{k(i)} : k(i) \in \mathbb{N},\ k_{i-1} < k(i) \leq k_i,\ i \in \mathbb{N} \right\}$$

es un precompacto de E.

Demostración: Las series que intervienen en la definición de B son convergentes, proposición 6. Dado U entorno del origen en E absolutamente q-convexo, $q \in \Lambda$, y cerrado, existe $j \in \mathbb{N}$ de forma que $p_i < q$ si $i > j$ y $x_n \in U$ si $n > k_j$. Un sencillo cálculo nos da

$$B \subset \{ \sum_{i=1}^{j} (\frac{1}{2^i})^{1/p_i} x_{k(i)} : k(i) \in \mathbb{N}, k_{i-1} < k(i) \leqslant k_i, i = 1, 2, \ldots, j \} + U$$

y así B es precompacto.

Q.E.D.

TEOREMA 21 (Levantamiento). *Sea E un espacio estrictamente Λ-tonelado y F cuasi-$L_\Lambda B$. Si $H \subset F$ es un subespacio y $T: H \longrightarrow E$ es lineal, sobreyectiva y con gráfica cerrada en $F \times E$, entonces existe una topología metrizable y separada $\mathcal{T}$ en E, más gruesa que la original, para la que se verifican las siguientes propiedades:*

(i) Si (x_n) es una sucesión nula en $E[\mathcal{T}]$, existe $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una sucesión $(u_n) \subset F_\beta \cap H$ nula en F_β, tal que $T(u_n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$

(ii) Si $B \subset E[\mathcal{T}]$ es precompacto, existe $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y un subconjunto $M \subset F_\beta \cap H$, precompacto en F_β, tal que $T(M) = B$.

(iii) Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en $E[\mathcal{T}]$, existe $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una sucesión $(v_n) \subset F_\beta \cap H$, convergente en F_β, tal que $T(v_n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Demostración: Sea (p_n) y $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ como en el teorema 18 y $\varphi: F \longrightarrow F/T^{-1}(0)$ la proyección canónica. Si $S: E \longrightarrow H/T^{-1}(0) \hookrightarrow F/T^{-1}(0)$ es la aplicación tal que $S^{-1}_{\circ} \varphi = T$, entonces S tiene gráfica cerrada. Si tomamos S por T, $F/T^{-1}(0)$ por F y $\{\varphi(C_{n_1 n_2 \ldots n_k})\}$ por $\{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ en el teorema 18, determinamos $(r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\emptyset \neq \overset{\circ}{\overline{S^{-1}(\varphi(C_{r_1 r_2 \ldots r_n}))}} \subset S^{-1}(\varphi(C_{r_1 r_2 \ldots r_n})) =: V_{r_1 r_2 \ldots r_n}, n = 1, 2, \ldots$$

Así la familia $\{ (\frac{1}{2^n})^{1/p_n} V_{r_1 r_2 \ldots r_n} \}$ es base de entornos del origen para una topologia separada $\mathcal{T}$ en E, metrizable y más gruesa que la original, para la que $S: E[\mathcal{T}] \longrightarrow F/T^{-1}(0)$ es continua. Se obtiene de aquí que $T: H \longrightarrow E[\mathcal{T}]$ tiene gráfica cerrada y que $V_{r_1 r_2 \ldots r_n} = T(C_{r_1 r_2 \ldots r_n} \cap H)$, $n = 1, 2, \ldots$, es entorno del origen en $E[\mathcal{T}]$.

(i) Sea (x_n) una sucesión nula en $E[\mathcal{T}]$ y sea $\lambda_n \longrightarrow \infty$ una sucesión de escalares tal que $\lambda_n x_n \longrightarrow 0$ en $E[\mathcal{T}]$. Sea $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ una sucesión de naturales tal que $\lambda_n x_n \in V_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ si $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Tomemos $(y_n)_{n > n_1} \subset H$ tal que $y_n \in C_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ y $T(y_n) = \lambda_n x_n$, $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Teniendo en mente la prueba del teorema 9, podemos determinar $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in \overline{\Gamma_{p_k} A_\alpha}$ si $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Es claro que (y_n/λ_n) converge a cero en F_α. (i) se obtiene facilmente de lo que hemos probado.

(ii) Sea $B \subset E[\mathfrak{T}]$ precompacto. Por el lema 19 existe una sucesión (x_n) nula en $E[\mathfrak{T}]$ y una sucesión de naturales $0 := k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ tal que cada $z \in B$ se expresa como $z = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^{1/p_i} x_{k(i)}$, $k_{i-1} < k(i) \leqslant k_i$, $i \in \mathbb{N}$. Sea $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $(u_n) \subset F_\beta \cap H$, nula en F_β tal que $T(u_n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$

El conjunto

$$M = \{ \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^{1/p_i} u_{k(i)} : \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^{1/p_i} x_{k(i)} \in B, k_{i-1} < k(i) \leqslant k_i, i \in \mathbb{N} \}$$

es un precompacto de F_β por el lema 20. Utilizando que T tiene gráfica cerrada en $F \times E[\mathfrak{T}]$ se concluye que $M \subset F_\beta \cap H$ y que $T(M) = B$.

(iii) Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $E[\mathfrak{T}]$. Por (ii) existe $\beta' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y una sucesión $(y_n) \subset F_{\beta'} \cap H$, precompacta en $F_{\beta'}$, tal que $T(y_n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Sea $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ una sucesión de naturales tal que $x_m - x_n \in (\frac{1}{2k})^{1/p_k} V_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ si $m,n > n_k$. Consideremos $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ una subsucesión de $\{ n_j : j \in \mathbb{N} \}$ tal que exista $\lim_k y_{m_k} = y \in F_{\beta'}$. Por la elección hecha tenemos que $x_n - x_{m_k} \in (\frac{1}{2k})^{1/p_k} V_{r_1 r_2 \ldots r_k}$, si $k \in \mathbb{N}$ y $m_k < n \leqslant m_{k+1}$. Podemos determinar $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y n, $m_k < n \leqslant m_{k+1}$, existe $z_n \in \overline{\Gamma_{p_k} A_\alpha \cap H}$ de forma que $T((\frac{1}{2k})^{1/p_k} z_n) = x_n - x_{m_k}$. La sucesión $((\frac{1}{2k})^{1/p_k} z_n)$ es obviamente nula en F_α. Definamos ahora

$$v_n := \begin{cases} y_n \text{ si } 1 \leqslant n \leqslant n_1 \\ (\frac{1}{2k})^{1/p_k} z_n + y_{m_k} \text{ si } k \in N \text{ y } m_k < n \leqslant m_{k+1} \end{cases}$$

Para $\beta \geqslant \beta'$, $\beta \geqslant \alpha$ se tiene $(v_n) \subset F_\beta \cap H$ siendo $v_n \longrightarrow y$ en F_β y $T(v_n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Q.E.D.

COROLARIO 1. 21. *Sea T una aplicación lineal continua de un espacio estrictamente Λ-tonelado E en un espacio cuasi-$L_\Lambda B$, F. Para cada precompacto $M \subset E$ existe un subespacio $G \subset F$, que es F-espacio localmente Λ-convexo para una topologia $\mathfrak{V}$ más fina que la inducida por F, tal que $T(M) \subset G[\mathfrak{V}]$ es precompacto en este espacio.*

El método empleado en la obtención de los teoremas de gráfica cerrada, localización y levantamiento supone una simplificación de los argumentos de De Wilde [5], [6], a la vez que una potenciación de sus resultados. El estudio general que estamos realizando para espacios cuasi-$L_\Lambda B$ contiene el realizado por Valdivia en [19] cuando $\Lambda = \{1\}$. Mientras que en [19] la potente información la suministran los discos de Banach, en nuestro caso la obtenemos de estructuras bastante más generales, y por esto nos está siendo necesario desarrollar técnicas y demostraciones propias del contexto de los EVT diferentes a las contempladas en [19].

6.– ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE LOCALIZACION

Dados dos EVT E y F, $\mathfrak{L}_s(E,F)$ es el espacio de las aplicaciones lineales continuas de E en F dotado de la topologia de convergencia puntual. Si $\{F_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y $\{A_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de F, entonces (p_n), $\mathcal{W} = \{C_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ y $\{F^\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ tendrán el mismo significado que en el epígrafe anterior.

TEOREMA 22. *Sea E un espacio estrictamente Λ-tonelado y F un espacio cuasi-$L_\Lambda B$. Si $B \subset \mathfrak{L}_s(E,F)$ está contenido en algún p-disco de Banach, $p \in (0, 1]$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $B \subset \mathfrak{L}(E,F^\alpha)$ y es equicontinuo entre estos espacios.*

Demostración: Para los enteros positivos k, $m_1, m_2, \dots, m_k$ definimos

$$U_{m_1 m_2 \dots m_k} = \{x \in E: \bigcup_{T \in B} Tx \subset m_1 C_{m_1} \cap m_2 C_{m_1 m_2} \cap \dots \cap m_k C_{m_1 m_2 \dots m_k}\}$$

y para $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ponemos $B_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{a_1 a_2 \dots a_n}$. Es claro $B_\alpha \subset B_\beta$ si $\alpha \leqslant \beta$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. El teorema 18. (iii) nos da que $\cup\{B_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = E$. Si para k, $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_{m_1 m_2 \dots m_k} = \cup\{B_\alpha: \alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, a_j = m_j, j = 1, 2, \dots, k\}$$

entonces $\mathcal{V} = \{B_{m_1 m_2 \dots m_k}\}$ es una red ordenada en E, y por tanto existe $\alpha = (r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\overline{\Gamma_{p_n} B_{r_1 r_2 \dots r_n}}^{\circ} \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$ De otra parte es claro que

$$\emptyset \neq \frac{1}{r_n} \overline{U_{r_1 r_2 \dots r_n}}^{\circ} \subset \overline{T^{-1}(C_{r_1 r_2 \dots r_n})}^{\circ}, \ n = 1, 2, \dots \text{ y para todo } T \in B$$

El teorema 18. (ii) nos da que

$$(\frac{1}{2^n})^{1/p_n} \cdot \frac{1}{r_n} \overline{\overset{\circ}{U}_{r_1 r_2 \ldots r_n}} \subset (\frac{1}{2^n})^{1/p_n} \overline{T^{-1} (\overset{\circ}{C}_{r_1 r_2 \ldots r_n})} \subset T^{-1} (C_{r_1 r_2 \ldots r_n})$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

para todo $T \in B$, siendo por tanto $B \subset \mathfrak{L}(E, F^\alpha)$ un equicontinuo entre estos espacios.

Q.E.D.

COROLARIO 1.22. *Sea $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim F_n[\mathfrak{X}_n]$ el límite inductivo de una sucesión creciente de espacios cuasi-$L_\Lambda B$ y sea E un espacio estrictamente Λ-tonelado. Si $B \subset \mathfrak{L}_s(E,F)$ está contenido en algún p-disco de Banach, entonces existe un entero positivo n tal que $B \subset \mathfrak{L}(E,F_n)$ y B es equicontinuo entre estos espacios.*

Demostración: Para cada $n \in N$ sea $\{F^n_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ y $\{A^n_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ una cuasi-$L_\Lambda B$-representación de $F_n[\mathfrak{X}_n]$, y para estas, sea $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ y $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ la cuasi-$L_\Lambda B$-representación de $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ construida como en la proposición 12. (c) y $\mathfrak{W} = \{C_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ su familia ordenada asociada, teorema 9. Dada $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ la sucesión $(C_{a_1 a_2 \ldots a_n})$ está contenida en F_{a_1} y es estrictamente completa en $F_{a_1}[\mathfrak{X}_{a_1}]$. Así, $F^\alpha \subset F_{a_1}$ siendo la inmersión $F^\alpha \hookrightarrow F_{a_1}[\mathfrak{X}_{a_1}]$ continua. La prueba termina con una aplicación del teorema anterior.

Q.E.D.

El teorema 22 extiende la proposición V.4.4 de [6], proporcionando información adicional y siendo, pensamos, su demostración más sencilla. El corolario 1.22 es una versión general de un problema propuesto por Hierschfeld y solucionado por Köthe, [11], acerca de la localización de subconjuntos de aplicaciones lineales con valores en un espacio (LF). En [4] hemos obtenido los resultados anteriores para espacios estrictamente tonelados y cuasi-LB, así como algunas consecuencias que extienden y/ó refuerzan resultados previos de De Wilde [5], [6]. El teorema 22 permite extender al caso que nos ocupa los resultados contenidos en el artículo [4], al cual nos remitimos para ver algunas de sus posibles aplicaciones.

Daremos ahora otra aplicación del teorema de localización: un resultado de localización de conjuntos acotados en ciertos límites inductivos generalizados.

Sea $p \in (0, 1]$ fijo. Sea F un espacio vectorial y (F_n) una sucesión creciente de subespacios que cubre F. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea A_n un conjunto absolutamente p-convexo y absorbente en F_n y sea $\mathfrak{X}_n$ una topologia localmente p-convexa en F_n. Supongamos que $2^{1/p}A_n$ está contenido en A_{n+1} y que $\mathfrak{X}_{n+1}$ induce en A_n una topologia más gruesa que la inducida por $\mathfrak{X}_n$, n = 1, 2, . . . En estas condiciones, ***si la topologia vectorial más fina*** $\mathfrak{X}$ ***en F para la que las inmersiones*** *$(A_n, \mathfrak{X}_n) \hookrightarrow F[\mathfrak{X}]$ son continuas, es Hausdorff, se dice que $F[\mathfrak{X}]$ es el límite inductivo generalizado de la sucesión de pares $(F_n[\mathfrak{X}_n], A_n)$ y se escribe $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim (F_n[\mathfrak{X}_n], A_n)$.* Esta definición es un caso particular de la definición 1.1.1 de [15], y en el caso p = 1 coincide con el concepto de límite inductivo generalizado de Garling, [8].

PROPOSICION 23. *Si $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim (F_n[\mathfrak{X}_n], A_n)$ es un límite inductivo generalizado como antes, entonces:*
(i) $\mathfrak{X}$ es una topologia localmente p-convexa.
(ii) Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n[S_n] = \varinjlim (F_n[\mathfrak{X}_n], 2^{k/p}A_n)$, entonces S_{n+1} induce en F_n una topologia más gruesa que S_n y $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim F_n[S_n]$.

Demostración: (i) Según 1.1.6 de [15], la familia

$$\mathcal{A} = \{ \bigcup_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} A_n \cap V_n : V_n \text{ es } \mathfrak{X}_n\text{-entorno del origen en } F_n, n \geq 1 \}$$

es base de entornos del origen para $\mathfrak{X}$. Usando que cada A_n es absolutamente p-convexo y que $\mathfrak{X}_n$ es localmente p-convexa, no es difícil comprobar que la familia

$$\mathcal{U} = \{ \Gamma_p (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap V_n) : V_n \text{ es } \mathfrak{X}_n\text{-entorno del origen en F}, n \geq 1 \}$$

es una base de filtro en F equivalente a $\mathcal{A}$, y así $\mathcal{U}$ es base de entornos del origen en $F[\mathfrak{X}]$.
(ii) Análoga a las pruebas de las proposiciones 5 y 6 de [17, p. 148-149].

Q.E.D.

PROPOSICION 24. *Sea $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim (F_n[\mathfrak{X}_n], A_n)$ un límite inductivo generalizado donde cada A_n es metrizable y completo. Entonces:*
(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n[S_n] = \varinjlim (F_n[\mathfrak{X}_n], 2^{k/p}A_n)$ es un cuasi-LpB completo.
(ii) $F[\mathfrak{X}]$ es un espacio cuasi-LpB.

Demostración: (i) $F_n[S_n]$ es completo por 1.1.10 de [15]. Sea (V_k^n) una sucesión decreciente de entornos del origen absolutamente p-convexos y cerrados en $F_n[\mathfrak{X}_n]$ tal que $(V_k^n \cap A_n)$ es base de entornos del origen en $(A_n, \mathfrak{X}_n)$. Para $\alpha = (a_n)$ definimos

$$A_\alpha^n = a_1 ((\bigcap_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \cdot V_k^n) \cap A_n)$$

Procediendo como en el teorema 1 de [2], se obtiene que $\{A_\alpha^n : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una familia de p-discos de Banach en $F_n[S_n]$ que cubre y tal que $A_\alpha^n \subset A_\beta^n$ si $\alpha \leqslant \beta$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Así $F_n[S_n]$ es un espacio cuasi-LpB.
(ii) Es consecuencia inmediata de la proposición 23. (ii) y 12. (c).

Q.E.D.

COROLARIO 1.24. *Sea $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim (F_n[\mathfrak{X}_n], A_n)$ un límite inductivo generalizado donde cada A_n es metrizable y completo, y sea $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim F_n[S_n]$ el límite inductivo de espacios localmente p-convexos asociado. Son equivalentes:*
(i) $F[\mathfrak{X}]$ es localmente completo.
(ii) Dado un acotado $B \subset F[\mathfrak{X}]$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset A_n$ y B es acotado en $F_n[\mathfrak{X}_n]$.
(iii) Dado un acotado $B \subset F[\mathfrak{X}]$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset F_n$ y B es acotado en $F_n[S_n]$, i.e., $F[\mathfrak{X}] = \varinjlim F_n[S_n]$ es regular.

Demostración: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Si $F[\mathfrak{X}]$ es localmente completo y $B \subset F[\mathfrak{X}]$ es acotado entonces $A = \overline{\Gamma_p B}$ es un p-disco de Banach por el corolario 1.5. La prueba se razona igual que el corolario 1.3 de [2] utilizando las proposiciones 23 y 24, el corolario 1.22 y el teorema 1.1.11 de [15].
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Consecuencia inmediata de que S_n y $\mathfrak{X}_n$ inducen en cada $2^{k/p}A_n$ la misma topologia.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Se obtiene facilmente utilizando la completitud de cada $F_n[S_n]$, prop. 24

Q.E.D.

El corolario anterior es la extensión de la bien conocida caracterización de los espacios (LF) localmente completos. La proposición 24 y su corolario han sido obtenidos en el caso p = 1 por el autor en [2]. Estos resultados junto con la proposición 23 suministran el soporte técnico necesario para desarrollar en el contexto que hemos estudiado aquí gran parte de los contenidos de [2].

7.– Ejemplos y contraejemplos

En este último epígrafe damos distintos ejemplos y contraejemplos que ponen de manifiesto el comportamiento de las clases de espacios estudiadas, y que muestran que los resultados que hemos establecido extienden propiamente otros ya conocidos.

Para $0 < p \leqslant 1$, ℓ^p es el espacio vectorial de todas las sucesiones (a_n) en $\mathbb{K}$

tales que $\|(a_n)\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty$ dotado de su topologia ordinaria $\mathfrak{X}_p$ asociada la p-norma $\|\ \ \|_p$.

Empezaremos con la noción de tonelación. Si Λ_1 y Λ_2 son dos subconjuntos de $(0, 1]$ tales que $\inf \Lambda_1 < \inf \Lambda_2$, entonces todo espacio estrictamente Λ_1-tonelado es estrictamente Λ_2-tonelado, siendo en general estas clases distintas como vamos a ver. En [13] y [17] se encuentra la siguiente definición: *Un EVT E es Baire p-convexo, $0 < p \leqslant 1$, si dada una sucesión (A_n) de subconjuntos p-convexos y cerrados de E, que cubren E, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que A_m tiene punto interior en E.* Es un sencillo ejercicio probar que todo espacio Baire p-convexo es estrictamente p-tonelado.

EJEMPLO 25. *Un espacio estrictamente p-tonelado que no es estrictamente q-tonelado $0 < q < p \leqslant 1$.*

En el caso $p = 1$ en [17, p. 281] y en el caso $p < 1$ en [13], se ha probado que ℓ^q dotado de la topologia inducida por $\mathfrak{X}_p$ es un espacio Baire p-convexo. En particular $\ell^q[\mathfrak{X}_p]$ es estrictamente p-tonelado. Veamos ahora que $\ell^q[\mathfrak{X}_p]$ no es estrictamente q-tonelado. Si lo fuera, como la aplicación identidad id: $\ell^q[\mathfrak{X}_p] \longrightarrow \ell^q[\mathfrak{X}_q]$ tiene gráfica cerrada y $\ell^q[\mathfrak{X}_q]$ es cuasi-LqB, el teorema 18 nos daría que id es continua. Así $\mathfrak{X}_q$ debería coincidir con la topologia inducida por $\mathfrak{X}_p$ en ℓ^q, lo cual es absurdo puesto que $\mathfrak{X}_q$ no es localmente p-convexa. ∎

De la proposición 11 de [18] se obtiene que un EVT E es totalmente Λ-tonelado si, y sólo si, para cada red subespacios $\{E_{m_1 m_2 \ldots m_k}\}$ en E, existe $\alpha = (r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $\overline{E_{r_1 r_2 \ldots r_n}}$ es de codimensión finita en E, $n = 1, 2, \ldots$

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $D \subset E_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ es un conjunto absorbente, cerrado y absolutamente Λ-convexo, entonces D es entorno del origen en $E_{r_1 r_2 \ldots r_n}$.

Procediendo como en [19, proposición 17] se puede establecer la siguiente:

PROPOSICION 26. *Si E es totalmente Λ-tonelado, entonces E es estrictamente Λ-tonelado.*

EJEMPLO 27. *Un espacio estrictamente Λ-tonelado que no es totalmente Λ-tonelado.*

En [18, theorem 5], M. Valdivia construye un espacio E localmente convexo metrizable que es totalmente ultratonelado y no es no ordenado Baire-like. Procediendo como en [20, corollary 8.1] podemos determinar una sucesión (H_n) de hiperplanos cerrados de E que cubren. Si F es un espacio de Fréchet de dimensión infinita, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n = H_n \otimes F$ es un subespacio cerrado de $E \otimes_\pi F$ de codimensión infinita y se tiene $\cup\{G_n : n \in \mathbb{N}\} = E \otimes F$, [20, theorem 8]. E es totalmente Λ-tonelado para todo $\Lambda \subset (0, 1]$, y así en particular es estrictamente Λ-tonelado por la proposición anterior. Por la proposición 16, $E \otimes_T F$ es estrictamente Λ-tonelado para todo $\Lambda \subset (0, 1]$, y por las consideraciones anteriores no es totalmente Λ-tonelado para ningún $\Lambda \subset (0,1]$. ■

El comportamiento de las clases de espacios cuasi-$L_\Lambda B$ es el inverso al de las clases de espacios estrictamente Λ-tonelados: Si Λ_1 y Λ_2 son dos conjuntos de $(0, 1]$ tales que $\inf \Lambda_1 > \inf \Lambda_2$ entonces todo espacio cuasi-$L_{\Lambda_1}B$ es cuasi-$L_{\Lambda_2}B$, siendo en general estas clases distintas. Un ejemplo bastante sencillo de separación de clases nos lo dan los espacios ℓ^q, $0 < q < 1$: $\ell^q[\mathfrak{X}_q]$ es un espacio cuasi-LqB puesto que es un q-Banach. Al ser un espacio de Baire, el corolario 1.18 nos da que $\ell^q[\mathfrak{X}_q]$ no puede ser cuasi-LpB para ningún p tal que $q < p \leqslant 1$, puesto que en caso de serlo $\ell^q[\mathfrak{X}_q]$ sería localmente p-convexo, lo cual es absurdo. Profundizamos un poco en este ejemplo:

EJEMPLO 28. *Un espacio cuasi-LqB para todo $q < p$ que no es cuasi-LpB, $0 < p \leqslant 1$.*

Sea (p_n) una sucesión estrictamente creciente en $(0, p)$ con $\lim_n p_n = p$, y definamos $\ell^{p-} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell^{p_n}$. Consideremos el límite inductivo $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}] = \varinjlim \ell^{p_n}[\mathfrak{X}_{p_n}]$ en la categoria de los EVT. El espacio $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$ nos proporciona e ejemplo que estamos buscando.

A) $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$ es localmente q-convexo y cuasi-LqB para todo $q <$ p.
Dado $0 < q < p$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $q < p_n$ si $n \geqslant k$. como $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}] = \lim_{n \geqslant k} \ell^{p_n}[\mathfrak{X}_{p_n}]$, la proposición 6.6.(9) de [10] y la proposición 12.(c) nos dan respectivamente que $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$ es localmente q-convexo y cuasi-LqB.

B) L os acotados de $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$ son los acotados localizados.
Si B_{p_n} es la p_n-bola unidad cerrada de $(\ell^{p_n}, \| \quad \|_{p_n})$, entonces B_{p_n} es cerrada en $\ell^p[\mathfrak{X}_p]$. Así, si $\mathfrak{V}$ es la topologia vectorial más fina que induce en cada B_{p_n} la misma que $\mathfrak{X}_p$ el teorema 1.1.11 de [15] nos da que los conjuntos acotados de $\ell^{p^-}[\mathfrak{V}]$ son los contenidos en algún homotético de un cierto B_{p_n}. Como $\mathfrak{V} \leqslant \mathfrak{X}$, $A \subset \ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$ es acotado si, y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \ell^{p_n}[\mathfrak{X}_{p_n}]$ es acotado en este espacio.

C) $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$ no es localmente p-convexo.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea e_n el n-ésimo vector coordenado de ℓ_0. Si $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$ fuera localmente p-convexo, el conjunto $A = \Gamma_p\{e_n : n = 1, 2, \ldots\}$ sería acotado en $\ell^{p^-}[\mathfrak{X}]$. Por el apartado anterior existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \ell^{p_m}[\mathfrak{X}_{p_m}]$ es acotado en este espacio. Utilizando que $p_m < p$ es fácil ver que A no es acotado en $\ell^{p_m}[\mathfrak{X}_{p_m}]$ y así llegamos a un absurdo.

D) $\ell^{p-}[\mathfrak{X}]$ *no es cuasi-LpB.*
Si $q < p$, entonces $\ell^q \subset \ell^{p-} \subset \ell^p$ siendo ℓ^q denso en $\ell^p[\mathfrak{X}_p]$. Por el ejemplo 25, $\ell^q[\mathfrak{X}_p]$ es estrictamente p-tonelado y así la proposición 14. (ii) nos da que $\ell^{p-}[\mathfrak{X}_p]$ es también estrictamente p-tonelado. De otra parte, la aplicación identidad id: $\ell^{p-}[\mathfrak{X}_p] \longrightarrow \ell^{p-}[\mathfrak{X}]$ tiene gráfica cerrada ya que $\mathfrak{X}_p \leqslant \mathfrak{X}$ en ℓ^{p-}. Si $\ell^{p-}[\mathfrak{X}]$ fuese cuasi-LpB, el teorema 18 nos daría que $\mathfrak{X} \leqslant \mathfrak{X}_p$ en ℓ^{p-}, siendo por tanto $\mathfrak{X}$ localmente p-convexa y llegando así a una contradicción con el apartado anterior.

EJEMPLO 29. *Un espacio cuasi-$L_\Lambda B$, $\Lambda = (0, 1]$, que no es cuasi-LpB para ningún $p \in (0, 1]$.* Una aplicación del corolario 1.18 es suficiente para garantizar que cualquier F-espacio localmente Λ-convexo, $\Lambda = (0, 1]$, que no sea localmente p-convexo para ningún $p \in (0, 1]$ proporciona un tal ejemplo – para un ejemplo concreto tomar (p_n) una sucesión decreciente en $(0, 1]$ tal que $\lim_n p_n = 0$ y considerar $F = \prod_{n=1}^{\infty} \ell^{p_n}[\mathfrak{X}_{p_n}]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANACH, S. Théorie des operations linéaires, (Monografje Matematyczne, 1) Wars zawa (1932).

[2] CASCALES, B. Sobre ciertos límites inductivos generalizados, Pendiente de Publi cación.

[3] CASCALES, B. On K-analytic locally convex spaces, Pendiente de Publicación.

[4] CASCALES, B. Una nota sobre localización de conjuntos de aplicaciones, XI Jorna das Hispano-Lusas de Matemáticas. Badajoz (1986).

[5] De WILDE, M. Reséaux dans les espaces linéaires a semi-normes, Mem. Soc. R. Sc Liège 12, 2 (1969).

[6] De WILDE, M. Closed graph theorems and webbed spaces, Pitman, London (1978).

[7] DIEROLF, P. Une caractérisation des espaces vectoriels topologiques complets au sens de Mackey, C.R. Acad. Sc. Paris 283A, 245-248 (1976).

[8] GARLING, D.J.H. A generalized form of inductive limit topology for vector spaces Proc. London Math. Soc. 14, 1-28 (1964).

[9] GROTHENDIECK, A. Produits tensoriels topologiques et espaces necléaires, Mem Amer. Math. Soc., 16 (1955).

[10] JARCHOW, H. Locally convex spaces, B.G. Teubner-Stuttgart (1981).

[11] KÖTHE, G. Abbidungen von F-Räume in LF-Räume, Math. Ann. 178, 1-3 (1968).

[12] KÖTHE, G. Topological vector spaces I, Berlin-Heidelberg-New York (1969) Sprin ger-Verlag.

[13] ORIHUELA, J. Sobre la categoria semi-convexa de hiperplanos y productos de espacios vectoriales topológicos de Baire, Aceptado para publicación en la Rev. Real Acad. Ci. Exact. Fis. Nat. Madrid.

[14] ORIHUELA, J. Sobre espacios Semi-Suslin y espacios con red de tipo $\mathcal{C}$, Collectanea Math. XXXVI, 2, 177-197 (1985).

[15] TURPIN, Ph. Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux, Dissertationes Math. 131, PWN, WARSOVIE (1976).

[16] TURPIN, Ph. Représentation fonctionelle des espaces vectoriels topologiques, Studia, Mat. 73, 1, 1-10 (1982).

[17] VALDIVIA, M. Topics in locally convex spaces, North-Holland. Math. Studies 67 (1982).

[18] VALDIVIA, M. Classes of barrelled spaces related with the closed graph theorem, Portugaliae Math. Vol 40, 3, 345-366, (1981).

[19] VALDIVIA, M. Quasi-LB-spaces, Aceptado para publicación en J. Londón Math. Soc.

[20] VALDIVIA, M. y PEREZ-CARRERAS, P. On totally barrelled spaces, Math. Z. 178, 263-269 (1981).

Bernardo Cascales
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad de Murcia
30.001 Murcia. SPAIN.