FEUILLETAGES DE KILLING

par

WITOLD MOZGAWA

ABSTRACT

A Riemannian foliation with a trivial central transversal sheaf is called a Killing foliation. It is proved that if on a compact manifold with a Killing codimension q foliation the maximal codimension of the closures of the leaves is $q - r$ then there exist r transversal vector fields linearly independent at each point. If the span of a manifold is k then the above result implies that each such foliation admits the closures of the leaves of codimension at least $q - k$, what generalizes theorem 3.5 in [2].

INTRODUCTION

Soient M une n-variété compacte connexe et $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien de codimension q sur M. D'après [3], les adhérences des feuilles sont les orbites du *faisceau transverse central* $\underline{\underline{\mathfrak{C}}}(M,\mathcal{F})$ du feuilletage, qui est un faisceau localement trivial d'algèbres de Lie de germes de champs de Killing transverses. Nous rappelons rapidement ces notions au premier paragraphe.

Si le faisceau $\underline{\underline{\mathfrak{C}}}(M,\mathcal{F})$ est globalement constant, il est défini par une algèbre de Lie abélienne $c(M,\mathcal{F})$ de champs de Killing transverses globaux. C'est le cas si M est simplement connexe, cas étudié par E. Ghys [2]. C'est également le cas si $\mathcal{F}$ est "isométrique", c.à.d. formé par les orbites d'une algèbre de Lie de champs de Killing sur la variété riemannienne (M,g_M). Pour cette raison, nous appelons *feuilletage de Killing* un feuilletage riemannien pour lequel le faisceau transverse central admet une trivialisation globale. A la fin du premier paragraphe, nous donnons un exemple de feuilletage de Killing qui n'est pas "isométrique", sur une variété qui n'est pas simplement connexe.

Notre resultat principal est établi au paragraphe 2: il dit que pour un feuilletage de Killing sur une variété compacte, si la codimension maximale des adhérences des feuilles est $q - r$, alors il existe r champs transverses globaux linéairement indépendants en tout point.

On en déduit une généralisation intéressante d'un résultat d'E. Ghys [2] d'après lequel, sur une variété compacte simplement connexe à caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle, tout feuilletage riemannien a une feuille compacte. Notre résultat est le suivant: sur une variété compacte dont le "span" est k [rappelons [7] que le span d'une variété est le nombre maximum de champs de vecteurs linéairement indépendants en tout point], tout feuilletage de Killing de codimension q admet des adhérences de feuilles de codimension au moins $q - k$.

I. Rappels sur les feuilletages riemanniens; feuilletages de Killing.

La différentiabilité est C^∞; M est una n-variété compacte connexe et $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q sur M. Une structure de feuilletage riemannien sur $\mathcal{F}$ est définie par une métrique transverse g_T, c.à.d. par une structure euclidienne sur le fibré normal $Q = TM/T\mathcal{F}$ localement projetable le long des feuilles.

I.1. Structure du feuilletage riemannien (M, $\mathcal{F}$, g_T).

Pour les démonstrations des résultats rappelés ici, voir [3] et [4].

Si X est un champ de vecteurs feuilletés, c.à.d. un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$, la section correspondante $\bar{X}$ du fibré normal Q est dite *champ transverse associé*. Les champs transverses du feuilletage forment une algèbre de Lie $\ell(M,\mathcal{F})$.

Dans un ouvert simple $\mathfrak{U}$, où le feuilletage est défini par une submersion $\pi: \mathfrak{U} \to \bar{\mathfrak{U}}$ à fibres connexe sur une variété quotient locale $\bar{\mathfrak{U}}$, g_T est le pull-back d'une métrique riemannienne $g_{\bar{\mathfrak{U}}}$ sur $\bar{\mathfrak{U}}$; de même, un champ transverse $\bar{X}$ est dans $\mathfrak{U}$ le pull-back d'un champ de vecteurs $\bar{X}_{\bar{\mathfrak{U}}}$. On dira que $\bar{X}$ est un *champ de Killing transverse* de (M, $\mathcal{F}$, g_T) si pour tout ouvert simple $\mathfrak{U}$ le champ projeté local $\bar{X}_{\bar{\mathfrak{U}}}$ est un champ de Killing de $(\bar{\mathfrak{U}}, g_{\bar{\mathfrak{U}}})$.

Observons enfin que si $\bar{X}$ est le champ transverse défini par le champ feuilleté X, on appellera orbite de $\bar{X}$ la réunion des feuilles qui rencontrent une orbite de X; on définit de même les orbites d'une algèbre de Lie de champs transverses.

Le théorème de structure de P. Molino [3] [4] décrit les adhérences des feuilles de la manière suivante: il existe un faisceau localement trivial $\underline{\underline{\mathcal{C}}}(M,\mathcal{F})$ [appelé *faisceau transverse central* du feuilletage] de germes de champs de Killing transverses dont les orbites sont les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$. La fibre-type de $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$ est une algèbre de Lie dont l'opposée $\underline{\underline{g}}$ est *l'algèbre de Lie structurale* du feuilletage. En outre, les sections locales de $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$ commutent avec tous les champs transverses globaux. $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$ ne dépend pas de la métrique transverse g_T.

On voit ainsi en particulier que les adhérences des feuilles forment une partition $\bar{\mathcal{F}}$ de M en sous-variétés sur lesquelles le feuilletage induit est transversalement homogène [1].

I.2. Feuilletages de Killing.

Puisque les sections globales de $\underline{\underline{\mathcal{C}}}(M, \mathcal{F})$, commutent avec les champs transverses globaux, elles forment une algèbre de Lie abélienne $c(M, \mathcal{F})$ de champs de Killing transverses. On dira que $(M, \mathcal{F}, g_T)$ est un *feuilletage de Killing* si $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$ est globalement trivialisable; dans ce cas, les adhérences des feuilles sont les orbites de $c(M, \mathcal{F})$.

Un premier exemple de cette situation est le cas, étudié par E. Ghys [2], où M est simplement connexe.

Un second exemple, qui justifie la terminologie utilisée, est celui où $\mathcal{F}$ est défini par les orbites d'un groupe connexe H d'isométries de la variété riemannienne (M,g). En effet, dans ce cas [que l'on peut appeler feuilletage "isométrique"], les adhérences des feuilles sont les orbites des champs de Killing associés à l'action sur M de l'adhérence K de H dans le groupe de Lie compact Iso (M,g).

Dans le cas des flots, il résulte d'un théorème de P. Molino-V. Sergiescu [5], que tout feuilletage de Killing est isométrique.

Donnons un exemple de feuilletage de Killing $(M, \mathcal{F}, g_T)$, *où M n'est pas simplement connexe, et où le feuilletage n'est pas isométrique:* Considérons pour cela le produit $N = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ de deux tores, paramètrés respectivement par les angles (α_1, α_2) et (θ_1, θ_2). On se donne une matrice $A \in SL(2, \mathbb{Z})$; si v est un vecteur propre de A, les parallèles à v dans $\mathbb{R}^2$ définissent par projection sur $\mathbb{T}^2$ un feuilletage à feuilles denses $\mathcal{F}_v$, défini par $\lambda_1 d\theta_1 + \lambda_2 d\theta_2 = 0$. Sur N, la 1-forme $\lambda_1 d\theta_1 + \lambda_2 d\theta_2$ détermine un feuilletage de codimension 1 à feuilles denses $\mathcal{F}_N$. Soit $\varphi_A\colon N \to N$ le difféomorphisme donné par $\varphi_A(\alpha, \theta) = (\alpha, \overline{A}(\theta))$, où $\overline{A}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ est déterminé par $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

En suspendant, par la méthode classique d'A. Haefliger, φ_A, on obtient un fibre $M \xrightarrow{\pi} S^1$ de fibre-type N et de groupe structural engendré par φ_A. Le feuilletage $\mathcal{F}_N$ est invariant per φ_A, et par suite M est muni de façon naturelle d'un feuilletage $\mathcal{F}$ vertical; il est immédiat sur la définition de vérifier que $\mathcal{F}$ est riemannien et que les adhérences des feuilles sont les fibres de π.

Comme φ_A opère trivialement sur les champs transverses de $(N, \mathcal{F}_N)$, et que ce feuilletage est transversalement parallèlisable, $\underline{\underline{\mathcal{C}}}(M, \mathcal{F})$ est globalement constant, c.à.d. que le feuilletage est de Killing. D'autre part, la variété M n'est pas simplement connexe.

Montrons que $\mathcal{F}$ n'est pas isométrique; sinon en effet, il serait défini par un groupe de Lie connexe H d'isométries de M pour une certaine métrique riemannienne g. Si alors $K = \overline{H}$ est l'adhérence de H dans Iso(M,g), les orbites de K sont les fibres de π. Il en résulte que M est un fibré associé à un K-fibré principal E de base S^1. Comme K est connexe, E est trivial, donc M aussi, c.à.d. que $M \approx S^1 \times N$. Or, d'après sa définition, le fibré $M \to S^1$ n'est pas topologiquement trivial, le générateur φ_A de son groupe structural opérant de façon non triviale sur l'homologie de la fibre-type.

II. ADHÉRENCES MINIMALES POUR UN FEUILLETAGE DE KILLING.

II.1. Le résultat principal.

Théorème. Soit $(M, \mathcal{F}, g_T)$ un feuilletage de Killing de codimension q sur une variété compacte connexe de dimension $n = p + q$. Si la dimension minimale des adhérences des feuilles est $p + r$, alors:
(i) Il existe r champs transverses globaux commutants $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r$ linéairement indépendants en tout point.
(ii) Les orbites de l'algèbre de Lie de champs transverses engendrée par $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r$ forment un nouveau feuilletage riemannien $\mathcal{F}'$ de codimension q-r, dont les adhérences des feuilles sont les mêmes que celles de $\mathcal{F}$. De plus, $\mathcal{F}'$ a au moins une feuille compacte.

Démonstration: Soit s la dimension de $c(M,\mathcal{F})$. Pour $x \in M$, on note i_x l'isotropie [transverse] de $c(M,\mathcal{F})$ en x, c.à.d. l'espace des champs transverses dans $c(M,\mathcal{F})$ qui s'annulent en x.

Si la dimension de l'adhérence $\overline{F}_x$ de la feuille F_x passant par x est $p + k$, alors la dimension de i_x est $s - k$.

Pour démonter le théorème, il suffit de prouver qu'il existe une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $c(M,\mathcal{F})$ de dimension r telle que, $\forall x \in M$, on ait $i_x \cap \mathcal{A} = 0$.

Dans un ouvert simple $\mathcal{U}$, où $\mathcal{F}$ est défini par $\pi: \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ et où g_T définit sur $\overline{\mathcal{U}}$ une métrique riemannienne $g_{\overline{\mathcal{U}}}$, $c(M,\mathcal{F})$ se projette sur $\overline{\mathcal{U}}$ en une algèbre de Lie $c_{\overline{\mathcal{U}}}$ de champs de Killing. De plus, l'isotropie transverse i_x en $x \in \mathcal{U}$ correspond par projection a l'isotropie $i_{\overline{x}}$ de $c_{\overline{\mathcal{U}}}$ en $\overline{x} = \pi(x)$.

On recouvre M par un nombre fini d'ouverts simples $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m$. Pour $j = 1, \ldots, m$, notons $(\overline{\mathcal{U}}_j, g_{\overline{\mathcal{U}}_j}, c_{\overline{\mathcal{U}}_j})$ la variété quotient locale de $\mathcal{U}_j$ muni de la métrique riemannienne $g_{\overline{\mathcal{U}}_j}$ et de l'algèbre de champs de Killing correspondante. *On est ramené à trouver dans $c(M, \mathcal{F})$ une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de dimension r telle que, pour $j = 1, \ldots, m$, la sous-algèbre correspondante $\mathcal{A}_j$ de $c_{\overline{\mathcal{U}}_j}$ ait une isotropie nulle en tout point de $\overline{\mathcal{U}}_j$.*

Ceci étant, le théorème résulte du lemme élémentaire suivant:

Lemme: Soient (V, g_V) une variété riemannienne –compacte ou non– et c_V une algèbre de Lie abélienne de champs de Killing sur cette variété. Si la dimension minimale des orbites de c_V est r, l'ensemble des sous-espaces de dimension r de c_V dont l'isotropie est nulle en chaque point est résiduel dans la grassmannienne $\mathcal{G}^r(c_V)$ des r-sous-espaces de c_V.

Démonstration du lemme: Soit $s = \dim c_V$. Pour tout k, on note Σ_k la réunion des orbites de dimension k de c_V. La réunion $\Sigma_r \cup \Sigma_{r+1} \cup \ldots \cup \Sigma_{s-1}$ est un fermé sans points intérieurs dans V.

Il est classique, voir [6], que pour tout k, Σ_k est une sous-variété propre de V et que sur chaque composante connexe de dette sous-variété l'isotropie est constante. Ces isotropies forment donc une famille au plus dénombrable de (s-k)-sous-espaces de c_V.

Il ne reste plus alors, pour obtenir le résultat, qu'à observer que si F est un sous-espace de c_V de dimension $\leqslant s - r$, l'ensemble des r-sous-espaces de c_V transverses à F forme un ouvert dense dans la grassmannienne $\mathcal{G}^r(c_V)$

II.2. Applications au cas où span (M) = k.

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a r champs transverses globaux linéairement indépendants en tout point $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_r$. On les représente par des champs feuilletes $X_1, \ldots, X_r$; ceux-ci seront nécessairement linéairement indépendants. Si span (M) = k, on a donc $r \leqslant k$.

Ainsi, sur une variété de span k, tout feuilletage de Killing de codimension q admet des adhérences de feuilles de codimension au moins $q - k$. Pour $k = 0$, c.à.d. $\chi(M) \neq 0$, on trouve en particulier que le feuilletage a une feuille compacte. C'est une généralisation de la propriété démontrée par E. Ghys [2].

Je remercie chaleureusement P. Molino pour la façon dont il m'a guidé et pour ses nombreux conseils et encouragements qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL, R.: *"Transversally homogeneous foliations"* Ann. Inst. Fourier (29), 1979, pp. 143-158.

[2] GHYS, E.: *"Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes"* Ann. Inst. Fourier XXXIV (4), 1984, pp. 203-224.

[3] MOLINO, P.: *"Géométrie globale des feuilletages riemanniens"* Proc. Kon. Akad. van Wet A (85), 1982, pp. 45-76.

[4] MOLINO, P.: *"Désingularisation des feuilletages riemanniens"* Amer. Jour. of Maths, 1984, pp. 1091-1106.

[5] MOLINO, P., SERGIESCU, V.: *"Deux remarques sur les feuilletages riemanniens"* Manuscripta Mathematica, (51), 1985, pp. 145-161.

[6] PALAIS, R.: *"On the existence of slices for actions of non compact Lie groups"* Ann. of Math (73), 1961, pp. 295-325.

[7] THOMAS, E.: *"Vector fields on manifolds"* Bull. A.M.S., 75, 1969, pp. 643-683.

Instytut Matematyki
UMCS
20031, Lublin, POLOGNE