FONCTIONS ANALYTIQUES ET PRODUITS CROULANTS

par

MARIE-CLAUDE SARMANT ET ALAIN ESCASSUT

ABSTRACT

Let K be a complete ultrametric algebraically closed field and let (b_n) be a sequence such that $|b_n| < R$, $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = R$.

Let $\Delta = \{x \in K \mid |x|<R,\ |x - b_n| \geqslant \rho\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. There exist Taylor series g such that $g(b_n) = o\ \forall\ n$, $\lim\limits_{\substack{|x|\to R\\ x\in\Delta}} |g(x)| = +\infty$ and $1 + \frac{1}{g}$ is a Collapsing Product $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x - a_n}{x - b_n}\right)$. For every $\lambda \in K$ a Taylor series g convergent for $|x| < R$ may be factorized in the form $\lambda\left(\frac{1 - \pi_\lambda}{1 - \tau_\lambda}\right)$ with π_λ, τ_λ Collapsing Products. There is also Bicollapsing Products.

I - INTRODUCTION ET PRINCIPAUX RESULTATS

Soit $(K, |.|)$ un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. Pour tout $a \in K$ et tout $R \in \mathbb{R}$ on note $d(a, R)$ le disque circonférencié

$$\{x \in K \mid |x - a| \leqslant R\}$$

et $d^-(a, R)$ le disque non circonférencié

$$\{x \in K \mid |x - a| < R\}$$

et enfin $C(a, R)$ le cercle $\{x \in K \mid |x - a| = R\}$.

Soit D un fermé borné de diamètre R et soit $a \in D$; alors $d(a, R) \setminus D$ admet una partition en disques non circonférenciés maximaux $d^-(\alpha, \rho)$ appelés *trous* de D.

Soit A (R) la K-algèbre des séries de Taylor convergentes dans $d^-(O, R)$. Pour tout $\rho > 0$, et pour tout $f \in A(R)$ ayant une infinité de zéros dans $d^-(O, R)$. on note

$$D(f, \rho) = d^-(O, R) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} d^-(\beta_n, \rho)$$

où les points β_n sont les zéros de f dans $d^-(O, R)$.

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $d^-(O, R)$ telle que $\lim_{n \to \infty} |b_n| = R$, et $|b_n| \leqslant |b_{n+1}|$. Les théorèmes 1; 2, 3, 4 qui suivent montrent l'existence de fonctions g telle que $|g(x)|$ tende vers $+\infty$ dans $D(g, \rho)$. Ils s'appuient à la fois sur les résultats de M. LAZARD [L] (pour assurer l'annulation en une suite de points donnés) et sur les propriétés des T-suites [S_1] (pour assurer la convergence de $|g(x)|$ vers zéro dans $D(g, \rho)$).

Théorème 1. - *On suppose la suite* (b_n) *injective.*

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{N}$. *Il existe* $g \in A(R)$ *admettant chaque point* b_n *pour zéro d'ordre* $q_n \geqslant u_n$, et telle que $\displaystyle\lim_{\substack{|x| \to R \\ x \in D(g,\rho)}} |g(x)| = +\infty$ pour tout $p > o$

Théorème 2. - *Soit* $f \in A(R)$. *Il existe* $g \in A(R)$ *telle que*

$$\lim_{\substack{|x| \to R^- \\ x \in D(g,\rho)}} |g(x)| = +\infty \qquad \textit{et} \qquad \lim_{\substack{|x| \to R^- \\ x \in D(f\cdot g,\rho)}} |f(x)\, g(x)| = +\infty$$

pour tout $\rho > 0$.

Pour construire concrètement des fonctions f telles que

$$\lim_{\substack{|x| \to R^- \\ x \in D(f,\rho)}} |f(x)| = +\infty$$

le théorème 3 donne un exemple de choix des coefficients λ_n de f. On notera lim sup la limite supérieure d'une suite réelle.

Théorème 3. - *Soit* $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* K *vérifiant*

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right| = R$

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| R^n = +\infty$

(3) $\left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right| < \left|\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}}\right|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

et soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n \in A(R)$.

Alors les zéros de f *sont simples et forment une suite* β_n telle que

$|\beta_n| > |\beta_{n-1}|$ *et* f *vérifie* $\lim\limits_{\substack{|x| \to R^- \\ x \in D(f,\rho)}} |f(x)| = +\infty$ *pour tout* $\rho > 0$.

(L'existence de suites λ_n vérifiant (1), (2), (3) est évidente; si $R = 1$, par exemple on peut prendre $|\lambda_n| = n|\lambda_0|$ avec $\lambda_0 \neq 0$.)

Maintenant si K est maximalement complet (ou sphériquement complet) le théorème 2 de [L] permet d'obtenir un énoncé plus précis que celui du théorème 1.

Il faut d'abord rappeler la définition d'une T-suite [S_1].

Soit une suite de trous $(T_{m,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k_m \\ m \in \mathbb{N}}}$ d'un fermé borné D telle que

$d(a, T_{m,i}) = d_m$ $(1 \leqslant 1 \leqslant k_m)$ et $d_m < d_{m+1}$, (resp. $d_m > d_{m+1}$), $\lim\limits_{m \to \infty} d_m = R$

Soit $\rho_{m,i}$ le diamètre de $T_{m,i}$, soit $b_{m,i} \in T_{m,i}$ et soit $q_{m,i} \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant k_m$, $m \in \mathbb{N})$. Soit Log une fonction logarithme de base $p > 1$.

La suite $(T_{m,i}, q_{m,i})$ est appelée T-*suite* si

$$\lim_{m \to \infty} \left(\log \gamma_m - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_m} q_{m,i} \left|\log \frac{d_j}{d_m}\right|\right) = -\infty$$

$$\text{où } \gamma_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant k_m} \left(\frac{d_m}{\rho_{m,i}}\right)^{q_{m,i}} \prod_{\substack{\ell \neq i \\ 1 \leqslant \ell \leqslant k_m}} \left(\frac{d_m}{|b_{m,i} - b_{m,\ell}|}\right)^{q_{m,\ell}}$$

Pour toute suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $d^-(O, R)$ et pour tout $\rho > 0$, on notera

$$(\Delta_0 (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}) = d^-(O, R) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} d^-(\beta_n, \rho)\right)$$

Théorème 4. - *On suppose* K *maximalement complet et on suppose que la suite* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *vérifie en outre* $|b_i - b_j| \geqslant \rho > 0$ $\forall\, i \neq j$ *et qu'il existe une suite d'entiers* $u_n \in \mathbb{N}$ *tels que la suite* $(d^-(b_n, \rho); u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *soit une T-suite de* $\Delta_\rho((.b_n))$

Alors il existe $g \in A(R)$ *admettant pour seuls zéros dans* $d^-(O, R)$ *chaque point* b_n *à l'ordre* u_n *et tel que* $\lim\limits_{\begin{cases}|x|\to R^-\\ x\in D(g,\rho)\end{cases}} |g(x)| = +\infty$

Le principal objectif de cet article est d'établir un lien entre les fonctions $f \in A(R)$ telles que $\lim\limits_{\begin{cases}|x|\to R^-\\ x\in D(g,\rho)\end{cases}} f(x) = +\infty$ et les produits méromorphes croulants étudiés dans [S_3].

Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de K telle que, quand ρ est assez petit, chaque disque $d^-(\beta_n,\rho)$ contienne seulement un nombre fini de points de la suite.

On appelle *produit méromorphe de pôles* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une fonction (définie dans $d^-(O, R) \setminus \{\beta_0, ..., \beta_n, ...\}$) de la forme $\pi(x) = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x-\alpha_n}{x-\beta_n}$ où la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n - \beta_n = 0$.

Rappelons que pour toute partie D de K, on note R (D) la k-algèbre des fractions rationnelles $h(x) \in K(x)$ sans pôles dans D, et on note H (D) le K-espace vectoriel topologique complété de R (D) pour la topologie de la convergence uniforme sur D. Si D est fermé borné, H (D) est une K-algèbre de Banach pour la norme $\|.\|_D$ de la convergence uniforme et un élément $f \in H(D)$ est dit *quasi-inversible* s'il se factorise sous la forme P (x) g (x) où P est un polynôme dont tous les zéros sont intérieurs à D et où g est un élément inversible de H (D).

Dans [S_3] on a vu qu'un produit méromorphe $\pi(x)$ de pôles $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient aux algèbres $H(\Delta_\rho((\beta_n)))$ pour tout $\rho > 0$.

Supposons maintenant que la suite (β_n) soit la suite (b_n) définie ci-dessus et considérons un produit méromorphe $\pi(x) = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{x-a_n}{x-b_n}\right)$.

Alors on a vu que $\pi(x)$ appartient au corps de fractions M (R) de A (R) [S_3].

On a vu que $\pi(x)$ admet une limite quand $|x| \to R^-$, $x \in \Delta_\rho((b_n))$, si et seulement si π n'est pas un élément quasi-inversible de $H(\Delta_\rho((b_n)))$ et que dans ce cas cette limite est 1; les produits méromorphes $\pi(x)$ tels que cette limite existe sont appelés *produits croulants.*

Théorème 5. - *Soient* $f, g \in A(R)$ *telles que* $\lim\limits_{\begin{cases}|x|\to R^-\\ x\in D(f,\rho)\end{cases}} \left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right| = 0$ pour tout $\rho > 0$.

Alors $1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}$ *est un produit croulant.*

Corollaire - Soient f *et* $g \in A(R)$ telles que $\lim\limits_{\substack{|x| \to R^- \\ x \in D(f,\rho)}} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ *pour tout* $\rho > 0$. *Alors* $\dfrac{g}{f} \in H(D(f,\rho))$ *pour tout* $\rho > 0$.

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite des zéros de* f, *d'ordres respectifs* u_n *indexés de façon telle que* $|b_{n(q)} - b_i| > \rho$ *pour* $n(q) \leqslant i < n(q+1)$ *et* $|b_{n(q)} - b_i| \geqslant \rho$ *pour* $i < n(q)$ *et* $i \geqslant n(q+1)$; *si l'on note* $T_q = d^-(b_{n(q)}, \rho)$ *et* $s_q = \sum\limits_{i=n(q)}^{n(q+1)-1} u_i$ *alors la suite* $(T_q\,;\,s_q)$ *est une* T-*suite de* $\Delta_\rho((b_n))$.

Le théorème 5 et son corollaire fournissent une occasion assez exceptionnelle de construire un élément analytique dans $H(\Delta_\rho((b_n)))$ à l'aide d'une série de Taylor convergente dans $d^-(O, R)$.

Le théorème 6 permet au contraire d'exprimer une série de Taylor à l'aide de produits croulants.

Théorème 6. *- Soit* $f \in A(R)$. *Pour tout* $\lambda \in K$ *il existe des produits croulants* π_λ et $\tau_\lambda \in M(R)$ *tels que* $f = \lambda \dfrac{1 - \pi_\lambda}{1 - \tau_\lambda}$

Remarque Le théorème 6 montre qu'il est illusoire d'espérer démontrer que si D est un infraconnexe fermé borné et si h, $g \in H(D)$ sont tels que $\dfrac{h(x)}{g(x)}$ soit borné dans $D \setminus Z(g)$, où $Z(g)$ désigne l'ensemble des zéros de g, alors $\dfrac{h}{g} \in H(D)$.

Ce résultat, évident quand D est ouvert et sans T-filtre, devient faux d'après le théorème 6, quand D admet certains T-filtres.

Soit $R > 0$ et soit $A_b(R)$ l'ensemble des $f \in A(R)$ bornés sur $d^-(O, R)$. On sait que $A_b(R) \setminus H(d^-(O, R))$ n'est pas vide.

Théorème 7. *- Soit* $f \in A_b(R) \setminus H(d^-(O, R))$

Soit $f(x) = \lambda \left(\dfrac{1 - \pi_\lambda}{1 - \tau_\lambda}\right)$ *sa factorisation donnée au théorème 6 (où* π_λ *et* τ_λ *sont des produits croulants appartenant à* $M(R)$). *Soit* E_1 *l'ensemble des pôles de* π_λ *et de* τ_λ, *soit* E_2 *l'ensemble des zéros de* $1 - \tau_\lambda$, *soit* $\rho > 0$ *et soit* $D = d^-(O, R) \setminus \left(\bigcup\limits_{\alpha \in E_1 \cup E_2} d^-(\alpha, \rho) \right)$. *Alors* $\lambda(1 - \pi_\lambda)$ *et* $1 - \tau_\lambda$ *sont deux* *éléments de* H (D) *dont le quotient, égal à* f (x) *est borné dans* D, *mais n'appartient pas à* H (D).

En revenant maintenant à la notion générale de produit méromorphe $\pi(x)$ associé à une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on montre qu'un tel produit peut avoir plusieurs écroulements.

Soit $a \in K$ et soient r' et r'' $\in \mathbb{R}$ tels que $0 < r' < r''$. On notera $\Gamma(a, r', r'') = \{ x \in K \mid r' < |x - a| < r'' \}$.

Théorème 8. - *Soient* r *et* R *tels que* $0 < r < R$ *et soit* $\alpha \in K$. *Il existe des produits méromorphes dont les pôles* β_n *appartiennent à* $\Gamma(0, r, R)$, *tels que la suite* $|\beta_n|$ *admette pour points d'accumulation* r *et* R, *et tels que* $\lim\limits_{|x|\to R^-} \pi(x) = 1$ et $\lim\limits_{|x|\to r^+} \pi(x) = \alpha$.

II - RESULTATS PRELIMINAIRES

Rappelons quelques définitions classiques [A, E_2, K_1, K_4].

On notera v (x) la valuation définie sur K par $v(x) = -\log|x|$ où log est une fonction logarithme de base $p > 1$.

Une partie D de K est dite *infraconnexe* si pour tout $a \in D$ l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des $|x - a|$ $(x \in D)$ est un intervalle.

Soit D un infraconnexe, soit $a \in K$, soit $R > 0$ et supposons que les couronnes $\Gamma(a, r, R)$ (resp. $\Gamma(a, R, r)$) rencontrent D quel que soit $r < R$ (resp. $r > R$).

Le filtre de D qui admet pour base les ensembles $\Gamma(a, r, R) \cap D$, $r < R$, (resp. $\Gamma(a, R, r) \cap D$, $r > R$) est appelé filtre *croissant* de D (resp. *filtre décroissant* de D) de centre a, de diamètre R.

On sait que pour tout $f \in H(D)$ et pour tout filtre croissant $\mathcal{F}$ (resp. décroissant) de centre a, de diamètre R, $|f(x)|$ admet une limite sur $\mathcal{F}$ notée $\lim\limits_{\mathcal{F}} |f(x)|$. Alors si les filtres croissant ou décroissant de centre a et diamètre R existent sur D on sait que $\lim\limits_{|x-a|\to R^+} |f(x)| = \lim\limits_{|x-a|\to R^-} |f(x)| = \lim\limits_{\substack{|x-a|\to R\\ |x-a|\neq R\\ x\in D}} |f(x)| = \lim\limits_{\mathcal{F}} |f(x)|$

On définit une fonction de valuation associée à un élément analytique f sur un infraconnexe D par $v(f, -\log R) = -\log(\lim\limits_{\substack{|x|\to R\\ |x|\neq R\\ x\in D}} |f(x)|)$.

Alors la fonction $\mu \to v(f, \mu)$ est continue et affine par morceaux.

LEMME 1. Soit $g \in A(1)$ *admettant dans* $d^-(0, 1)$ *une suite de zéros* a_n *d'ordres respectifs* u_n, *avec* $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$.

A) *Alors quand* $|a_n| \leqslant |x| \leqslant |a_{n+1}|$, *on a*

$$v(g, v(x)) = \sum_{k=1}^{n} u_k (v(x) - v(a_k)) + v(g(0))$$

et quand $|a_n| < |x| < |a_{n+1}|$, *on a* $v(g(x)) = v(g, v(x))$

B) Soit $\rho \in]0,1[$ et soit D *un infraconnexe fermé borné tel que* $\tilde{D} = d(0,1)$ *et tel que* $a_n \notin D$ *quel que soit* $n \in N$.

Soit $n \in N$, *soit* $\Gamma = d^-(a_n, |a_n|)$ *et soit* q *le nombre des zéros de* g *dans* Γ. *Alors quand* $x \in \Gamma \cap D$, *on a*

$$v(g(x)) \leqslant v(g, v(x)) - \log \gamma(\Gamma \cap D, q).$$

Preuve A) est une propriété classique des séries de Taylor, qui découle du lemme de Hensel, [A].

Pour établir B) rappelons que g est élément analytique dans le disque $d(0, |a_n|)$. Par suite $\frac{1}{g} \in H(d(0, |a_n|) \cap D)$ et d'après le lemme de [E_4] on sait que $v\left(\frac{1}{g(x)}\right) \geqslant v\left(\frac{1}{g}, v(x)\right) + \log \gamma(\Gamma \cap D, q)$ d'où B).

LEMME 2. On suppose la suite b_n *injective, et telle que*

$$|b_{t(m)}| = |b_{t(m)+1}| = \dots = |b_{t(m)+k(m)}| < |b_{t(m+1)}|$$

où t(m) *est une suite croissante d'entiers. Soit* $d_m = |b_{t(m)}|$, *soit une suite* u_n *de* $\mathbb{N}^*$ *et soit* $V_m = \prod_{i=t(m)}^{t(m)+k(m)} \left(\frac{x - b_i}{b_i}\right)^{u_i}$

Il existe une série de Taylor $g \in A(R)$, *qui admet chaque point* b_n *pour zéro d'ordre* $\geqslant u_n$, *et telle que, pour tout* $\rho > 0$, *on ait*

$$\lim_{m \to \infty} \left[\inf_{x \in D(g,\rho) \setminus d^-(0,d_m)} (\min(|g(x)|, |V_m(x) g(x)|) \right] = +\infty.$$

Preuve. On supposera R = 1 et on notera $q_m = \sum_{i=t(m)}^{t(m)+k(m)} u_i$.

Soit B_m une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que

(1) $\lim_{m \to \infty} \frac{q_m}{\log B_m} = 0$. Alors on voit que pour établir la proposition il

suffit de montrer que

$$(2)\quad \inf_{\begin{cases} d_m \leqslant |x| < d_{m+1} \\ x \in D(g,\rho)\end{cases}} [\,|g(x)|(\min(1,|V_m(x)|)\,] \geqslant B_m\, \rho^{q_m} \quad \text{quand m est assez grand.}$$

En fait on voit que $|V_m(x)| = 1$ quand $d_m < |x| < d_{m+1}$.

Soit $C_m = C(0, d_m)$ et considérons donc $|V_m(x)|$ quand $x \in C_m \cap D(g, \rho)$.

Soit $\theta \in]0,1]$, soit $\rho \in]0,\theta[$, et comparons

$$\left\| \frac{1}{V_m} \right\|_{C_m \cap D(g,\rho)} \text{avec } \varphi_m = \left\| \frac{1}{V_m} \right\|_{C_m \cap D(g,\theta)} .$$

D'après les propriétés des fractions rationnelles on sait que

$$(3)\quad \left\| \frac{1}{V_m} \right\|_{C_m \cap D(g,\rho)} \leqslant \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{q_m} \varphi_m \quad ,$$

et pour satisfaire (2) il suffit donc de montrer que

$$\left(\inf_{\begin{cases} d_m \leqslant |x| < d_{m+1} \\ x \in D(g,\rho)\end{cases}} |g(x)|\right) \frac{\rho^{q_m}}{\varphi_m} \geqslant B_m\, \rho^{\,q_m} \text{ (quand m est assez grand)}$$

ou encore

$$(4)\quad \inf_{\begin{cases} d_m \leqslant |x| < d_m \\ x \in D(g,\rho)\end{cases}} |g(x)| \geqslant B_m\, \varphi_m \qquad \text{(pour m assez grand)}$$

Pour construire g, nous allons définir une suite $(\beta_{m,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant a_m \\ m \in \mathbb{N}}}$ vérifiant $d_m < |\beta_{m,i}| < |\beta_{m,i+1}| < d_{m+1}$, $(1 \leqslant i < a_m, m \in \mathbb{N})$ et:

$$(5)\quad \log B_m \leqslant (-\log d_{m+1})\, a_{m-1}\, (\log d_m - \log \delta_{m-1})\ , (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{où } \delta_m = |\beta_{m,a_m}|\ .$$

$$(6)\quad \frac{2 \log \varphi_m}{a_{m-1}\,(\log d_m - \log \delta_{m-1})} \leqslant \frac{1}{m}$$

En effet, on choisit d'abord la suite δ_m par exemple telle que $\log \delta_m = \frac{1}{2}(\log d_{m+1} + \log d_m)$, puis on choisit la suite a_m assez grande pour vérifier (5) et (6) et enfin on choisit arbitrairement les $\beta_{m,i}$ vérifiant $d_m < |\beta_{m,i}| < |\beta_{m,i+1}| < \delta_m$.

Soit $U_m(x) = V_m(x) \prod_{i=1}^{a_m} \dfrac{x - \beta_{m,i}}{\beta_{m,i}}$.

Grâce au théorème 1 de [F.M.] il existe $g \in A(1)$, telle que $g(0) = 1$, qui admet chaque b_n pour zéro d'ordre $\geqslant u_n$ et chaque $\beta_{m,i}$ pour zéro d'ordre $\geqslant 1$, et qui vérifie les inégalités (7)

$$(7) \quad -1 \leqslant v(g, \mu) - \sum_{m=1}^{\infty} v(U_m, \mu) \leqslant 0 \ \forall \mu > 0.$$

Pour établir (4) évaluons d'abord $v(g(x)) - v(g, v(x))$ quand $x \in D(g, \rho)$ et que $d_m \leqslant v(x) < d_{m+1}$. Soit Γ une classe de $C(0, r)$ et soit q la différence entre le nombre des zéros de g dans Γ et le nombre des zéros de U_m dans Γ. Pour $\mu \leqslant -\log r$ il est clair que $v(g, \mu) - \sum_{m=1}^{\infty} v(U_m, \mu) \leqslant q(\log r + \mu)$ et en faisant tendre μ vers 0 on voit que $v(g, \mu) - \sum_{m=1}^{\infty} v(U_m, \mu) \leqslant q \log r$ d'où d'après (7) on obtient (8) $q \leqslant -\dfrac{1}{\log r}$

Notons $g_m = \prod_{i=1}^{m} U_i$. Alors on voit que g se factorise sous la forme $g_m f_m$ où f_m est une série de Taylor qui a q zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ dans Γ et telle que $f(0) = 1$. On a donc $v(f_m, -\log r) \leqslant 0$. D'autre part, pour évaluer $v(f_m(x)) - v(f_m, v(x))$ quand $x \in \Gamma \cap D(g, \rho)$, on peut factoriser f_m sous la forme h P où $P(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - \alpha_i)$. Alors il est clair que $|x - \alpha_i| \geqslant \rho \ \forall i = 1, \ldots, q$ d'où $|P(x)| \geqslant \rho^q$ $\forall x \in \Gamma \cap D(g, \rho)$. On a donc $v(P(x)) \leqslant -q \log \rho$. D'autre part il est clair que $v(h(x)) = v(h, -\log r)$ quand $x \in \Gamma \cap D(g, \rho)$ puisque par définition h ne s'annule pas dans Γ. Alors

$$v(f_m(x)) - v(f_m, -\log r) = v(h(x)) - v(h, -\log r) + v(P(x)) - v(P, -\log r)$$

$\leqslant q\ (\log r - \log \rho) \leqslant -\dfrac{1}{\log r}\ (\log r - \log \rho)$ d'après (8) et donc finalement

$v\ (f_m\ (x)) - v\ (f_m, -\log r) \leqslant \dfrac{\log \rho}{\log r} - 1 \leqslant \dfrac{\log \rho}{\log d_m} - 1 \leqslant \dfrac{\log \rho}{\log d_m}$, et de même, on obtient

$$(9)\quad v\,(g\,(x)) - v\,(g, -\log r) \leqslant v\,(g_m\,(x)) - v\,(g_m, -\log r) + \frac{\log \rho}{\log d_m}\ .$$

Considérons maintenant $\left|\dfrac{1}{U_m(x)}\right|$ quand $x \in \Gamma \cap D\,(g, \rho)$.

Si $d_m < r < d_{m+1}$, U_m a au plus un zéro sur le cercle $C\ (0, r)$ et donc $\left|\dfrac{1}{U_m\ (x)}\right| \leqslant \dfrac{1}{\rho}$. Mais si $r = d_m$, on voit que $|U_m\ (x)| = |V_m\ (x)|$, d'où d'après (2) on a $\left\|\dfrac{1}{U_m}\right\|_{\Gamma \cap D(g,\rho)} \leqslant \varphi_m \left(\dfrac{\theta}{\rho}\right)^{q_m}$.

On en déduit que $v\ (U_m(x)) - v\,(U_m, -\log r) \leqslant -\log \varphi_m - q_m \log \rho$ (car il est clair que $v(U_m, \mu) \leqslant 0$ pour tout μ).

D'autre part $v(U_j(x)) = v(U_j, -\log r)\ \forall_j < m$, (car U_j n'a aucun zéro dans $C\ (0, r)$ pour $j < m$) d'où $v(g_m(x)) - v\ (g_m\ -\log r) \leqslant -\log \varphi_m - q_m \log \rho$ et donc d'après (9) on obtient (10).

$$(10)\qquad v\,(g\,(x)) - v\,(g, -\log r) \leqslant \log \varphi_m - q_m \log \rho + \frac{\log \rho}{\log d_m}\ .$$

D'autre part, considérons $v\ (g, -\log r) \leqslant v\ (g_m\ , -\log r)$.

Par construction $v\ (g_m, -\log r) \leqslant v\ (U_{m-1}\ , -\log r)$ or

$v\ (U_{m-1}, -\log r) \leqslant -a_{m-1}\ (\log d_m - \log \delta_{m-1})$ et donc on obtient

$v\ (g_m\ , -\log r) \leqslant -a_{m-1}\ (\log d_m - \log \delta_{m-1})$ d'où

$v\ (g\ , -\log r) \leqslant -a_{m-1}\ (\log d_m - \log \delta_{m-1})$. Alors grâce à (10) on voit que

$$v\,(g\,(x)) \leqslant -a_{m-1}\ (\log d_m - \log (\delta_{m-1})) + \log \varphi_m - q_m \log \rho + \frac{\log \rho}{\log d_m}\ .$$

Alors grâce à (5) on voit que $\frac{1}{2}\,(-a_{m-1})\ (\log d_m - \log \delta_{m-1}) \leqslant \dfrac{\log B_m}{\log d_m}$, d'òu

$$v\,(g\,(x)) \leqslant \frac{-a_{m-1}}{2}\left(\log d_m - \log \delta_{m-1}\right) + \log \varphi_m + \log \rho\left(\frac{1}{d_m} - q_m\right) +$$

$$+ \frac{\log B_m}{\log d_m} \quad (x \in D(g,\rho),\ d_m \leqslant |\alpha| < d_{m+1})$$

d'où d'après (6), on obtient

$$v(g(x)) + (\log \varphi_m - q_m \log \rho) \leqslant \log \rho \left(\frac{1}{d_m} - 2q_m \right) + \frac{\log B_m}{\log d_m}.$$

$$(x \in D(g,\rho),\ d_m \leqslant |x| < d_{m+1}).$$

Alors d'après (1) on voit que la suite

$$m \to \log \rho \left(\frac{1}{d_m} - q_m \right) + \frac{\log B_m}{\log d_m} \text{tend vers} - \infty$$

(puisque $\lim\limits_{m \to \infty} d_m = 1$) et donc la relation (4) est bien satisfaite quand m est assez grand, ce qui achève la démonstration.

LEMME 3. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n$ *une série de Taylor convergente dans un disque D. Alors l'ensemble Z des zéros de f contient q zéros simples* $\beta_1, ..., \beta_q$ *tels que* $|\beta_i| < |\beta_{i+1}|$ $(1 \leqslant i \leqslant q-1)$ *et* $|\alpha| > |\beta_q|$ *pour tout* $\alpha \in Z \setminus \{\beta_1, ..., \beta_q\}$ *si et seulement si on a*

$$(1) \quad \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \right| < \left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}} \right| \quad \textit{pour } 0 \leqslant i \leqslant q-2$$

$$\text{et } (2) \quad \left| \frac{\lambda_{q-1}}{\lambda_q} \right|^{n-1} < \left| \frac{\lambda_q}{\lambda_n} \right| \quad \textit{pour tout } n > q.$$

Si ces hypothèses sont vérifiées, alors on a $|\beta_i| = \left| \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \right|$ *pour tout* $i = 1, ..., q$.

Preuve. Supposons le lemme déjà établi pour tout entier $q \leqslant t$ et montrons-le quand $q = t+1$. Soit $r = \left| \frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} \right|$

Dire que "$|\beta_i| < |\beta_{i+1}|$ *pour tout* $i \leqslant t$ *et* $|\alpha| > |\beta_{t+1}|$ *pour tout* $Z \setminus \{\beta_1, ..., \beta_q\}$" implique que f admet t zéros dans $d^-(0, r)$ et un zéro simple dans $C(0, r)$, ce qui entraîne (d'après les propriétés classiques [A])

(3) $\quad |\lambda_{t+1}| r^{t+1} = |\lambda_t| r^t > |\lambda_n| r^n$ pour tout $n \neq t$, et $t+1$ d'où la condition (2) au rang $t+1$, ainsi que la condition (1) au rang $t+1$, puisqu'elle est déjà vérifiée au rang t par hypothèse (d'après le lemme supposé vrai au rang t).

Réciproquement, supposons verifiées les conditions (1) et (2) au rang $t+1$. Alors puisque le lemme est vrai au rang t, on a déjà t zéros simples dans $d\left(0, \left|\frac{\lambda_{t-1}}{\lambda_t}\right|\right)$ (et aucun autre zéro) et grâce à (1) et (2) au rang $(t+1)$ on retrouve (3) et on a donc un zéro simple unique dans $C(0, r)$ et t zéros dans $d^-(0, r)$, ce qui achève le démonstration.

Corollaire. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n$ *une série de Taylor convergente dans un disque* $d^-(0, R)$. *Alors l'ensemble des zéros de* f *est une suite de zéros simples* β_n *tels que* $|\beta_{n+1}| > |\beta_n|$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *si et seulement si* $\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right| > \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|$ *pour tout* $n \in N^*$.

Si ces conditions sont réalisées alors $|\beta_n| = \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

III - PREUVE DES THEOREMES 1, 2, 3, 4

Preuve du théorème 1. Le théorème est une conséquence évidente du lemme 2 puisqu'il suffit de prendre $V_m = 1$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Preuve du théorème 2. On peut naturellement supposer que $f(0) = 1$.

Le cas où les zéros de f sont en nombre fini est trivial car dans ce cas on sait que $|f(x)|$ est croissant quand $|x|$ tend vers R^- et donc il suffit de prendre une fonction g telle que $\lim\limits_{\substack{|x| \to R \\ x \in D(g,\rho)}} |g(x)| = +\infty$.

Considérons donc le cas où les zéros de f ne sont pas en nombre fini. Dans ce cas on peut les noter $(c_{m,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant a_m \\ m \in \mathbb{N}}}$ avec

$|c_{m,i}| = d_m < d_{m+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant a_m\,;\, m \in \mathbb{N})$ et $\lim\limits_{m \to \infty} d_m = R$. Soit $u_{m,i}$ l'ordre du zéro $c_{m,i}$ de f $(1 \leqslant i \leqslant a_m\,;\, m \in \mathbb{N})$, et soit $V_m = \prod_{i=1}^{q_m} \left(\frac{x - c_{m,i}}{c_{m,i}}\right)^{u_{m,i}}$

Grâce au lemme 2, il existe $g \in A(R)$ telle que $\lim\limits_{\substack{|x| \to R \\ x \in D(g,\rho)}} |g(x)| = +\infty$ et telle que quand $d_m \leqslant |x| < d_{m+1}$ et $x \in D(g, \rho)$ on ait (1) $|g(x)| \cdot |V_m(x)| \geqslant A_m$. On va en déduire que (2) $|g(x)||f(x)| \geqslant A_m$. En effet remarquons que V_m divise f (dans l'algèbre des séries de Taylor convergentes dans $d^-(0, R)$) et que $\frac{f}{V_m}$ n'a aucun zéro dans $x \in d^-(0, d_{m+1}) \setminus d^-(0, d_m)$. Par suite $v(f(x)) - v(f, v(x)) = = + v(V_m(x)) - v(V_m, v(x))$. Mais il est clair que $v(f, v(x)) \leqslant \lim_{\mu\to+\infty} v(f, \mu) = = 0$ (du fait que $f(0) = 1$). D'autre part $v(V_m, \mu) \leqslant 0 \ \forall \mu < -\log R$. Par suite, d'après (1) on voit que: $v(f(x)) \leqslant + v(V_m(x))$ et donc $v(f(x)\, g(x)) \leqslant v(g(x)) + + v(V_m(x))$ d'où $|f(x)\, g(x)| \geqslant |g(x)\, V_m(x)| \geqslant A_m$, d'après (1) ce qui achève la démonstration d'après (2).

Démonstration du théorème 3. On sait grâce au corollaire du lemme 3 que f admet une suite de zéros simples β_n tels que $|\beta_n| = \left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|$ et aucun autre zéro dans $d^-(0, R)$.

Posons $\mu_n = v(\beta_n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), alors

$\lim_{n\to\infty} v(f, \mu_n) = -\infty$ car $v(f, \mu_n) = -\operatorname{Log}(\lambda_n R^n)$. Par suite on a donc

(4) $\lim_{\mu\to-\log R} v(f, \mu) = -\infty$. Soit $x \in D(f, \rho)$. Il est immédiat de voir que

(5) $v(f(x)) \leqslant v(f, v(x)) + \operatorname{Log}\left(\frac{R}{\rho}\right)$. En effet si $v(x) \neq \mu_n \ \forall_n \in \mathbb{N}^*$, alors $v(f(x)) = v(f, v(x))$. Maintenant si $v(x) = \mu_n$ alors on a

$$v(f(x)) \leqslant v(f, \mu_n) - (\mu_n - v(x - \beta_n))$$

car f a un seul zéro sur le cercle $C(0, |\beta_n|)$.

Or $v(x - \beta_n) \leqslant -\log\rho$, d'où

$v(f(x)) \leqslant v(f, \mu_n) - (\mu_n + \log\rho) \leqslant v(f, \mu_n) + \log\left(\frac{R}{\rho}\right)$ ce qui achève d'établir (5) et donne la conclusion du théorème, d'après (4).

Preuve du théorème 4. On peut naturellement se ramener au cas où $R = 1$ ce que nous supposons donc.

Soit $m \to t(m)$ la suite d'entiers tels que

$$|b_{t(m)}| = |b_{t(m)+1}| = \ldots = |b_{t(m)+k_m}| < |b_{t(m+1)}|$$

avec $t(m+1) = t(m) + k_m + 1$, et posons $d_m = |b_{t(m)}|$

et notons

$T_n = d^-(b_n, \rho)\ (n \in \mathbb{N})$.

D'après le théorème 2 de [L], puisque K est maximalement complet, il existe une série de Taylor g convergente pour $|x| < 1$, qui admet pour seuls zéros chaque b_n à l'ordre u_n et telle que $v(g(0)) = 0$. Alors d'après le lemme 1 on sait que quand $d_m \leqslant |x| < d_{m+1}$ on a

$$v(g, v(x)) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{n=t(j)}^{t(j)+k_j} u_n \right) \left(\log d_j - v(x) \right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{n=t(j)}^{t(j)+k_j} u_n \right) \left(\log d_j - \log d_m \right)$$

Posons $q_m = \sum_{n=t(j)}^{t(j)+k_j} u_n$; on a donc

(1) $\quad v(g, v(x)) \leqslant \sum_{j=1}^{m} q_j (\log d_j - \log d_m)$.

Par ailleurs, quand $d_m < |x| < d_{m+1}$ on a $v(g(x)) = v(g, v(x))$ et quand $|x| = d_m$, d'après le lemme on sait que (2) $v(g(x)) \leqslant v(g; \log(d_m)) + \log \gamma_m$

où $\gamma_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant k_m} \left(U_{t(m)+i} (\log d_m - \log \rho) + \sum_{j \neq i,\, 1 \leqslant j \leqslant k_m} u_{t(m)+j} \right.$

$\left. \log \dfrac{d_m}{|b_{m,j} - b_{m,i}|} \right)$

Alors grâce à (1) et (2), on voit que

(3) $\quad v(g(x)) \leqslant \sum_{j=1}^{m} q_j (\log d_j - \log d_m) + \log \gamma_m$ pour tout $x \in \Delta_\rho$ tel que $d_m \leqslant x < d_{m+1}$.

Mais puisque la suite (T_n, u_n) est une T-suite, on sait que

$$\lim_{m \to +\infty} \left(-\log \gamma_m + \sum_{j=1}^{m} q_j (\log d_m - \log d_j) \right) = -\infty$$

d'où, d'après (3), $\lim_{\substack{|x| \to 1^- \\ x \in \Delta_\rho}} v(g(x)) = -\infty$ ce qui achève la démonstration.

IV - DEMONSTRATION DES THEOREMES 5, 6, 7, 8

Preuve du théorème 5

On peut naturellement supposer $R = 1$ pour la démonstration. Remarquons d'abord que l'ensemble des zéros de f est infini puisque f est non bornée dans

$d^-(0, 1)$. Pour la commodité de la démonstration, nous indexons les zéros sous la forme d'une suite (b_n) où chaque zéro d'ordre de multiplicité q est représenté par q termes égaux de la suite, et où $|b_n| \leqslant |b_{n+1}| \forall n \in \mathbb{N}$. Enfin notons $T_n(\rho) = d^-(b_n, \rho)$.

Considérons maintenant $u(x) = 1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}$ pour $x \in D(f, \rho)$.

De même notons (a_n) la suite des zéros de u, où chaque zéro a_n d'ordre q_n est répété q fois consécutives et où $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$. Nous allons d'abord montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{\begin{cases}|x|\to 1^- \\ x \in D(f,\rho)\end{cases}} u(x) = 1$, on peut choisir $\epsilon(\rho) > 0$ tel que $|u(x)| = 1$ pour $x \in D(f, \rho) \cap \Gamma(0,1 - \epsilon(\rho)$. Alors d'après le lemme IV - 2 de [S_3] on voit que les pôles et les zéros de u dans $\Gamma(0,1 - \epsilon(\rho)$ sont dans des trous de $D(f, \rho)$, que chaque trou de $D(f, \rho) \cap \Gamma(0,1 - \epsilon(\rho),1)$ contient autant de zéros que de pôles (chacun compté avec son ordre de multiplicité) et que $d(0,1-\epsilon(\rho)$ contient lui aussi autant de zéros que de pôles. Considérons alors un rang $N(\rho)$ tel que $|b_{N(\rho)}| \leqslant 1 - \epsilon(\rho)$; on voit que $|a_n - b_n| < \rho$ pour $n \geqslant N(\rho)$. Comme ρ est arbitraire, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

On peut maintenant considérer le produit méromorphe

$$\Pi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x - a_n}{x - b_n}\right)$$

et on voit que les zéros et les pôles de u et de Π sont les mêmes, avec le même ordre de multiplicité, et d'après le théorème I.2 de [S_3], $\dfrac{u(x)}{\Pi(x)}$ est une série de Taylor convergente pour $|x| < 1$. Mais puisque $\lim\limits_{|x|\to 1^-} u(x) = 1$, on voit qu'on peut appliquer le lemme V-1 de [S_3] et on a donc $u(x) = \pi(x)$ ce qui achève la démonstration.

Preuve du corollaire

D'après le théorème 5, on voit que $1 - \dfrac{g}{f}$ est un produit méromorphe convergent dans $D(f, \rho)$ et donc $1 - \dfrac{g}{f} \in H D(f, \rho))$, donc $\dfrac{g}{f} \in H(D(f, \rho))$. Alors $\dfrac{g}{f}$ tend vers 0 suivant le filtre croissant de centre 0, de diamètre 1. C'est donc un T-filtre et puisque dans chaque trou T_q contenant des pôles de $\dfrac{g}{f}$, la somme des ordres de multiplicité des pôles est s_q, la suite $(T_q ; s_q)$ forme une T-suite.

Preuve du théorème 6

Soit $\rho > 0$. D'après le théorème 2 il existe une série de Taylor g convergente pour $|x| < R$, telle que $\lim\limits_{\substack{|x|\to R^- \\ x \in D(g,\rho)}} |g(x)| = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{|x|\to R^- \\ x \in D(f.g,\rho)}} |f(x)\, g(x)| = +\infty$ quel que soit $\rho > 0$. Alors d'après le corollaire du théorème 5, il existe des produits croulants π_λ et τ_λ tels que $\pi_\lambda(x) = 1 - \dfrac{1}{g(x)}$ pour tout $x \in d^-(0, R)$ tel que $g(x) \neq 0$ et $\tau_\lambda(x) = 1 - \dfrac{\lambda}{f(x)\, g(x)}$ pour tout $x \in d^-(0, R)$ tel que $f(x)\, g(x) \neq$ $\neq 0$. Par suite $f(x) = \lambda \dfrac{1 - \pi_\lambda(x)}{1 - \tau_\lambda(x)}$, pour tout $x \in d^-(0, R)$ tel que $f(x)\, g(x) \neq 0$.

La démonstration du théorème 7 utilisera le lemme 4 suivant qui est une adaptation du théorème 1.

Soit g une série de Laurent convergente pour $|x| > r$ et soit E l'ensemble des zéros de g. Pour tout $\rho > 0$ on notera

$$D(g, \rho) = K \setminus (d(0, r) \cup (\bigcup_{\alpha \in E} d^-(\alpha, \rho))).$$

LEMME 4. *Soit β_n une suite injective telle que $r < |\beta_n| < |\beta_{n-1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim |\beta_n| = r$ et soit u_n une suite de $\mathbb{N}$.*

Alors il existe une série de Laurent $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda_{-n}}{x^n}$ convergente pour $|x| > r$ admettant chaque point β_n pour zéro d'ordre $q_n \geqslant u_n$ telle que

$$\lim_{\substack{|x|\to r^+ \\ x \in D(g,\rho)}} |g(x)| = +\infty.$$

Preuve. Il existe $h \in A\left(\dfrac{1}{r}\right)$ admettant chaque point $\alpha_n = \dfrac{1}{\beta_n}$ pour zéro d'ordre $q_n \geqslant u_n$, et telle que $\lim\limits_{\substack{|x|\to (\frac{1}{r})^- \\ x \in D(h,\rho)}} |h(x)| = +\infty$.

Soit $g(x) = h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Soit D' l'image de $D(h, \rho)$ par l'inversion $x \to \dfrac{1}{x}$. On voit que les trous de D' ont des diamètres dont la borne inférieure est $r^2 \rho$. Supposons par exemple $r < 1$. On voit que si l'on pose $g(x) = h\left(\dfrac{1}{x}\right)$, alors les trous T de $D(g, \rho)$ sont plus grands que ceux de D' quand $d(T, 0)$ est suffisamment voisin de r. Par suite il existe $r' > r$ tel que $D' \cap d(0, r') \supset D(g, \rho) \cap d(0, r')$, et donc la propriété de g (obtenue par construction) $\lim\limits_{\substack{|x|\to r^- \\ x \in D'}} |g(x)| = +\infty$ entraine $\lim\limits_{\substack{|x|\to r^- \\ x \in D(g,\rho)}} |g(x)| = +\infty$.

Preuve du théorème 7. En effet par construction $\lambda (1 - \pi_\lambda)$ et $1 - \tau_\lambda$ appartiennent à H (D) et $\dfrac{\lambda (1 - \pi_\lambda)}{1 - \tau_\lambda}$ est égal à f (x), bornée sur D par hypothèse. Supposons alors que $\dfrac{\lambda (1 - \pi_\lambda)}{1 - \tau_\lambda} \in H(D)$.

En considérant sa décomposition Mittag-Lefflerienne sur D on voit que sa partie singulière sur chaque trou $d^-(\alpha, \rho)$ est nulle puisque $f \in H(d(0, r))$ $\forall r < R$. Par suite $f \in H(d^-(0, R))$, ce qui contredit l'hypothèse.

Preuve du théorème 8. (Elle s'inspire naturellement de celle du théorème 5).

Grâce au théorème 1, il existe $f \in A(R)$ telle que $\lim\limits_{\substack{|x| \to R \\ x \in D(f, \rho)}} |f(x)| = +\infty$ pour tout $\rho > 0$.

Grâce au corollaire du théorème 5, on sait que $\dfrac{1}{f} \in H(D(f, \rho))$ pour tout $\rho > 0$.

Maintenant d'après le lemme 4 il existe une série de Laurent g convergente pour $|x| > r$, bornée dans $K \setminus d(0, r + \epsilon)$ $(\forall \epsilon > 0)$ telle que $\lim\limits_{\substack{|x| \to r^+ \\ x \in D(g, \rho)}} |g(x)| = +\infty$ pour tout $\rho > 0$, et l'on a $\dfrac{1}{g} \in H(D(g, \rho))$ pour tout $\rho > 0$.

Soit u définie dans $D(f, \rho)$ par $u(x) = 1 + \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Soit $r' \in \,]r, R[$

soit E l'ensemble des zéros de u dans $\Gamma(0, r, R)$ et pour tout $\rho > 0$

soit $\Sigma_\rho = (\Gamma(0, r, R) \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in E} d^-(\alpha, \rho)) \cap D(f, \rho) \cap D(g, \rho)$.

On sait que g est bornée dans $\Sigma_\rho \setminus d(0, r')$ d'où $\lim\limits_{\substack{|x| \to R \\ x \in \Sigma_\rho}} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ et donc

$$\lim_{\substack{|x| \to R^- \\ x \in \Sigma_\rho}} u(x) = 1$$

D'autre part, puisque $u(x) \neq 0$ $\forall x \in \Sigma_\rho$, on peut considérer $\varphi(x) = \dfrac{1}{u(x)}$. Comme f (x) est bornée dans d (0, r') on voit que

$$\lim_{\substack{|x| \to r^+ \\ x \in \Sigma_\rho}} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty \text{ et donc } \lim_{\substack{|x| \to r^+ \\ x \in \Sigma_\rho}} \varphi(x) = 0.$$

En outre on voit que pour tous R_1, R_2 tels que $r < R_1 < R_2 < R$, f et $g \in H(\Gamma(0, R_1, R_2))$ et donc φ appartient au corps de fractions $\chi(R_1, R_2)$ de $H(\Gamma(0, R_1, R_2))$.

Soit $\phi(x) = \dfrac{1}{\theta + 1} (\varphi(x) + \theta)$. On a donc

(1) $\lim\limits_{\substack{|x|\to R^- \\ x\in\Sigma_\rho}} \phi(x) = 1$, (2) $\lim\limits_{\substack{|x|\to R^+ \\ x\in\Sigma_\rho}}(x) = \dfrac{\theta}{\theta+1}$ et $\phi \in \chi(R_1, R_2)$.

Dans $\chi(R_1, R_2)$, ϕ se factorise sous la forme

$h_{R_1 R_2}$ $\phi_{R_1 R_2}$ où $h_{R_1 R_2}$ $\in$ K (X) et $h_{R_1 R_2}$ a tous ses zéros et ses pôles dans $\Gamma(0, R_1 R_2)$ et où $\phi_{R_1 R_2}$ est un élément inversible de $H(\Gamma(0, R_1 R_2))$.

Grâce aux limites de ϕ, on peut choisir R_1 et R_2 tels que $|\phi(x)| = 1$ pour $x \in \Sigma_\rho \cap \Gamma(0, R_2, R)$ et $|\phi(x)| = \dfrac{\theta}{\theta+1}$ pour $x \in \Sigma_\rho \cap \Gamma(0, r, R_1)$. Alors d'après le lemme IV 2 de [S_3] on voit que les pôles et les zéros de ϕ dans $\Gamma(0, R_2, R)$ (resp. dans $\Gamma(0, r, R_1)$) sont dans les trous de Σ_ρ et que dans chaque trou de $\Sigma_\rho \cap \Gamma(0, R_2, R)$ (resp. de $\Sigma_\rho \cap \Gamma(0, r, R_1)$) ϕ a autant de zéros que de pôles.

Soit (a''_n) (resp. (a'_n)) la suite des zéros de ϕ dans $\Gamma(0, R_2, R)$ (resp. $\Gamma(0, r, R_1)$) et soit (b''_n) (resp. (b'_n)) la suite des pôles de ϕ dans $\Gamma(0, r, R_1)$. On voit donc qu'en choisissant une bonne indexation, on aura $|a''_n - b''_n| < \rho$ (resp. $|a'_n - b'_n| < \rho$), et comme on peut répéter le même raisonnement avec ρ arbitrairement petit (en choisissant R_2 assez voisin de R, et R_1 assez voisin de r) on voit que $\lim\limits_{n\to\infty}(a''_n - b''_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(a'_n - b'_n) = 0$.

D'autre part, on voit que $v(\phi, \mu)$ est constant dans $[-\log R_1, -\log r[$ ainsi que dans $]-\log R, -\log R_2]$ et il résulte que ϕ a autant de zéros que de pôles dans $\Gamma(0, R_1, R_2)$.

On peut naturellement supposer que le numérateur et le dénominateur de $h_{R_1 R_2}$ sont unitaires et on voit que $h_{R_1 R_2} \prod\limits_{i=1}^{\infty} \left(\dfrac{x - a'_i}{x - b'_i}\right) \prod\limits_{i=1}^{\infty} \left(\dfrac{x - a''_i}{x - b''_i}\right)$ peut se mettre sous la forme d'un produit méromorphe $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x - a_n}{x - b_n}$.

Alors on voit que π et ϕ ont exactement les mêmes zéros et les mêmes pôles dans $\Gamma(0, r, R)$ de sorte que $\dfrac{\phi(x)}{\pi(x)}$ est une série de Laurent convergente dans $\Gamma(0, r, R)$. On en déduit donc grâce au lemme V I de [S_3] que $\phi = \pi$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] AMICE (Y) Les nombres p-adiques. P.U.F. 1975.

[E_1] ESCASSUT (A). Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne. Indagationes Mathematicae. t. 36, 1974. p. 339.351.

[E_2] ESCASSUT (A). Elements analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe. Annali di Mat. pura ed appl. Bologna. t 110.1976.P. 335.352.

[E_3] ESCASSUT (A). T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t.25,2, 1975, p.45.80.

[F M] FRESNEL (J) et de MATHAN (B). L'image de la transformation de Fourier p-adique. C.R. Acad. Sc. Paris, t.278, série A, 1974. p. 653.656.

[K_1] M. KRASNER, Prolongement analytique dans les corps valués complets: préservation de l'analycité par des opérations rationnelles; quasi-connexité et éléments analytiques réguliers, C.R.A.S. Paris 244 (1957), pp. 1599-1602.

[K_2] M. KRASNER, Prolongement analytique dans les corps valués complets: uniformité des fonctions analytiques; l'analycité des fonctions méromorphes, C.R.A.S. Paris 244 (1957), pp. 1996-1999.

[K_2] M. KRASNER, Prolongement analytique dans les corps valués complets: éléments analytiques, préliminaires du théorème d'unicité, C.R.A.S. Paris 239 (1954), pp. 468-470.

[K_3] M. KRASNER, Prolongement analytique dans les corps valués complets: préservation de l'analycité par la convergence uniforme et par la dérivation; théorème de Mittag-Leffler généralisé pour les éléments analytiques, C.R.A.S. Paris 244 (1957), pp. 2570-2573.

[K_4] M. KRASNER, Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendences géométriques en algèbre et théorie des nombres. Clermont-Ferrand 1964, p. 97-141. Centre National de la Recherche Scientifique, 1966 (Colloques internationaux du C.N.R.S. Paris, 143).

[L] LAZARD (M). Les zéros d'une fonction analytique. Publications mathématiques n.° 14 P.U.F. 1962 pp. 47-75.

[M.R.] MOTZKIN (F.) et ROBBA (Ph.). Prolongement analytique en analyse p-adique. Séminaire de Théorie des Nombres, Faculté des Sciences de Bordeaux. t. 3 1968/1969.

[R] ROBBA (Ph.) Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets. Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques, Astérisque t. 10, 1975, p. 109-220.

[S_1] SARMANT (M.C.) et ESCASSUT (A). suites idempotentes, Bulletin des Sciences Mathématiques 106, 1982, n.° 3 pp. 289-303.

[S₂] SARMANT (M.C.) Décomposition en produit de facteurs de fonctions méromorphes. C.R.A.S. t. 292, pp. 127-130. 1981.

[S₃] SARMANT (M.C.) Produits méromorphes. Bulletin des Sciences Mathématiques 2° série, 109, 1985, p. 155-178.

[S₄] SARMANT (M.C.) et ESCASSUT (A). Prolongement analytique à travers un T-filtre. (A paraître dans Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica).

Mathématiques
tour 45-46, 5ième
Université Pierre et Marie Curie
4 Place Jussieu
752300 PARIS CEDEX

U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatiques
Université de Bordeaux I
351 Cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX