

SOBRE ESPACIOS SEMI-SUSLIN Y ESPACIOS CON RED DE TIPO \mathcal{C}

por

JOSE ORIHUELA*

ABSTRACT

This paper is devoted to the study of the relations between the classes of webbed spaces introduced by De Wilde and the class of semi-Suslin spaces of Valdivia. Both classes are related with the closed graph theorem. We prove that a strictly webbed space is semi-Suslin and that a semi-Suslin space is webbed. Further, we show that a webbed and locally complete space is semi-Suslin too. Looking at convexity conditions we introduce some extensions of semi-Suslin spaces giving new results related with the closed graph theorem.

INTRODUCCION Y NOTACIONES

Los espacios vectoriales que utilizaremos están definidos sobre el cuerpo \mathbb{K} de los números reales o complejos. La palabra "espacio" significará "espacio vectorial topológico de Hausdorff" a menos que se especifique lo contrario. Si A es un subconjunto de un espacio E , denotaremos por $\langle A \rangle$ el subespacio generado por A . Si $p \in (0, 1]$ y A es absolutamente p -convexo y acotado, denotamos por E_A al espacio $\langle A \rangle$ dotado con la p -norma del funcional de Minkowski del conjunto A , esto es, $P_A(x) = \inf \{ \lambda^p : x \in \lambda A, \lambda \geq 0 \}$. A es un p -disco de Banach si E_A es completo. Un espacio E es localmente completo si todo subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado de E es un disco de Banach, (4). Denotamos por $E[\mathcal{T}]$ al espacio E dotado de la topología \mathcal{T} . Pondremos $\hat{E}[\mathcal{T}]$ para la completación de E y $\tilde{E}[\mathcal{T}]$ para la completación local. \tilde{E} es la intersec-

(*) El presente trabajo constituye parte de la tesis doctoral del autor, realizada bajo la dirección del professor M. Valdivia.

ción de todos los subespacios localmente completos F de \hat{E} tal que $F \supset E$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ es la restricción de $\tilde{\mathcal{C}}$ a \hat{E} . Para las nociones y notaciones standard de la teoría de espacios vectoriales topológicos nos referimos (6) y (7).

Siguiendo a De Wilde, (2), una sucesión (A_k) de subconjuntos no vacíos de un espacio E se dice que es completante si $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$ y si existe una sucesión (λ_k) de escalares positivos tal que, si $0 < \mu_k \leq \lambda_k$ y $x_k \in A_k$

$k=1, 2, \dots$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$ converge en E . Si la sucesión (λ_k) se puede escoger de manera que $\sum_{k=p}^{\infty} \mu_k x_k \in A_p$ $p=1, 2, \dots$, la sucesión (A_k) se llama

estrictamente completa. Una red en un espacio E es una familia de subconjuntos de E , $\mathcal{W} = \{C_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$, donde k, m_1, m_2, \dots, m_k son enteros positivos y tal que se verifican las siguientes relaciones:

$$E = \bigcup \{C_{n_1} : n_1 = 1, 2, \dots\}, \quad C_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \bigcup \{C_{m_1, m_2, \dots, m_k, m} : m = 1, 2, \dots\} \quad k=1, 2, \dots$$

Una red \mathcal{W} es absolutamente p -convexa si los conjuntos que la definen son absolutamente p -convexos. Una red \mathcal{W} es completante o red de tipo \mathcal{C} si para cada sucesión (m_n) de enteros positivos la sucesión $C_{m_1} \supset C_{m_1, m_2} \supset \dots \supset C_{m_1, m_2, \dots, m_k} \supset \dots$ es completante.

Si \mathcal{W} es absolutamente p -convexa y la sucesión anterior estrictamente completa, la red se llama p -estricta o red de tipo \mathcal{C}_p -estricta.

Sea $0 < p \leq 1$. Un subconjunto A de un espacio E es $C_p S$ -compacto, (5), si para cada sucesión $(x_n) \subset A$ y cada sucesión de escalares (a_n) , $a_n \geq 0$ $n = 1, 2, \dots$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^p = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es convergente en

E a un vector de A . Una serie así diremos que es una serie p -convexa en A . Un espacio E es semi p -Suslin si existe un espacio Polaco X y una aplicación T de X en los subconjuntos $C_p S$ -compactos de E verificando las siguientes condiciones:

- $\bigcup \{Tx : x \in X\} = E$
- Si (x_n) es convergente en X , existe un $C_p S$ -compacto A en E tal que $Tx_n \subset A$ $n=1, 2, \dots$

Para $p=1$ obtenemos los espacios semi-Suslin de Valdivia, (13). Todo espacio semi-Suslin es semi p -Suslin para cada $p \in (0, 1]$ y todo espacio semi p -Suslin es semi q -Suslin para $0 < q < p \leq 1$.

Para la clase saturada \mathcal{A} de los espacios localmente p -convexos (Valdivia, (15)) los espacios \mathcal{A} -tonelados los llamaremos espacios p -tonelados. Un espacio vectorial topológico E es p -tonelado si, y sólo si todo subconjunto absolutamente p -convexo, cerrado y absorbente es un entorno del origen. Los espacios red

\mathcal{A} -tonelados los llamaremos espacios red p -tonelados. Un espacio vectorial topológico E es red p -tonelado si dada una red cualquiera $\{E_{m_1, m_2, \dots, m_k}\}$ de subespacios de E , existe una sucesión (m_k) de enteros positivos tal que E_{m_1, m_2, \dots, m_k} es denso en E y p -tonelado $k=1, 2, \dots$.

I. GENERACION DE p -DISCOS DE BANACH

M. Valdivia prueba en (12) que todo subconjunto convexo, acotado y completo tiene una envoltura absolutamente convexa que es un disco de Banach. Tal conjunto es claramente un CS-compacto. El siguiente resultado extiende el dado por Valdivia; incluso para $p=1$ hay CS-compactos no completos, (11).

TEOREMA 1.— Sea A un subconjunto CpS-compacto del espacio E . La envoltura absolutamente p -convexa de A es un p -disco de Banach de E .

Demostración.— Supongamos primero que A es absolutamente p -convexo. Si

$$\{x_n : n=1, 2, \dots\} \subset E_A \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} P_A(x_n) < +\infty \text{ la serie } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge en } E_A.$$

En efecto, para cada entero positivo n definimos

$$a_n = (P_A(x_n) + \frac{1}{2^n})^{1/p}, y_n = \frac{1}{a_n} x_n. \text{ Al ser } A \text{ CpS-compacto, la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge en } E.$$

Es fácil probar ahora que el vector suma está en E_A y la convergencia se da también en este espacio. Para el caso general tenemos B la envoltura absolutamente p -convexa de A . Para $(\lambda_n) \in \ell^p$, con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \leq 1, \text{ si } \{x_n : n=1, 2, \dots\} \subset A, \text{ la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ converge en } E \text{ a un}$$

vector de $4^{1/p}B$. Este hecho sigue siendo cierto si la sucesión

$\{x_n : n=1, 2, \dots\} \subset B$. Para comprobarlo tomemos una representación de x_n como

$$x_n = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n x_j^n, \sum_{j=1}^{k_n} |\lambda_j^n|^p \leq 1, x_j^n \in A \text{ } j=1, 2, \dots, k_n, k_n \in \mathbb{N}$$

Consideremos la sucesión de vectores de

$$A \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_{k_1}^1, x_1^2, \dots, x_{k_2}^2, x_1^3, \dots\}$$

y la sucesión de $\ell^p \{ \lambda_1^1 \lambda_1, \lambda_2^1 \lambda_1, \dots, \lambda_{k_1}^1 \lambda_1, \lambda_1^2 \lambda_2, \dots, \lambda_{k_2}^2 \lambda_2, \lambda_1^3 \lambda_3, \dots \}$

que verifica $\sum |\lambda_j^n \lambda_n|^p \leq 1$. En consecuencia, la serie $\sum \lambda_j^n \lambda_n x_j^n$ converge en E

a un vector de $4^{1/p}B$. Ahora bien, las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ for-

man una subsucesión de las sumas parciales de la serie $\sum \lambda_j^n \lambda_n x_j^n$, tal serie converge pues a un vector de $4^{1/p}B$. Razonando ahora como en el caso en que A era absolutamente p -convexo se obtiene el resultado.

Q.E.D.

COROLARIO 1.1.— Sea E un espacio vectorial y $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ dos topologías vectoriales sobre E tales que \mathcal{T}_2 es más fina que \mathcal{T}_1 y tiene una base de entornos del origen cerrados para \mathcal{T}_1 . Todo subconjunto que sea CpS -compacto (respect. p -disco de Banach) en $E[\mathcal{T}_1]$ lo es también en $E[\mathcal{T}_2]$.

Demostración.— Sea B la envoltura absolutamente p -convexa de A , que es un p -disco de Banach para \mathcal{T}_1 . Así la inmersión de E_B en $E[\mathcal{T}_1]$ es continua. Como $E[\mathcal{T}_2]$ tiene una base de entornos cerrados para \mathcal{T}_1 , y E_B es de Baire, la inmersión de E_B en $E[\mathcal{T}_2]$ también es continua. Así cualquier serie p -convexa en A , que es convergente en E_B , será convergente en $E[\mathcal{T}_2]$, y a un vector de A pues ya lo era en $E[\mathcal{T}_1]$.

Q.E.D.

En (13), pág. 82, Valdivia prueba el corolario 1.1 para las topologías $\sigma(E', E)$ y $\beta(E', E)$ sobre el dual de un espacio localmente convexo y para el caso $p=1$. El método desarrollado aquí pone de manifiesto la importancia del teorema 1.

TEOREMA 2.— Sea $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p -convexos del espacio E . Sea (n_k) una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos y $\{x_j: j=1, 2, \dots\}$ una sucesión en E tal que $x_j \in A_k$ si $n_{k-1} \leq j < n_k$ $k=1, 2, \dots$ ($n_0=1$). Entonces, para cualquier $(\xi_n) \in l^p$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ converge en E .

Demostración.— Para $p=1$, $\xi_n = 1/2^n$, $x_n \in A_n$ $n=1, 2, \dots$, W. Robertson, (10), prueba el resultado. Una simple adaptación al caso p -convexo prueba el resultado para $\xi_n = (1/2^n)^{1/p}$ $n=1, 2, \dots$. Pasemos a la prueba del caso general. Supongamos que $\rho = \sum |\xi_n|^p \leq 1$ y denotemos por $S_n = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p$. Razonemos el caso no trivial en el que $0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n < \dots < \rho$. Razonando por recurrencia determinamos sucesiones (m_k) y (p_k) de enteros positivos tales que $m_0=1 < m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$, $p_0 < p_1 < \dots < p_k \dots$

$$\rho - \frac{1}{2^{p_j-1}} < S_{m_j} \leq \rho - \frac{1}{2^{p_j}}, \quad S_{m_j} > \rho - \frac{1}{2^{p_{j-1}}},$$

$$m_j \geq n_j \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (p_{-1}=0)$$

Aseguremos así que $S_{m_j} - S_{m_{j-1}} \leq \frac{1}{2^{p_j-1}} \leq \frac{1}{2^{j-1}}$ $j=1, 2, \dots$. Con todo ello y gracias a la p -convexidad absoluta de los elementos de la sucesión (A_n) tendremos que $\sum_{k=2}^{m_1} \xi_k x_k \in A_1$; $\sum_{k=m_1+1}^{m_2} \xi_k x_k \in (\frac{1}{2})^{1/p} A_2$; \dots ;

$$\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} \xi_k x_k \in (\frac{1}{2^{j-1}})^{1/p} A_j; \dots$$

de donde la sucesión de sumas parciales $\{\sigma_n = \sum_{k=1}^n \xi_k x_k : n=1, 2, \dots\}$ tienen la subsucesión $\{\sigma_{m_j} : j=1, 2, \dots\}$ con-

vergente, esto termina la prueba si probamos que $\{\sigma_n : n=1, 2, \dots\}$ es de Cauchy. Sea U un entorno del origen de E , existirá un entero positivo k_0 tal que $\left\{ \sum_{m=k_0}^{\infty} \mu_m x_m : |\mu_m| \leq (\frac{1}{2^m})^{1/p}, x_m \in A_m, m=k_0, k_0+1, \dots \right\} \subset U$. Si r, s son enteros mayores que m_{k_0} , $\sigma_r - \sigma_s \in U$ como queríamos probar.

Q.E.D.

El teorema 2 ha sido obtenido recientemente por M. Valdivia, (17), para $p=1$ con una prueba diferente.

COROLARIO 1.2.— Si la sucesión (A_n) es estrictamente completa, la sucesión

$\left\{ C_k = (\frac{1}{2^k})^{1/p} A_k : k=1, 2, \dots \right\}$ forma una base de entornos del origen para

una topología \mathcal{A} sobre E , más fina que la inicial, con la que adquiere una estructura de grupo topológico aditivo metrizable y completo. Si $L = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, \mathcal{A}

induce en L una estructura de espacio metrizable, completo y localmente p -convexo. En particular $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un p -disco de Banach.

Demostración.— La primera parte es una adaptación del caso convexo estudiado por W. Robertson, (10). L es un F -espacio pues en él cada A_n es absorbente. Finalmente, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ tienen un cierre algebraico que es un acotado y cerrado de

L , y por consiguiente es un disco de Banach.

Q.E.D.

TEOREMA 3.— Sea (A_n) una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p -convexos del espacio $E[\mathcal{G}]$. Para cada entero positivo n , sea

$$C_n = \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m x_m : |\mu_m| \leq (\frac{1}{2^m})^{1/p}, x_m \in A_m, m=n, n+1, \dots \right\}$$

La familia $\{C_k : k=1, 2, \dots\}$ forma una base de entornos del origen para una topología \mathcal{A} sobre E , más fina que \mathcal{G} , con lo que adquiere una estructura de grupo topológico aditivo, metrizable y completo.

Demostración.— Todas las afirmaciones son claras salvo la completitud. Tomemos $x_k \in C_k$, $k = 1, 2, \dots$ y veamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en $E[\mathcal{A}]$. Cada x_k se escribe como $x_k = \sum_{m=k}^{\infty} \mu_m^k x_m^k$, $|\mu_m^k| \leq (1/2^m)^{1/p}$, $x_m^k \in A_m$, $m = k, k+1, \dots$. Por la p -convexidad absoluta y la completitud de (A_n) tendremos que la envoltura absolutamente p -convexa de la sucesión $\{x_m^k : k=1, 2, \dots, m \geq k\}$ está acotada en E , llamemos D a la clausura de dicha envoltura en \hat{E} , que es un p -disco de Banach de \hat{E} . Teniendo en cuenta que $\sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{m=k}^{\infty} |\mu_m^k|^p) < +\infty$ la serie $\sum \mu_m^k x_m^k$ es absolutamente sumable en \hat{E}_D . Si convenimos en llamar $\mu_m^k = 0$, $x_m^k = 0$ para $m < k$, $k=1, 2, \dots$, aplicando la fórmula de sumación por paquetes en un espacio p -Banach tendremos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^k x_m^k \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_m^k x_m^k \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m \mu_m^k x_m^k \right)$$

expresión que sigue siendo válida en \hat{E} . Llamando

$$c_m = \left(\sum_{k=1}^m |\mu_m^k|^p \right)^{1/p} \text{ y } z_m = \sum_{k=1}^m \frac{\mu_m^k}{c_m} x_m^k, \text{ será } z_m \in A_m \text{ y}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^p = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_m^k|^p \right) < +\infty, \text{ por lo que el teorema 2 asegura que}$$

$\sum_{m=1}^{\infty} c_m z_m$ converge en E , así $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en E . Probaremos ahora que la convergencia también se da en \mathcal{A} y esto termina la prueba. La idea es la misma que en el teorema 2, y la resumimos en el siguiente

LEMA 4.— Si $(\zeta_n) \in l^p$, $x_n \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$, y $n_0 \geq 4$ es tal que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\zeta_n|^p \leq \frac{1}{2^{n_0-2}}, \text{ entonces } \sum_{n=n_0}^{\infty} \zeta_n x_n \in C_{n_0-3}.$$

Supongamos probado el lema. Razonando en \hat{E}_D tenemos las siguientes igualdades:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \left(\sum_{m=n_0}^{\infty} \mu_m^k x_m^k \right) = \sum_{m=n_0}^{\infty} \left(\sum_{k=n_0}^{\infty} \mu_m^k x_m^k \right) = \sum_{m=n_0}^{\infty} \left(\sum_{k=n_0}^m \mu_m^k x_m^k \right)$$

$$\text{Llamando } d_m = \left(\sum_{k=n_0}^m |\mu_m^k|^p \right)^{1/p}, \text{ } w_m = \sum_{k=n_0}^m \frac{\mu_m^k}{d_m} x_m^k, \text{ es } w_m \in A_m$$

$$y \sum_{m=n_0}^{\infty} |d_m|^p \leq \frac{1}{2^{n_0-2}}$$

Aplicando el lema aseguramos que $\sum_{m=n_0}^{\infty} d_m w_m \in C_{n_0-3}$, y en definitiva $\sum_{k=n_0}^{\infty} x_k \in C_{n_0-3}$. Como el razonamiento es válido para cualquier $n_0 \geq 4$, aseguramos la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ en $E[\mathcal{A}]$.

Para concluir la prueba desarrollamos ahora la del lema 4. Sea $\rho = \sum_{n=n_0}^{\infty} |\xi_n|^p$ y p_{-1} un entero positivo, $p_{-1} \geq n_0 - 2$ tal que $\frac{1}{2^{p_{-1}+1}} < \rho \leq \frac{1}{2^{p_{-1}}}$. Podemos determinar un entero positivo p_0 tal que si denotamos las sumas parciales por $S_m = \sum_{k=n_0}^m |\xi_k|^p$, sea $\rho - \frac{1}{2^{p_0-1}} < S_{n_0} \leq \rho - \frac{1}{2^{p_0}}$, con $p_0 - 1 \geq p_{-1}$ (Si $S_{n_0} = \rho$ el resultado es evidente). Podrán ocurrir dos casos:

a) $S_n < \rho$ $n=n_0, n_0+1, \dots$. Razonando por recurrencia se obtienen sucesiones de enteros positivos

$$m_0 = n_0 < m_1 < \dots < m_k \dots; \quad p_{-1} < p_0 < p_1 < \dots < p_k < \dots \text{ tales que}$$

$$S_{m_j} > \rho - \frac{1}{2^{p_{j-1}}} ; \quad \rho - \frac{1}{2^{p_{j-1}}} < S_{m_j} \leq \rho - \frac{1}{2^{p_j}} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

con lo que tendremos las siguientes desigualdades

$$S_{m_j} - S_{m_{j-1}} = \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} |\xi_k|^p \leq \frac{1}{2^{p_{j-1}+1}} \leq \frac{1}{2^{p_{j-2}}} \leq \frac{1}{2^{p_{-1}+j-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0-3+j}}$$

$$j = 1, 2, \dots$$

de las que se sigue que $(\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} \xi_k x_k) \in (\frac{1}{2^{n_0-3+j}})^{1/p} A_{j+n_0} \quad j = 1, 2, \dots$

de donde resulta claro que $\sum_{n=n_0}^{\infty} \xi_n x_n$ es un elemento de C_{n_0-3} .

b) Supongamos que existe $n > n_0$ tal que $S_n = \rho$. Podemos desarrollar los mismos pasos que en el caso a), con la única diferencia de que ahora el proceso es finito, esto es, existir-a un m_k con $S_{m_k} = \rho$ y entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \xi_n x_n = \sum_{n=n_0}^{m_k} \xi_n x_n \in C_{n_0-3}$$

Q.E.D.

COROLARIOS 1.3.— Si $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle C_n \rangle$, la topología \mathcal{A} induce sobre L una estructura de espacio metrizable, completo y localmente p -convexo. En particular, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \rho_n C_n$ es un p -disco de Banach para cualquier sucesión (ρ_n) de escalares positivos.

Llamaremos a L el F -espacio asociado a la sucesión completante $\{A_n: n=1, 2, \dots\}$. El corolario 1.3 ha sido obtenido recientemente por M. Valdivia, (17), para el caso convexo y con una prueba diferente.

TEOREMA 5.— Sea $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p -convexos del espacio E . Sea $\{T_n: n=1, 2, \dots\}$ una sucesión de subconjuntos CpS -compactos de E . Suponemos que existe una sucesión estrictamente creciente (n_k) de enteros positivos tal que $T_n \subset A_k$ si $n \geq n_k$. Entonces el conjunto

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n)^p \leq 1, x_n \in T_n, \zeta_n \geq 0 \quad n=1, 2, \dots \right\}$$

es un CpS -compacto que contiene a todos los T_n .

Demostración.— El teorema 2 asegura la buena definición del conjunto A , que es p -convexo y contiene a cada T_n . Sea $a_m \geq 0, y_m \in A \quad m=1, 2, \dots$ y

$$\sum (a_m)^p = 1. \text{ Cada } y_m \text{ admite una representación de la forma}$$

$$y_m = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^m x_n^m, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta_n^m)^p \leq 1, \quad \zeta_n^m \geq 0, \quad x_n^m \in T_n \quad n=1, 2, \dots$$

La sucesión doble $\{x_n^m: m, n=1, 2, \dots\}$ tienen una envoltura absolutamente p -convexa acotada en E . Para comprobarlo basta tener en cuenta que (A_n) es una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p -convexos y que cada T_n tiene envoltura absolutamente p -convexa acotada. Llamemos D al cierre de dicha envoltura en \hat{E} , completación de E . D es un p -disco de Banach de \hat{E} y así, la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^m x_n^m \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m \zeta_n^m x_n^m \text{ es convergente en } \hat{E}_D \text{ pues}$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_m \zeta_n^m|^p = \sum_{m,n=1}^{\infty} (a_m)^p (\zeta_n^m)^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} (a_m)^p = 1, \text{ por lo}$$

que la serie anterior es absolutamente sumable en \hat{E}_D . Aplicando la fórmula de sumación por paquetes en un espacio p -Banach, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta_n^m x_n^m \right)$, expresión que sigue siendo válida en \hat{E} . Ahora bien, para cada n fijo, y por ser T_n un CpS-compacto, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta_n^m x_n^m \in \eta_n T_n$, con $\eta_n = \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a_m)^p (\zeta_n^m)^p \right)^{1/p}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n)^p \leq 1$, tendremos que $\sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m$ converge en E a un vector de A , lo que termina la prueba.

Q.E.D.

Para un subconjunto A del espacio E denotamos con \bar{A}^a su clausura algebraica, (7).

COROLARIO 1.5.— Si cada T_n es un p -disco de Banach, entonces el conjunto

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p \leq 1, x_n \in \bar{T}_n^a, n = 1, 2, \dots \right\}$$

es un p -disco de Banach que contiene a todos los $T_n, n = 1, 2, \dots$

Recordemos que una sucesión (x_n) es rápidamente convergente en E si existe un disco de Banach A en E tal que (x_n) es convergente en E_A . Sea $\mathcal{L}_0 = \cap \{ \ell^p : p \in (0, 1] \}$.

PROPOSICION 6.— Sea A un p -disco de Banach en el espacio E ($0 < p < 1$).

Si $\{x_n\} \subset A$ y $(\zeta_n) \in \mathcal{L}_0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n$ es rápidamente convergente en E .

Demostración.— Para $(\eta_n) \in \ell^p$, la envoltura absolutamente convexa de la sucesión $\{\eta_n x_n : n=1, 2, \dots\}$ es acotada en E . En efecto, dado un entorno del origen U en E , al ser A un p -disco de Banach, existirá un entero positivo n_0 tal que

$\sum_{n \geq n_0} \eta_n z_n \in U$ para cualquier $(z_n) \subset A$. De esta forma, $\Gamma \{ \eta_n x_n : n \geq n_0 \} \subset U$

y de aquí se sigue fácilmente la acotación. Definamos para cada entero positivo n , $y_n = |\zeta_n|^{1/2} x_n$. Si $(a_n) \in \ell^1$, $(a_n |\zeta_n|^{1/2}) \in \mathcal{L}_0$ y la serie $\sum a_n y_n$ converge en E al ser A un p -disco de Banach. Podemos definir así una aplicación lineal $T: \ell^1 \rightarrow E$

dada por $T((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Si B es la envoltura absolutamente convexa y

cerrada de la sucesión $\{y_n : n = 1, 2, \dots\}$, B es un acotado y T se factoriza a través de E_B en un operador continuo. La imagen de la bola unidad de ℓ^1 es un disco de Banach D de E_B que contiene a $\{y_n : n=1, 2, \dots\}$, como

$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^{1/2} < +\infty$. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n)^{1/2} y_n$ es normalmente convergente en E_D , por consiguiente $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ converge en E_D .

Q.E.D.

COROLARIO 1.6.— *Es un espacio E localmente completo todo subconjunto absolutamente p -convexo, cerrado y acotado es un p -disco de Banach.*

COROLARIO 2.6.— *Si (A_n) es una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p -convexos del espacio E y $x_n \in A_n$ $n=1, 2, \dots$. Para $(\xi_n) \in \ell_0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ es rápidamente convergente en E .*

En (4) P. Dierolf obtiene un resultado más fuerte que el corolario 1.6.

II. ESPACIOS SEMI p -SUSLIN Y ESPACIOS CON RED DE TIPO \mathbb{C}

Denotemos por $\mathfrak{D}_p(E)$ la familia de los p -discos de Banach del espacio E . El teorema 1 permite dar la siguiente caracterización de los espacios semi p -Suslin.

TEOREMA 7.— *Un espacio E es semi p -Suslin si, y sólo si, existe un espacio Polaco X junto con una aplicación $T: X \rightarrow \mathfrak{D}_p(E)$ verificando las siguientes condiciones:*

- a) $\cup \{ T_x: x \in X \} = E$
- b) Si (x_n) es una sucesión convergente en X , existe un p -disco de Banach A en E tal que $T_{x_n} \subset A$ $n=1, 2, \dots$

Resumimos en la siguiente proposición las propiedades de estabilidad.

PROPOSICION 8.— *Sea E un espacio vectorial topológico*

- a) *Si F es un subespacio sucesionalmente cerrado de E y E es semi p -Suslin, también lo es F*
- b) *Si $f: E \rightarrow F$ es lineal, continua y suprayectiva con E semi p -Suslin, también lo es F*
- c) *Si $\{E_m: m=1, 2, \dots\}$ es una sucesión de subespacios semi p -Suslin que cubre E , entonces E es semi p -Suslin*
- d) *Si $\{E_m: m=1, 2, \dots\}$ es una sucesión finita o infinita de espacios semi p -Suslin y E es el producto de dicha sucesión, entonces E con la topología producto es semi p -Suslin.*

- e) Si $\{E_m: m=1, 2, \dots\}$ es una sucesión de subespacios semi p -Suslin de E , la intersección $\cap \{E_m: m=1, 2, \dots\}$ es semi p -Suslin.
- f) Si \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 son dos topologías vectoriales sobre E tales que \mathcal{T}_2 es más fina que \mathcal{T}_1 y tiene una base de entornos del origen que son cerrados para \mathcal{T}_1 siendo $E[\mathcal{T}_1]$ semi p -Suslin, entonces $E[\mathcal{T}_2]$ también lo es.

Demostración.— Las cinco primeras son análogas al caso $p=1$ de Valdivia, (13). f) es una consecuencia inmediata del corolario 1.1.

Q.E.D.

Todo espacio Polaco X admite una red $\mathcal{U} = \{B_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ tal que cada sucesión (n_k) de enteros positivos de una base de filtro (B_n, \dots, n_k) convergente en X , (3). El conjunto \mathbb{N} de enteros positivos es un espacio Polaco si lo dotamos de la topología discreta. El espacio producto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es también Polaco y $f: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ definida por $f((a_n)) = \lim B_{a_1, a_2, \dots, a_k}$ es continua y suprayectiva. No es restrictivo por tanto trabajar con $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en la definición de espacio semi p -Suslin.

Sea E un espacio semi p -Suslin y $T: X \rightarrow \mathcal{D}_p(E)$ la aplicación que da el teorema 7, la red $\mathcal{D} = \{B_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ del espacio Polaco X nos da una red $\mathcal{W} = \{C_{n_1, n_2, \dots, n_k} := T(B_{n_1, n_2, \dots, n_k})\}$ en E que es de tipo \mathcal{C} . Más aún, si $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $x_k \in \Gamma_p C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ $k=1, 2, \dots$, entonces la sucesión $\{x_k: k=1, 2, \dots\}$ está contenida en un p -disco de Banach. (Γ_p denota la envoltura absolutamente p -convexa, (7)).

TEOREMA 9.— Sea E un espacio con una red p -estricta, entonces E es semi p -Suslin.

Demostración.— Sea $\mathcal{W} = \{C_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ la red p -estricta de E . Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\alpha = (a_n)$ definimos $T\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{a_1, a_2, \dots, a_n}$. El corolario 1.2. asegura que $T\alpha$ es un p -disco de Banach. Claramente $\cup \{T\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = E$. Sea ahora $\alpha_n = (a_j^n)$ una sucesión en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ convergente hacia $\alpha = (a_j)$. Para cada entero positivo k , existe un n_k tal que si $n \geq n_k$, entonces $a_k^n = a_k$, además no es restrictivo suponer que (n_k) es estrictamente creciente. Tendremos así que $T\alpha_n \subset C_{a_1, a_2, \dots, a_k}$ si $n \geq n_k$; aplicando el corolario 1.5 obtenemos un p -disco de Banach que contienen a cada $T\alpha_n$. El teorema 7 nos da el resultado.

Q.E.D.

TEOREMA 10.— Sea E un espacio localmente p -convexo y localmente completo con una red de tipo \mathcal{C} . Entonces E es semi p -Suslin.

Demostración.— Sea $\mathcal{W} = \{ C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \}$ la red de tipo \mathcal{C} de E . Para $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la sucesión $(C_{a_1, a_2, \dots, a_n})$ es completante en E . Si $x_k \in \overline{\Gamma_p C_{a_1, a_2, \dots, a_k}}$, la p -convexidad y completitud local de E aseguran que $\{ x_k : k = 1, 2, \dots \}$ está contenida en un p -disco de Banach y así $\{ \overline{\Gamma_p C_{a_1, a_2, \dots, a_k}} : k = 1, 2, \dots \}$ es una sucesión completante y estricta. Definimos $T \alpha = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\Gamma_p C_{a_1, a_2, \dots, a_k}}$ y es $T\alpha$ un p -disco de Banach. La aplicación $T: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{D}_p(E)$ así definida verifica las condiciones del teorema 7, lo que se prueba como en el teorema 9, y E es semi p -Suslin.

Q.E.D.

En (2), pág. 123, M. De Wilde pregunta si un espacio con red de tipo \mathcal{C} y localmente completo tienen una red estricta. El teorema 10 da una respuesta parcial a esta pregunta, que nos será suficiente para obtener en el apartado V un teorema de levantamiento que engloba los dados por De Wilde.

M. Valdivia ha dado una respuesta afirmativa a la pregunta de De Wilde en un reciente trabajo, (16).

III. PROPIEDADES DE LOCALIZACION

TEOREMA 11.— Sea (A_k) una sucesión completante de subconjuntos absolutamente p -convexos del espacio E . Para cada entero positivo n , sea

$$C_n = \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m x_m : |\mu_m| \leq \left(\frac{1}{2^m}\right)^{1/p}, x_m \in A_m, m=n, n+1, \dots \right\}$$

ya $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle C_n \rangle$ el F -espacio localmente p -convexo asociado a (A_k) . Sea F un espacio (metrizable) y f una aplicación lineal de F en E con gráfica (sucesionalmente) cerrada en $F \times E$. Si la clausura de $f^{-1}(A_k)$ es entorno del origen en F , se tiene que

$$a) \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/p} \overline{f^{-1}(A_n)} \subset f^{-1}(C_n)$$

b) $f(F) \subset L$ y $f: E \rightarrow L[\mathcal{A}]$ es continua.

Demostración.— Supongamos primero que F es metrizable y sea $\{ U_k : k = 1, 2, \dots \}$ una base de entornos del origen en F de forma que $(2^k)^{1/p} U_k \subset f^{-1}(A_k)$ $k=1, 2, \dots$. Denotemos por B_k a $(\frac{1}{2^k})^{1/p} f^{-1}(A_k)$ $k=1, 2, \dots$. Fijemos un entero positivo k y $x_k \in \overline{B_k}$. Determinamos vectores $y_k \in B_k$ y $x_{k+1} \in U_{k+1}$ de forma que $x_k = y_k + x_{k+1}$. Razonando por recurren-

cia obtendremos sucesiones $\{x_j : j = k, k+1, \dots\}$, $\{y_j : j = k, k+1, \dots\}$ tales que $x_j = y_j + x_{j+1}$, $y_j \in B_j$, $x_j \in U_j$ $j = k, k+1, \dots$. Sumando en la anterior igualdad tenemos $\sum_{j=k}^N x_j = \sum_{j=k}^N y_j + \sum_{j=k}^N x_{j+1}$, así $x_k - x_{N+1} = \sum_{j=k}^N y_j$. Claramente $x_k = \sum_{j=k}^{\infty} y_j$. La serie $\sum_{j=k}^{\infty} f(y_j)$ converge a un vector z de C_k y como la gráfica de f es sucesionalmente cerrada $f(x_k) = z \in C_k$. De esto se sigue a) en el caso metrizable. Para el caso general obtendremos las mismas sucesiones $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ y $\{U_n : n=1, 2, \dots\}$ será una sucesión de entornos del origen en F . Sea $\{W_i : i \in I\}$ una base de entornos del origen en F . Para cada $j > k$, $x_j \in U_j \subset \overset{\circ}{B}_j \subset B_j + W_i$, determinamos así vectores $y_{j,i} \in B_j$, $w_{j,i} \in W_i$ tales que $x_j = y_{j,i} + w_{j,i}$. Sea $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \dots\}$. Ordenamos $\mathbb{N}_k \times I$ con el orden producto; esto es $(m, i) \geq (n, j)$ si, si, y sólo si $m \geq n$ y $W_i \subset W_j$. La red

$$\left\{ x_k - y_{N+1,i} - \sum_{j=k}^N y_j : (N, i) \in \mathbb{N}_k \times I, \geq \right\} \quad (1)$$

converge al origen en F . La red $\{f(y_{N+1,i}) : (N, i) \in \mathbb{N}_k \times I, \geq\}$ converge al origen en E . Resulta entonces que la imagen de la red (1) por f converge hacia $f(x_k) - z$. Como la gráfica de f es cerrada, $f(x_k) = z \in C_k$ quedando probado a) en el caso general. La parte b) es una consecuencia inmediata de a).

Q.E.D.

NOTA.— Si R es una relación lineal, (3), con gráfica cerrada la parte a) sigue siendo cierta y R es continua. Si F es metrizable el resultado anterior sigue siendo cierto cuando la gráfica de R es E -rápidamente cerrada en $F \times E$ (corolario 2.6), esto es, R corta a $F \times E_D$ en un cerrado para cada D disco de Banach de E .

La idea del teorema 11 está recogida de un trabajo de M. Valdivia, (14), donde se prueba el teorema 11 para una sucesión completante y localizando la aplicación en un subespacio metrizable y completo que depende de f .

Sea E un espacio semi p -Suslin y $\mathcal{W} = \{C_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ la red construida antes del teorema 9. Para cada $\alpha = (a_n)$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sea L el F -espacio localmente asociado a la sucesión completante $(\Gamma_p C_{a_1, a_2, \dots, a_n})$. Si $f: F \rightarrow E$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada para la que existe un $\alpha = (a_n)$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\Gamma_p f^{-1}(C_{a_1, a_2, \dots, a_n})$ tienen clausura con punto interior para $n=1, 2, \dots$, el teorema 11 asegura que $f(F) \subset L$ y $f: F \rightarrow L$ es continua, en definitiva $f: F \rightarrow E$ es continua. La condición natural sobre F es que sea red p -tonelado, (15).

COROLARIO 1.11.— Si F es un espacio red p -tonelado (metrizable) y E es semi p -Suslin, cualquier aplicación lineal $f: F \rightarrow E$ con gráfica cerrada (E -rápidamente cerrada) es continua y existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $f(F) \subset L_\alpha$ con $f: F \rightarrow L_\alpha$ continua.

Este resultado extiende propiamente, incluso para $p=1$ el teorema de gráfica cerrada que Valdivia prueba en (13) para espacios semi-Suslin en llegada y Baire convexos en partida. Valdivia, (15), ha probado recientemente la extensión de este resultado cuando F es totalmente \mathcal{A} -tonelado y E tiene una red completante \mathcal{A} -regular. Tomando \mathcal{A} la clase de espacios localmente p -convexos, un repaso de la prueba de Valdivia pone de manifiesto la validez del resultado cuando E tienen una red $\mathcal{W} = \{C_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ tal que, para cualquier sucesión (n_k) de enteros positivos, $(\Gamma_p C_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ es una sucesión completante, en particular cuando E es semi p -Suslin.

COROLARIO 2.11.— *Un espacio red- p -tonelado y semi p -Suslin es metrizable, completo y localmente p -convexo.*

COROLARIO 3.11.— *Si E es la envoltura localmente convexa de espacios red-tonelados y E es semi-Suslin, entonces E es ultrabornológico. Si E es la envoltura localmente convexa de una sucesión de espacios red-tonelados y E es semi-Suslin, entonces E es un espacio LF.*

COROLARIO 4.11.— *Para un espacio semi-Suslin, la envoltura absolutamente convexa de la familia de espacios Fréchet asociados $\{L_\alpha: \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ coincide con $E[\mathcal{G}^u]$, donde \mathcal{G}^u es la topología ultrabornológica asociada a \mathcal{G} y $E[\mathcal{G}^u]$ sigue siendo semi-Suslin.*

El corolario 4.11 extiende un resultado de Powell, (8).

En un espacio localmente completo las sucesiones completantes de subconjuntos absolutamente p -convexos tienen por clausura sucesiones completantes. Con esta observación y el teorema de localización obtenemos:

COROLARIO 5.11.— *Sea E un espacio semi p -Suslin localmente completo. Existe un espacio Polaco X y una aplicación $T: X \rightarrow \mathcal{D}_p(E)$ verificando las condiciones a) y b) del teorema 7 y de forma que cualquier semi disco de Banach de E está contenido en la imagen de algún $x \in X$ por la aplicación T .*

Demostración.— Para cada $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, sea (C_n^α) la base de entornos del origen para la topología \mathcal{A}_α asociada a la sucesión completante $(\Gamma_p C_{a_1, a_2, \dots, a_n})$ según el teorema 3. Para $\beta = (b_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definimos $T(\alpha, \beta) = \bigcap_{k=1}^{\infty} b_k C_k^\alpha$ que es un p -disco de Banach después del corolario 1.3. La aplicación $T: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{D}_p(E)$ así definida verifica las condiciones del teorema 7 y la condición sobre los semi-discos se sigue del teorema de localización.

Q.E.D.

COROLARIO 6.11.— Si E es semi-Suslin, localmente completo y localmente convexo, su bidual fuerte es un espacio semi-Suslin.

Demostración.— Si $T: X \rightarrow \mathcal{D}(E)$ es la aplicación que nos da el corolario anterior, podemos definir $S: X \rightarrow \mathcal{D}(E'')$ por $S_x = \overline{T_x}$, donde la clausura se toma en $\sigma(E'', E')$. Así $E''[\sigma(E'', E')]$ es semi-Suslin y en definitiva lo es el bidual fuerte. Q.E.D.

Sea E un espacio de Frechet de dimensión infinita. $E[\sigma(E, E')]$ es semi-Suslin y su completación no puede serlo, pues es un espacio de Baire no metrizable. Sin embargo el teorema de localización permite afirmar:

COROLARIO 7.11.— Si E es semi- p -Suslin y cada punto de la completación \hat{E} está en la clusura de un semi-disco de Banach de E , entonces \hat{E} es semi- p -Suslin.

Demostración.— Con las notaciones del corolario 5.11, sea $S(\alpha, \beta) = \overline{T(\alpha, \beta)}$, con la clausura calculada en \hat{E} , la aplicación S nos da la estructura de semi- p -Suslin en \hat{E} .

Q.E.D.

Para el caso localmente convexo obtenemos la siguiente condición suficiente.

COROLARIO 8.11.— Sea E un espacio localmente convexo en el que toda sucesión de $E'[\sigma(E', E)]$ que converge al origen en el sentido de Mackey es equicontinua. Si E es semi-Suslin y $E'[\mathfrak{b}(E', E)]$ es bornológico, donde $\mathfrak{b}(E', E)$ denota la topología de convergencia uniforme sobre los discos de Banach de E , entonces la completación \hat{E} es semi-Suslin.

Demostración.— Se prueba fácilmente que $\hat{E} \subset (E'[\mathfrak{b}(E', E)])'$ y así el corolario 7.11 nos da el resultado.

Q.E.D.

Un resultado análogo al corolario 7.11 se obtiene para la completación local \tilde{E} de un espacio E . Para el caso localmente convexo obtenemos como corolario:

COROLARIO 9.11.— Sea E un espacio semi-Suslin y localmente convexo. Si $E'[\mathfrak{b}(E', E)]$ es dual localmente completo, entonces la completación local \tilde{E} de E es un espacio semi-Suslin. Si E es semi-Suslin y tonelado con $E'[\mathfrak{b}(E', E)]$ casi tonelado, la completación local $\tilde{\tilde{E}}$ de E es un espacio semi-Suslin.

Demostración.— En ambos casos se considera el espacio $F = \hat{E} \cap (E'[\mathfrak{b}(E', E)])'$

con la topología inducida por la de \hat{E} y se comprueba que es localmente completo. Así $\tilde{E} \subset (E'[\mathfrak{b}(E',E)])'$ y de aquí se sigue el resultado.

Q.E.D.

Por los resultados anteriores sabemos que un espacio (LB) tiene una completación semi-Suslin. Más generalmente, un espacio E en el que toda sucesión de $E'[\sigma(E',E)]$ que converge al origen en el sentido de Mackey sea equicontinua, si $E = \bigcup \{ D_n : n=1, 2, \dots \}$ con D_n absolutamente convexo y acotado, $D_n \subset D_{n+1}$ $n=1, 2, \dots$, entonces $\hat{E} = \bigcup \{ \bar{D}_n : n=1, 2, \dots \}$ y así \hat{E} es unión numerable de discos de Banach y por consiguiente semi-Suslin, (13).

PROBLEMA ABIERTO.— *No sabemos si cualquier espacio LF tiene una completación o completación local semi-Suslin. ¿Será cierto para espacios ultrabornológicos semi-Suslin?*

El interés de estas cuestiones está en su relación con la verificación del teorema de la base débil sobre espacios ultrabornológicos semi-Suslin.

IV. EJEMPLOS DISTINGUIENDO ESPACIOS

Sea $0 < q < 1$ y ℓ^q el espacio vectorial de todas las sucesiones (a_n) en \mathbb{K} tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < +\infty$ dotado de su topología ordinaria T_q , asociada a la q -norma $\| (a_n) \|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^{1/q}$. ℓ^q es un espacio q -Banach y por consiguiente es semi q -Suslin. Sea $0 < q < p \leq 1$. Como ℓ^q no es localmente p -convexo y es de Baire, el corolario 1.11 asegura que ℓ^q no es semi p -Suslin. Este ejemplo pone de manifiesto que el teorema 10 no es cierto sin asumir la hipótesis de p -convexidad local del espacio E .

Denotemos ahora por λ al espacio vectorial ℓ^q dotado con la topología inducida por ℓ^p , esto es, con la topología T_p , ($0 < q < p \leq 1$). La identidad de ℓ^q en λ es continua y así λ es semi q -Suslin. Probaremos ahora que λ no es semi p -Suslin, poniendo así de manifiesto que el teorema 10 no es cierto sin asumir la hipótesis de completitud local de E . Para $p=1$ obtenemos la separación estricta de las clases de espacios semi-Suslin y semi q -Suslin en la categoría de espacios normados (nótese que estos espacios son incluso de Suslin).

Sea T_q' la topología localmente p -convexa más fina sobre ℓ^q , de entre todas las topologías localmente p -convexas más gruesas que T_q . Una base de entornos del origen para T_q' la forman los entornos del origen para T_q que son p -convexos. Nótese que T_p es una topología de Hausdorff localmente p -convexa sobre ℓ^q y más gruesa que T_q , resulta entonces que T_q' es de Hausdorff y más fina que T_p .

PROPOSICION 12.— $T_p = T_q'$

Demostración.— Sea U un entorno p -convexo del origen para T_q , que sin pérdida de generalidad podemos suponer T_q' -cerrado y a posteriori T_q -cerrado. Sea s un entero positivo tal que $U_s = \{x \in \ell^q: \|x\|_q \leq 1/s\}$ esté contenido en U y $B = \{x \in \ell^q: \|x\|_p \leq 1\}$. Comprobaremos que $(1/s)^{1/q}B \subset U$ con lo que $T_q' \leq T_p$ y la prueba concluye. Sea $z \in (1/s)^{1/q}B$. Para a y b en \mathbb{K} , denotamos por $(a;b)$ al cociente a/b si $b \neq 0$ y 0 si $b = 0$. Entonces $(1/s)^{1/q}(z_m; |z_m|)$

$e_m \in U_s$ ($e_m = (\delta_m^j)_j$, con δ_i^j la δ de Kronecker) para $m = 1, 2, \dots$, como

$$\sum_{m=1}^k s^{p/q} |z_m|^p \leq 1 \text{ y } U \text{ es } p\text{-convexo,}$$

$$\sum_{m=1}^k s^{1/q} |z_m| (1/s)^{1/q}(z_m; |z_m|) e_m = \sum_{m=1}^k z_m e_m \in U, \text{ y así } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k z_m e_m = z \in U.$$

Q.E.D.

PROPOSICION 13.— λ no puede subirse con una sucesión de subconjuntos absolutamente p -convexos, cerrados y sin punto interior.

demostración.— Sea $\{A_m: m=1, 2, \dots\}$ una sucesión de subconjuntos absolutamente p -convexos y cerrados que cubra λ . Al ser ℓ^q un espacio de Baire existirá un entero positivo r tal que A_r tiene punto interior en ℓ^q . La p -convexidad absoluta de A_r asegura que A_r es un entorno del origen en ℓ^q , por consiguiente en T_p después de la proposición 12.

Q.E.D.

COROLARIO.— λ es un espacio red p -tonelado y no es semi p -Suslin.

Demostración.— Que λ es red p -tonelado es consecuencia inmediata de la proposición 13. Si λ fuera semi p -Suslin, el corolario 2.11 asegura que λ es completo, lo que contradice su densidad estricta en ℓ^p .

Q.E.D.

Sea ahora (p_n) una sucesión estrictamente creciente de números reales en el intervalo $(0, 1)$ que converge hacia 1. Sea $E_n = \ell^{p_n}$ y $E = \cup \{E_n: n=1, 2, \dots\}$. Sea \mathcal{T} la topología vectorial límite inductivo de los $E_n[T_{p_n}]$, que es de Hausdorff al ser más fina que T_1 . $E[\mathcal{T}]$ es semi p -Suslin y localmente p -convexo para todo $p \in (0, 1)$. Además, como un límite inductivo de espacios de Baire es ultra-tonelado, (9). Sea \mathcal{T}^{00} la topología localmente convexa más fina sobre E de entre todas las topologías localmente convexas más gruesas que \mathcal{T} . \mathcal{T}^0 es más fina que T_1 y por consiguiente de Hausdorff.

PROPOSICION 14.— $E[\mathcal{T}^{00}]$ es un espacio tonelado límite inductivo de $\{E_n[T_1] : n = 1, 2, \dots\}$ y $\mathcal{T}^{00} = T_1$.

Demostración.— Por ser $E[\mathcal{T}]$ ultratonelado, $E[\mathcal{T}^{00}]$ es tonelado, (9). Por un teorema de Valdivia, (13), $E[\mathcal{T}^{00}]$ es el límite inductivo de los espacios $\{E_n[\mathcal{T}^{00}] : n = 1, 2, \dots\}$, ahora bien como \mathcal{T}^{00} sobre E_n es más fina que T_1 sobre E_n y más gruesa que T_{p_n} , sobre E_n \mathcal{T}^{00} coincide con T_1 (prop. 12). Finalmente observemos que $E[T_1]$ y $E[\mathcal{T}^{00}]$ tienen como dual el espacio ℓ^∞ y como T_1 es metrizable, $T_1 = \mathcal{T}^{00}$.

Q.E.D.

PROPOSICION 15.— $E[\mathcal{T}]$ es completo.

Demostración.— Los vectores canónicos $\{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ forman una base de Schauder equicontinua en cada espacio ℓ^p y por consiguiente en E y a “posteriori” en la completación \hat{E} . Resulta entonces claro que (\hat{E}, ℓ^∞) forman un par dual. Por un teorema de W. Robertson, (9), los subconjuntos completos para \mathcal{T}^{00} lo son para la topología \mathcal{T} . Si B_n es la bola unidad de E_n , B_n es cerrado en ℓ^1 y por tanto completo para $T_1 = \mathcal{T}^{00}$, así B_n es completo para \mathcal{T} . Aplicamos ahora el teorema 13, pag. 90 de la memoria de Adasch, (1), como E es ultratonelado y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_n$ resulta ser E un espacio completo.

Q.E.D.

PROPOSICION.— $E[\mathcal{T}]$ no es un espacio semi-Suslin.

Demostración.— Cada $E_n[T_1]$ es red-tonelado después del corolario 1.13 y $E[\mathcal{T}^{00}]$ es el límite inductivo de los $E_n[T_1]$ por la proposición 14. Si $E[\mathcal{T}]$ fuera semi-Suslin, la identidad $E[\mathcal{T}^{00}] \rightarrow E[\mathcal{T}]$, que tiene gráfica cerrada, sería continua y así $\mathcal{T}^{00} = \mathcal{T}$, lo que contradice la completitud de $E[\mathcal{T}]$ pues $E[\mathcal{T}^{00}]$ es un subespacio propio y denso de ℓ^1 .

Q.E.D.

Este ejemplo pone de manifiesto la importancia de la convexidad local en el teorema 10.

PROBLEMA ABIERTO.— ¿Existe un espacio semi-Suslin sin red de tipo \mathcal{C} estricta?

V. UN TEOREMA DE LEVANTAMIENTO

En su tesis, M. De Wilde, (2) da dos teoremas de "levantamiento" de subconjuntos rápidamente compactos, uno para espacios con red de tipo \mathbb{C} estricta y otro para espacios de Suslin localmente completos. Ambas clases de espacios son semi-Suslin después de los teoremas 9 y 10. El teorema de localización permite obtener un resultado que engloba los dados por M. De Wilde.

TEOREMA 17.— *Sea f una aplicación lineal definida de un subespacio G de E sobre F , donde E y F son espacios vectoriales topológicos. Supongamos que E es semi Suslin y que f tiene gráfica rápidamente sucesionalmente cerrada en $E \times F$.*

- a) *Para toda sucesión rápidamente convergente (y_n) en F , existe una sucesión (x_n) rápidamente convergente en E tal que $f(x_n) = y_n$, $n=1, 2, \dots$*
 b) *Para todo subconjunto rápidamente compacto K de F , existe un subconjunto \mathcal{K} , rápidamente compacto en E tal que $f(\mathcal{K}) = K$.*

Demostración.— a) Al ser f sobre podemos suponer que (y_n) converge al origen. Sea D un disco de Banach con (y_n) convergente al origen en F_D . Definimos una relación lineal R de F_D en E por $yRx \Leftrightarrow f(x) = y$, $(y, x) \in F_D \times E$. El dominio es F_D al ser f sobre y R tiene su gráfica E -rápidamente cerrada en $F_D \times E$. El teorema 11 asegura la existencia de una sucesión completante $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset$ de subconjuntos absolutamente convexos de E tales que, si

$$C_k = \left\{ \sum_{m=k}^{\infty} \mu_m x_m ; |\mu_m| \leq \frac{1}{2^m} ; x_m \in A_m : m = k, k+1, \dots \right\}$$

es $R^{-1}(C_k)$ un entorno del origen en F_D . Existirá una sucesión de escalares positivos (\mathfrak{E}_n) , decreciente al origen tal que

$$\mathfrak{E}_n D \subset R^{-1} \left(\frac{1}{2^n} C_n \right) \quad n=1, 2, \dots$$

Sea (n_k) una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que

$$y_m \in \mathfrak{E}_k D \quad \text{si } n_k \leq m < n_{k+1} \quad k=1, 2, \dots$$

Para cada par de enteros k, m con $n_k \leq m < n_{k+1}$, podemos tomar $x_m \in \frac{1}{2^k} C_k$ tal que $f(x_m) = y_m$. Teniendo en cuenta los teoremas 3 y 5, la sucesión (x_m) es rápidamente convergente al origen y esto nos da la prueba de la parte a).

Para probar la parte b), sea (y_n) una sucesión nula en F_D , D un disco de Banach de F , tal que K está contenido en la envoltura absolutamente convexa y

cerrada en F_D de (y_n) . Por la parte a) existe una sucesión (x_n) en E , rápidamente convergente al origen tal que $f(x_n) = y_n$. Sea B un disco de Banach en E tal que (x_n) converge al origen en E_B , $\bar{K} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n| \leq 1 \}$ es la envoltura absolutamente convexa y cerrada de (x_n) en E_B , (7), que es un compacto de E_B . $f(\bar{K}) \supset K$ y tomando $\mathcal{K} = \bar{K} \cap f^{-1}(K)$ obtenemos la parte b).

Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Adasch, N., Ernst, B. y Keim, D. "Topological vector spaces". Lecture Notes in Math. 639. Springer. Berlin. Heidelberg. New York. (1978).
- (2) De Wilde, M. "Réseaux dans les espaces linéaires a semi-normes". Mem. Soc. R. Sc. Liège 18.2 (1969).
- (3) De Wilde, M. "Closed graph theorems and webbed spaces". Pitman. London. San Francisco. Melbourne. (1978).
- (4) Dierolf, P. "Une caractérisation des espaces vectoriels topologiques complets au sens de Mackey". C.R.A.cad, Sc. Paris. 283.A 245-248 (1976).
- (5) Jameson, G. J. O. "Topology and normed spaces". Chapman and Hall. London (1974).
- (6) Jarchow, H. "Locally convex spaces". B.G. Teubner. Stuttgart. (1981).
- (7) Köthe, G. "Topological vector spaces I and II". Springer. Berlin. Heidelberg. New York (1969-1979).
- (8) Powell, M. "On Komura's closed graph theorem". Trans. Amer. Math. Soc. 211, 391-246 (1975).
- (9) Robertson, W. "Completions of topological vector spaces". Proc. London Math. Soc. 8, 241-257 (1958).
- (10) Robertson, W. "On the closed graph theorem and spaces with webs". Proc. London Math. Soc. (3), 23, 692-738 (1972).
- (11) Valdivia, M. "On bounded sets which generate Banach spaces". Archiv. der Math. 23, 6, 640-642 (1972).
- (12) Valdivia, M. "Some notes on convex sets". Manusc. Math. 26, 381-386 (1979).
- (13) Valdivia, M. "Topics in locally convex spaces". North. Holland. Math. Studies 67. Amsterdam. New York. Oxford (1982).
- (14) Valdivia, M. "Localization theorems in webbed spaces". Semesterbericht Funktional Analysis. Tübingen, Sommersemester 49-57 (1982).
- (15) Valdivia, M. "Classes of barrelled spaces related with the closed graph theorem". Port. Mathematica 40-3, 345-366.
- (16) Valdivia, M. "Quasi LB-spaces" (Pendiente de Publicación en J. London Math. Soc.).
- (17) Valdivia, M. "Semi LB-spaces" (Preprint).

Dirección del autor:
José Orihuela
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de Murcia
30.001 Murcia
SPAIN

