ESTUDIO INTRINSECO DE PIEZAS NAVIER-HIPERELASTICAS
(Elastostática de piezas longitudinales conservativas)

por

E. GARBAYO y M.A. PUIGVÍ

ABSTRACT

This paper analizes the dependence between displacements and adequately defined strains for a class of spatial rods. This dependence is characterized through certain properties of linear differential systems in L^p spaces. General theories of equilibrium of conservative elastic rods can thus be applied, to the special case here considered, but presenting the elastic energy from a frame indifferent viewpoint, both to help clarifying physical meaning and to simplify mathematical development.

1. INTRODUCCION

Aquí se consideran piezas hiperelásticas longitudinales con leyes no lineales, aceptando la hipótesis de secciones planas durante la deformación. Desde un punto de vista matemático esta hipótesis constituye un caso particular, no obstante, su importancia radica en la gran cantidad de aplicaciones técnicas que posee. Esta clase de piezas, es esencialmente la misma descrita por Antman and Jordan (1974/75) [1].

En la teoría de piezas longitudinales es usual buscar funcionales de energía interna convenientes, que se ajusten al fenómeno físico que deben describir. Para conseguir esto parece más adecuado expresar el funcional de energía mediante deformaciones generalizadas que nos permiten hallar los desplazamientos equivalentes salvo movimiento de sólido rígico.

Antman, 1976 [2], hace un tratamiento general del problema, pero trabajando con un funcional de energía dependiente de los desplazamientos, y analizando caso por caso el funcional de energía externa. En otro artículo (Antman and Brezis, 1978 [3]) se resuelve el problema en deformaciones, pero solo con movimiento plano.

En los resultados presentados aquí se da un tratamiento sistemático a la continuidad débil de los funcionales de energía externa. Por otro lado, se simplifica el desarrollo matemático y propicia el sentido físico, al expresar el funcional de energía a base de deformaciones generalizadas.

2. DESCRIPCION GEOMETRICA

2.1. Definición de la pieza longitudinal

a) La pieza elástica está definida por una curva alabeada llamada directriz.

En la configuración inicial indeformada, dicha curva está definida por la ecuación vectorial $\overline{r} = \overline{R}(s)$, que se supone continuamente diferenciable hasta el orden dos inclusive, donde el parámetro s toma valores en cierto intervalo compacto $[a, b]$.

Se trabaja con la hipótesis clásica de Navier de que las secciones transversales se mantienen planas e indeformadas al deformarse la pieza, pero no necesariamente normales a la directriz deformada.

b) En la configuración deformada, la ecuación vectorial de la directriz se expresa $\overline{r} = \overline{R}(s) + \overline{u}(s)$, $s \in [a, b]$, exigiéndole al campo vectorial $\overline{u}(s)$ la misma regularidad que a $\overline{R}(s)$.

c) En la configuración inicial, a cada valor del parámetro s se asocia un triedro ortonormal directo $\left\{\overline{\beta}_1(s), \overline{\beta}_2(s), \overline{\beta}_3(s)\right\}$, de tal manera que los dos primeros vectores están dirigidos según la sección transversal.

d) En la configuración deformada, la sección transversal ha sufrido una traslación y un giro, y el triedro inicial se habrá transformado en $\left\{\overline{B}_1(s), \overline{B}_2(s), \overline{B}_3(s)\right\}$.

e) Finalmente se considera cierta colección de condiciones de contorno en los extremos de la pieza. Aunque los resultados que se van a exponer son válidos para distintos tipos de condiciones, a fin de una mayor claridad se concreta la colección siguiente:

(1) $\overline{u}(a) = \overline{u}(b) = 0$ (Extremos fijos)
(2) $B(a) = \beta(a)$ (Empotramiento en el extremo $s = a$)
(3) Existen dos vectores fijos, $\overline{h}$ y $\overline{H}$ de R^3, tales que $B(b)\,\overline{h} = \beta(b)\,\overline{h} = \overline{H}$ (Articulación en el extremo $s = b$)

2.2. Desplazamietos y deformaciones generalizados

Denominaremos " desplazamientos generalizados " a las funciones $\overline{u}(s)$, $B(s)-\beta(s)$.

Se supone que la pieza material en la configuración de referencia "ocupa" una familia de secciones $\{K_s\}_{s \in [a, b]}$ en donde cada K_s es un conjunto compacto en R^2, de tal manera que la posición de referencia (en el espacio euclídeo tridimensional) de cada punto material P viene determinada por sus coordenadas curvilineas (s,x,y) en la forma:

(4) $\overline{P}(s,x,y) = \overline{R}(s) + x\,\overline{\beta}_1(s) + y\,\overline{\beta}_2(s)\ ,\ s \in [a, b]\ ,\ (x,y) \in K_s$

en donde los vectores unitarios $\overline{\beta}_i(s)$, $i = 1,2,3$, constituyen las filas de la matriz $\beta(s)$

(5) $\forall i = 1,2,3 \qquad \overline{\beta}_i(s) = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij}(s)\,\overline{e}_j\ ; \qquad \overline{\beta}_3(s) = \overline{\beta}_1(s) x\, \overline{\beta}_2(s)$

siendo $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ una base ortonormal fija del espacio euclídeo ambiente, E^3.

La posición ocupada por el punto material P en la configuración deformada, quedará determinada por:

(6) $\overline{p}(s,x,y) = \overline{R}(s) + \overline{u}(s) + x\,\overline{B}_1(s) + y\,\overline{B}_2(s)$

en donde, de forma similar a lo hecho anteriormente, se toma:

(7) $\forall i = 1,2,3 \qquad \overline{B}_i(s) = \sum_{j=1}^{3} B_{ij}(s)\,\overline{e}_j\ ; \overline{B}_3(s) = \overline{B}_1(s) \times \overline{B}_2(s)$

A continuación definimos la *deformación angular,* como una función matricial 3x3, dada por:

(8) $\forall s \in [a, b] \qquad \phi(s) = \dfrac{d\,B(s)}{ds} \cdot B^T(s) - \dfrac{d\,\beta(s)}{ds} \cdot \beta^T(s)$

en donde T, representa la transposición matricial.

A partir de la ortogonalidad de las matrices B(s) y $\beta(s)$, se deduce de forma inmediata, que la matriz $\phi(s)$ es antisimétrica.

Seguidamente se define la *deformación longitudinal*, como una función vectorial en R^3, dada por:

(9) $\overline{\xi}(s) = B(s)\,\{\overline{R}'(s) + \overline{u}'(s)\} - \beta(s)\,\overline{R}'(s)$

en donde, ' se refiere a la diferenciación respecto a s, y se identifican los vectores en E^3 con sus respectivos vectores columan formados por sus componentes en la base $(\overline{e}_j)$. No planteamos ahora, de modo recíproco el hallar B(s), $\overline{u}(s)$ cuando se conoce la función matricial antisimétrica ϕ (s) y la función vectorial $\overline{\xi}(s)$.

Se reescribe la ecuación diferencial matricial (8):

$$(10) \quad \forall s \in [a, b] \quad \frac{d\,B(s)}{ds} = \omega(s)\,B(s)$$

$$(11) \quad \omega(s) = \phi(s) + \frac{d\,\beta(s)}{ds} \cdot \beta^T(s)$$

Debe hacerse notar que, debido a la antisimetría de ϕ (s), dados dos vectores columna cualesquiera de una matriz solución B(s), su producto escalar canónico en R^3 permanece constante respecto a s. Es decir, que si B(a) es una matriz ortogonal, para todo s perteneciente a [a, b], B(s) será también ortogonal.

Escribiendo en componentes las expresiones (8) y (9), se tiene:

$$(12) \quad \forall i, j = 1,2,3 \quad \phi_{ij}(s) = \overline{B}_i'(s) \cdot \overline{B}_j(s) - \overline{\beta}_i'(s) \cdot \overline{\beta}_j(s)$$

$$(13) \quad \forall k = 1,2,3 \quad \xi_k(s) = \overline{B}_k(s) \cdot (\,\overline{R}'(s) + \overline{u}'(s)\,) - \overline{\beta}_k(s) \cdot \overline{R}'(s)$$

quedando de manifiesto la invariancia (productos escalares) de dichas componentes con respecto a la base ortonormal de referencia $(\overline{e}_j)$, j = 1,2,3 de E^3, lo que justifica parcialmente la denominación de "deformaciones".

Es fácil probar que las ecuaciones escritas hasta ahora tienen las dos propiedades siguientes:

– Dada la matriz ϕ (s) 3x3 antisimétrica, dada β(s) 3x3 ortogonal, $\overline{R}(s)$ en E^3, $\overline{\xi}(s)$ en R^3, funciones lo suficientemente regulares en [a, b], existe al menos una matriz ortogonal B(s) y una función vectorial $\overline{u}(s)$ en E^3 que son soluciones de (8), (9).

– Dados dos pares de soluciones, B(s), $\overline{u}(s)$ producen en (6), (7) dos campos vectoriales del tipo $\overline{p}(s,x,y)$, de manera que se puede pasar de uno a otro por un movimiento rígido en E^3.

2.3. Condición de invertibilidad local

Se examina la transformación $\overline{P} \longrightarrow \overline{p}$ definida en (4) y (6), haciendo especial hincapié en el signo del jacobiano de $(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{P}})$, cuya constancia es condición suficiente para la invertibilidad local de la transformación, y para que haya cociente nunca nulo ni infinito de volumenes elementales.

Representando por (X_i) i = 1,2,3 , (x_j) j = 1,2,3 las componentes de $\overline{P}$ y $\overline{p}$ respectivamente en la base de referencia de E^3, se tiene:

$$(14) \quad \det\left(\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}\right) = \det\left(\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(s,x,y)}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial(s,x,y)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\right) > 0$$

De forma consistente con la idea física intuitiva de la individualidad de los puntos materiales del cuerpo, se puede suponer que la función $(s,x,y) \longrightarrow \overline{P}$ es biyectiva con jacobiano positivo, nunca cero o infinito. Con esto, la condición (14) se reduce a imponer:

$$(15) \quad \forall s \in [a,b] \ ; \ \forall (x,y) \in K_s \ , \ \det\left(\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(s,x,y)}\right) > 0$$

y teniendo en cuenta (6), la desigualdad se reduce a:

$$(16) \quad \forall s \in [a,b] \ , \ \forall (x,y) \in K_s$$

$$(\overline{R}'(s) + \overline{u}'(s) + x\,\overline{B}_1'(s) + y\,\overline{B}_2'(s)) \cdot \overline{B}_3(s) > 0$$

Usando las notaciones $C(s), \overline{l}(s)$ respectivamente para las funciones conocidas $(d\beta/ds) \cdot \beta^T(s)$ y $\beta(s) \cdot \overline{R}'(s)$, y según (8), (9), la relación (16) se puede reescribir como:

$$(17) \quad \forall s \in [a,b] \ , \ \forall (x,y) \in K_s$$

$$x\,(C_{13}(s) - \phi_{31}(s)) + y\,(\phi_{23}(s) + C_{23}(s)) +$$

$$+ \ \xi_3(s) + l_3(s) > 0$$

Introduciendo las notaciones: $\overline{\phi} = (\phi_{23}, \phi_{31}, \phi_{12})$, $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, se obtiene que el subconjunto Ω_s de R^6, definido por:

$$(18) \quad \Omega_s = \Big\{ (\overline{\phi}, \overline{\xi}) \in R^6 \mid \forall (x,y) \in K_s \ ;$$

$$x(C_{13}(s) - \phi_2) + y(C_{23}(s) + \phi_1) + (l_3(s) + \xi_3) > 0 \Big\}$$

es para cada s en [a, b] un conjunto abierto y convexo en R^6, isomorfo al producto cartesiano de R^3 y un cono abierto y convexo.

2.4. Deformaciones en un espacio de Lebesgue L^p

Por exigencias de las herramientas disponibles de análisis funcional (para probar los teoremas de existencia), consideramos deformaciones $\overline{\phi}(s)$, $\overline{\xi}(s)$ de componentes en un cierto $L^p(a, b)$, con $p > 1$.

2.4.1. Teorema: Sea $\omega(s)$ una función matricial en L^p (a,b; 3x3), con $p \geqslant 1$. En tales supuestos existe solución única Y(s) en C[a,b; 3x3], para el problema de valor inicial:

$$(19) \qquad \forall s \in [a,b]\,, \quad \frac{d\,Y(s)}{ds} = \omega(s) \cdot Y(s) \quad , \quad Y(a) = Id$$

Las notaciones Id, L^p(a,b; 3x3), C^m[a,b; 3x3], indican respectivamente, la matriz identidad 3x3, las funciones matriciales 3x3 diferenciables con continuidad hasta el orden m inclusive en el intervalo [a, b].

La demostración de este teorema puede hallarse en Coddington and Levinson, pp 97,98 [4].

El teorema 2.4.1. nos permite definir un operador $\mathfrak{Q}$ no lineal, entre los espacios L^p(a,b; 3) y C[a,b; 3x3], que satisface las condiciones:

$$(20) \qquad \forall \overline{\phi} \in L^p(a,b;3) \quad , \quad \forall s \in [a,b]$$

$$(\mathfrak{Q}\,\overline{\phi})\,(s) = Y(s)$$

$$\frac{d(\mathfrak{Q}\,\overline{\phi})\,(s)}{ds} = (\phi\,(s) \;+ \frac{d\beta(s)}{ds} \cdot \;\beta^T(s)\,)\,(\mathfrak{Q}\,\overline{\phi})\,(s)$$

donde ϕ (s) es la matriz antisimétrica, cuyo vector polar es $\overline{\phi}$ (s). Teniendo en cuenta (2), (10) y (11), se puede escribir:

$$(21) \qquad B(s) = (\mathfrak{Q}\,\overline{\phi})\,(s) \cdot \beta(a)$$

Para hallar finalmente $\overline{u}(s)$, se utilizan las expressiones,, (1), (9), (20) y (21)

$$(22) \qquad \overline{u}(s) = \int_a^s \beta^T(a)\,(\mathfrak{Q}\,\overline{\phi})^T(\sigma)\,\overline{\xi}(\sigma)\,d\sigma \;+$$

$$+ \int_a^s \left\{ \beta^T(a)\,(\mathfrak{Q}\,\overline{\phi})^T(\sigma\,)\,\beta(\sigma) - Id \right\} \overline{R}'(\sigma)\,d\sigma$$

Que podemos escribir de forma compacta, mediante un operador no lineal $\mathcal{P}$ entre los espacios L^p(a,b; 3) x L^p(a,b; 3) y C^1[a,b; 3], definido en la forma:

$$(23) \qquad \forall \overline{\phi}, \overline{\xi} \in L^p(a,b;3) \quad , \quad \forall s \in [a,b]$$

$$\mathcal{S}(\overline{\phi}, \overline{\xi})(s) = \int_a^s (\mathcal{Q}\overline{\phi})^T(\sigma) \left\{ \overline{\xi}(\sigma) + \beta(\sigma)\overline{R}'(\sigma) \right\} d\sigma$$

La expresión (22) se reescribirá:

$$(24) \qquad \overline{u}(s) = \beta^T(a)\,\mathcal{S}(\overline{\phi}, \overline{\xi})(s) + \overline{R}(a) - \overline{R}(s)$$

Finalmente se define el conjunto de deformaciones posibles V, contenido en $L^p(a,b;3)xL^p(a,b;3)$, y dado por:

$$(25) \qquad V = \left\{ (\overline{\phi}, \overline{\xi}) \in L^p(a,b;3)x\,L^p(a,b;3) \mid \right.$$

$$\left. (\mathcal{Q}\overline{\phi})(b)\,\beta(a)\,\overline{h} = \overline{H}\,;\ \beta^T(a)\,\mathcal{S}(\overline{\phi}, \overline{\xi})(b) + \overline{R}(a) - \overline{R}(b) = \overline{0} \right\}$$

siendo $\overline{h}, \overline{H}$ los vectores fijos especificados en (3).

A continuación se dan las propiedades fundamentales de los operadores $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{S}$, cuya justificación detallada puede encontrarse en E. Garbayo, [7].

2.4.2. Teorema: Sean $(\overline{\phi}_n)_{n \in Z^+}$, $(\overline{\xi}_n)_{n \in Z^+}$ sucesiones débilmente convergentes en $L^p(a,b;3)$, con límites respectivos, $\overline{\phi}$, $\overline{\xi}$. Si $p > 1$, se verifica:

$$(26) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}\,\overline{\phi}_n = \mathcal{Q}\overline{\phi} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(\overline{\phi}_n, \overline{\xi}_n) = \mathcal{S}(\overline{\phi}, \overline{\xi})$$

respectivamente en la norma del máximo de los espacios C[a,b; 3x3] y C[a,b; 3], o sea, que la convergencia débil de las sucesiones de partida, implica la convergencia fuerte de sus imágenes según los operadores $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{S}$.

2.4.3. Teorema: Dados $p > 1$, y cualesquiera $\overline{\phi}_o(s)$, $\overline{\xi}_o(s)$ en $L^p(a,b;3)$, los operadores $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{S}$ son diferenciables Frechet en $(\overline{\phi}_o, \overline{\xi}_o)$.

$\mathcal{Q}'(\overline{\phi}_o, .)$ es un operador lineal entre los espacios $L^p(a,b;3)$ y C[a,b; 3x3], tal que:

$$(27) \qquad \forall \overline{\phi} \in L^p(a,b;3) \quad , \quad \forall s \in [a,b]$$

$$\mathcal{Q}'(\overline{\phi}_o, \overline{\phi})(s) = (\mathcal{Q}\,\overline{\phi}_o)(s) \cdot \int_a^s (\mathcal{Q}\,\overline{\phi}_o)^T(\sigma)\,\varphi(\sigma)\,(\mathcal{Q}\overline{\phi}_o)(\sigma)\,d\sigma$$

donde todos los productos se entienden como matriciales.

En segundo lugar, $\mathcal{S}'(\overline{\phi}_o, \overline{\xi}_o; ., .)$ es un operador lineal entre los espacios $L^p(a,b;3) \times L^p(a,b;3)$ y C[a,b; 3], de modo que:

$$(28) \qquad \forall \overline{\phi}, \overline{\xi} \in L^p(a,b;3) \quad , \quad \forall s \in [a,b]$$

$$\mathcal{P}'(\bar{\phi}_o, \bar{\xi}_o\,;\,\bar{\phi}, \bar{\xi})(s) = \int_a^s [(\mathcal{Q}\,\bar{\phi}_o)(\sigma)]^T\, \bar{\xi}(\sigma)\, d\sigma \;+$$

$$+\; [\mathcal{Q}'(\bar{\phi}_o;\bar{\phi})(\sigma)]^T(\,\bar{\xi}_o(\sigma) + \beta(\sigma)\, \bar{R}'(\sigma))\, d\sigma$$

3. CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO GENERALIZADAS

A continuación se aborda el problema central de esta sección que es el de justificar la existencia matemática de configuraciones de equilibrio para estas piezas longitudinales elásticas, con leyes no lineales, sometidas a cargas que derivan de un potencial. Este problema ya había sido tratado con anterioridad en un contexto más general (Antman, 1976, [2]), trabajando con desplazamientos generalizados pero no invariantes por movimientos rígidos. En el desarrollo que se va a detallar seguidamente, se usa el procedimiento alternativo de tomar las funciones de deformación como únicas variables del problema, lo que faculta la interpretación física de la hipótesis sobre el funcional de la energía. Además, el desarrollo aquí presentado mejora mucho la generalidad de tratamiento del potencial de las cargas exteriores, cuya continuidad débil analiza Antman en forma un tanto casuística.

3.1. Función de energía interna

3.1.1. ***Definición:*** Supondremos que la densidad de energía interna hiperelástica es una función de $R^6 x[a, b]$ en $\widetilde{R}$ (recta real completada con el punto $+\infty$), que tiene las propiedades:

1) $\forall s \in [a, b]\,;\; U^{-1}(+\infty) = R^6 - \Omega s$ (29)

donde Ωs está definido en (18)

2) $\forall\, \bar{\gamma}_o \in R^6$, la función en s $U(\bar{\gamma}_o\,,.)$ es medible; $\forall s \in [a, b]$; la función en $\bar{\gamma}$ $U(\,.\,, s)$ es de clase dos cuando se restringe a Ωs (30)

3) $\forall \bar{\gamma} \in \Omega s\,,\;\; \forall \bar{c} \in R^6 - \{\bar{0}\}\;;\;\; \sum_{i,j=1}^{6} \partial_{ij}^2\, U(\bar{\gamma}, s)\, c_i\, c_j > 0$ (31)

Esta condición asegura que el "vector de esfuerzos" $\partial U/\partial \bar{\gamma}$ es creciente (en sentido generalizado) con las deformaciones $\bar{\gamma}$.

4) $\exists\, p > 1\;,\;\; \exists H > 0\;,\;\; \exists K \in L^1(a, b)\;,\;\; \forall(\bar{\gamma}, s) \in R^6 \times [a, b]$

$$U(\bar{\gamma}, s) \geqslant -K(s) + H \sum_{j=1}^{6} |\gamma_i|^p \qquad (32)$$

En la primera de las condiciones, se impone que si se viola la invertibilidad local la energía se haga infinita, y que sea ésta la única situación en que esto ocurra. La segunda condición es de regularidad. La tercera impone, según se ha dicho, que los "esfuerzos" resulten funciones monótonas crecientes de las deformaciones. Finalmente, en la cuarta condición se impone una cierta velocidad de crecimiento de la energía interna, cuando las deformaciones crecen indefinidamente.

3.1.2. Hipótesis alternativas

Como ya se ha comentado antes, con la primera condición del apartado anterior nos aseguramos de que, cuando no se verifique la condición de invertibilidad local, o sea cuando $\overline{\gamma} \notin \Omega s$, entonces $U(\overline{\gamma}, s) = \infty$. No obstante, en ninguna de las cuatro condiciones dadas queda patente que, cuando $\overline{\gamma}$ se acerca a $\partial\Omega s$, la función de energía alterna debe crecer indefinidamente. Para subsanar esta falta, se proponen otras dos hipótesis sobre la función de energía interna, que sustituirán a la cuarta condición.

*3.1.2.1. **Definición:*** Sea $\overline{g}(\overline{\Delta}, s)$ una función continua entre $R^6 x [a, b]$ y R^6, que verifica:

i) Para todo s en $[a, b]$, $\overline{g}(\,.\,, s)$ es una biyección continua diferenciable de R^6 en Ωs, cuyo jacobiano $\partial \overline{g}/\partial\overline{\Delta}$ es siempre no singular.

ii) Para todo $\overline{\delta}_o$ en R^6, $\overline{g}(\overline{\delta}_o, .)$ es una función medible en $[a, b]$. Para la existencia de tales biyecciones ver (E. Garbayo, [8]). A tales funciones las denominaremos "funciones de reparto".

En la definición de densidad de energía interna, se sustituye (32) por las dos hipótesis siguientes:

Existe una función de reparto $\overline{g}$, y existen números reales $p > 1$, $q < p$, que verifican:

(33) $\exists A \in L^p(a, b)$, $\exists r > 0$, $\forall \overline{\Delta} \in R^6$, c. $\forall s \in (a, b)$

$$|\overline{g}(\overline{\Delta}, s)| \leqslant A(s) + r\,|\overline{\Delta}|^{q/p}$$

(34) $\exists k \in L^1(a, b)$, $\exists h > 0$, $\forall \overline{\Delta} \in R^6$, $\forall s \in (a, b)$

$$U(\overline{g}(\overline{\Delta}, s), s) \geqslant -k(s) + h\,|\overline{\Delta}|^q$$

donde $|\overline{\Delta}|^q = \sum_{j=1}^{6} |\Delta_j|^q$

En primer lugar cabe notar que se obtiene de forma inmediata (32), a partir de (33), (34) con la notación $\overline{\gamma} = \overline{g}\ (\overline{\Delta}, s)$

La propiedad i) de la función $\overline{g}$ definida en 3.1.2.1 implica que la antiimagen de un punto próximo a $\partial\Omega s$ crezca indefinidamente en R^6, con lo que, según (34), también la energía crecerá indefinidamente.

3.2. Función de energía externa

Notación: Sea $M_R(3x3)$ el conjunto de las matrices 3x3 de coeficientes reales.

Definición: La función de densidad de energía externa W la supondremos definida del producto cartesiano $R^3 x M_R(3x3)$ x [a, b] en R . Supondremos W diferenciable con continuidad, así como la existencia de una función continua F tal que:

(35) $\quad \exists q \in (0, p)\ ,\quad \exists h > 0\ ,\quad \forall \overline{u} \in R^3\ ,\quad \forall B \in M_R\ (3x3)\ ,\quad \forall s \in [a, b]$

$$W(\overline{u}, B, s) < F(B,s) + h \sum_{i=1}^{3} |u_i|^q$$

donde p es el real utilizado en el apartado anterior.
Aquí se impone una condición de crecimiento acotado superiormente.

3.3. Funcional de energía

El funcional de energía hiperelástica será real y definido en $L^p(a, b; 3)$ x $L^p(a,b; 3)$ en la forma:

(36) $\quad \forall \overline{\phi}, \overline{\xi} \in L^p(a, b; 3)$

$$E(\overline{\phi}, \overline{\xi}) = \int_a^b U(\overline{\phi}(s), \overline{\xi}(s), s)\ ds + \int_a^b W(\mathcal{P}_1(\overline{\phi}, \overline{\xi})(s), (Q\overline{\phi})(s)\,\beta(a), s)\ ds$$

donde:

(37) $\quad \mathcal{P}_1(\overline{\phi}, \overline{\xi})(s) = \overline{R}(a) - \overline{R}(s) + \beta^T(a)\ \mathcal{P}(\overline{\phi}, \overline{\xi})(s)$

Al primer término integral E_I le denominaremos funcional de energía interna, y al segundo término E_e, funcional de energía externa.

3.3.1. ***Definición:*** Denominaremos "configuración de equilibrio finitamente estable de la pieza unidimensional "a aquella que proporciona un mínimo aislado del funcional de la energía en la restricción a C[a,b; 3] x C[a,b; 3] del conjunto V definido en (25), mínimo a considerar en la clásica norma del máximo de C[a, b].

Comentario: Se utiliza la terminología "finitamente estable", por imponer condiciones menos restrictivas que las usuales en Mecánica. La condición de mínimo del funcional implica la estabilidad del equilibrio sólo para sistemas con un número finito de grados de libertad. Para un sistema con infinitos grados de libertad no tienen que verificarse forzosamente esta implicación (ver por ejemplo Movcham, [11]) aunque sí se constata en muchos casos y se usa habitualmente en la práctica (ver por ejemplo, Dym [5]) como criterio de estabilidad. Esto justifica la terminología poco usual empleada.

3.4. Funcionales de contorno

Sea $p > 1$ dado en (3.2), y los $\overline{h}$, $\overline{H}$ vectores dados en la condición de contorno (3).

De las tres condiciones de contorno que se dan en el aparatado 2.1, la segunda ya ha sido utilizada para hallar el desplazamiento generalizado B(s), y de la misma forma, la primera parte de (1) para hallar $\overline{u}(s)$. Así pues, las condiciones que quedan por imponer son:

a) $B(b)\,\overline{h} = \beta(b)\,\overline{h} = \overline{H}$; b) $\overline{u}(b) = 0$

Se definen cinco funcionales de contorno:

$$\forall\, \overline{\phi}, \overline{\xi} \in L^p\,(a,b;3)\ ,$$

$$\text{(38)} \qquad \mathcal{F}_i(\overline{\phi}, \overline{\xi}) = \left\{ (\mathcal{Q}\overline{\phi})\,(b)\,\beta(a)\,\overline{h} - \overline{H} \right\}_i \qquad i = 1,2$$

$$\text{(39)} \qquad \mathcal{F}_i(\overline{\phi}, \overline{\xi}) = (\mathcal{P}_1(\overline{\phi}, \overline{\xi})\,(b)\,)_{i-2} \qquad i = 3,4,5$$

donde $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}_1$ están definidos en (20), (37). Se observa por otra parte que $\overline{\phi}$ y $\overline{\xi}$ verifican las seis condiciones de contorno a) y b) si, y sólo si anulan estos cinco funcionales (B se sabe ortogonal), o equivalentemente pertenecen a V definido en (25).

3.5. Existencia de mínimo

Para demostrar la existencia de mínimo del funcional de energía E, se apela a un clásico teorema sobre minimización de funcionales semicontinuos, que se transcribe: (Vainberg, p. 78 [13])

3.5.1. ***Teorema:*** Todo funcional inferiormente semicontínuo en sentido débil por sucesiones en un conjunto acotado y débilmente cerrado en un espacio de Banach reflexivo, tiene extremo inferior finito y lo alcanza.

Seguidamente se verifican las hipótesis del teorema anterior, justificando así la existencia de mínimo para el funcional de la energía.

3.5.2. ***Proposición:*** El funcional de energía interna es inferiormente semicontinuo en sentido débil por sucesiones en $L^p(a,b;3) \times L^p(a,b;3)$, mientras que el funcional de energía externa es débilmente continuo por sucesiones en el mismo espacio producto. Además, el conjunto V definido en (25) es débilmente cerrado también en el mismo espacio.

Las afirmaciones se demuestran fácilmente a partir de las propiedades de los operadores $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{Q}$, definidos en (37), (20).

3.5.3. ***Proposición:*** Para un real c cualquiera, el conjunto

$$\mathcal{E}(c) = \left\{ (\overline{\phi}, \overline{\xi}) \in L^p(a,b;3) \times L^p(a,b;3) \mid E_I(\overline{\varphi}, \overline{\xi}) \leqslant c \right\} \tag{4}$$

es convexo y débilmente cerrado.

Estudiando el crecimiento del funcional de energía interna, se obtiene de forma inmediata:

$$\lim \int_a^b U(\overline{\phi}(s), \overline{\xi}(s), s) \; ds = \infty \,, \quad \text{si } \| \overline{\phi} \|_p + \| \overline{\xi} \|_p \to \infty \tag{41}$$

Efectivamente, de la condición (32) se sigue por integración:

$$\int_a^b U(\overline{\phi}(s), \overline{\xi}(s), s) \; ds \geqslant H \left\{ \sum_{i=1}^{3} \int_a^b | \phi_i(s) |^p \, ds + \right. \tag{42}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \int_a^b | \xi_j(s) |^p \, ds \right\} - \| K(s) \|_1$$

y al ser $p > 1$, queda justificado el límite (41).

En cuanto al funcional de energía total, es fácil probar en base a la condición $q < p$ en (33), que el funcional de energía interna crece más rápidamente que el de energía externa, de manera que verifica una relación análoga a la (41):

$$\lim \int_a^b U(\overline{\phi}(s), \overline{\xi}(s), s) \; ds + \int_a^b W(\mathcal{P}_1(\overline{\varphi}, \overline{\xi})(s), (\mathcal{Q}\overline{\varphi})(s)\beta(a), s) \; ds = \tag{43}$$

si $\| \overline{\phi} \|_p + \| \overline{\xi} \|_p \to \infty$

Según esto, existirán $\eta_o > 0$, $c > 0$, tales que el mínimo del funcional, si existe, no pertenecerá a la bola:

(44) $\left\{ (\overline{\phi}, \overline{\xi}) \in L^p(a,b;3) x L^p(a,b;3) \mid \| (\overline{\phi}, \overline{\xi}) \| > \eta_o \right\}$

ni al conjunto:

$$\left\{ (\overline{\phi}, \overline{\xi}) \in L^p(a,b;3) x L^p(a,b;3) \mid E(\overline{\phi}, \overline{\xi}) > c \right\}$$

De forma que el mínimo se alcanzará eventualmente en:

(45) $\mathcal{A} = \left\{ (\overline{\phi}, \overline{\xi}) \in V \mid E(\overline{\phi}, \overline{\xi}) \leqslant c \right\} \subset \mathcal{E}(c) \cap V$

Este conjunto podemos elegirlo no vacio, perteneciendo a él la configuración inicial.

Por (40) y (41), $\mathcal{E}$ (c) es un conjunto acotado, así como débilmente cerrado. Además E es un funcional inferiormente semicontinuo en forma débil. Por tanto implica que $\mathcal{A}$ es acotado débilmente cerrado.

*3.5.4. **Conclusión:*** $\mathcal{A}$ es un subconjunto acotado y débilmente cerrado en el espacio de Banach reflexivo $L^p(a,b;3) x L^p(a,b:3)$. El funcional de la energía es inferiormente semicontinuo en sentido débil por sucesiones en $\mathcal{A}$, por lo que aplicando el Teorema 3.5.1., podemos concluir que dicho funcional tiene extremo inferior finito, y lo alcanza en $\mathcal{A}$. Lo representaremos como

$$(\overline{\phi}^*(s), \overline{\xi}^*(s)) \in L^p(a,b;3) \times L^p(a,b;3)$$

cumpliendose que:

(46) c. $\forall s \in [a,b]$ $(\overline{\phi}^*(s), \overline{\xi}^*(s)) \in \Omega_s$

en donde Ω_s es el conjunto convexo definido en (18). Si la (46) no se cumpliese casi por doquier, por la hipótesis (29) sobre la función de energía interna, el funcional de energía no podría ser finito.

4. REGULARIDAD DE LAS CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO

Queda ahora por demostrar que la solución generalizada que se ha hallado, es la solución clásica del problema de contorno que nos ocupa. Es decir, hay que demostrar que:

(47) $(\bar{\varphi}^*(s), \bar{\xi}^*(s)) \in C[a,b;3] \times C[a,b;3]$

4.1. Diferenciabilidad de los funcionales de energía y de contorno

4.1.1. ***Definición:*** A la función de reparto $\bar{g}$, definida en 3.1.2. le asociaremos un operador $\mathfrak{g}$ definido en $\mathcal{M}$ (a, b; 6), conjunto de las funciones vectoriales medibles (de seis componentes definidas entre (a, b) y R), en la forma:

(48) $\forall \bar{\Delta} \in \mathcal{M}(a,b;6)$, c. $\forall s \in (a,b)$

$$(\mathfrak{g}(\bar{\Delta}))(s) = \bar{g}(\bar{\Delta}(s), s)$$

y se justifica (Vainberg, pag. 148-159, [13], que la imagen de $\mathfrak{g}$ también está en $\mathcal{M}(a,b;6)$.
A un operador de este tipo, se le suele denominar "operador de Nemytsky".

4.1.2. ***Propiedades del operador*** $\mathfrak{g}$: A continuación se enuncian las principales propiedades del operador $\mathfrak{g}$ desarrolladas en algún mayor detalle en (Garbayo y Puigví, [9]):

1.– Si se verifica:

$$\exists A \in L^p(a,b) \;,\; \exists r > 0 \;,\; \forall \bar{\Delta} \in R^6 \;,\; \text{c. } \forall s \in (a,b), p > 1, q > p$$

$$|\bar{g}\;(\bar{\Delta}, s)| \leqslant A(s) + r\,|\bar{\Delta}|^{q/p}$$

entonces $\mathfrak{g}$ es un operador continuo y acotado, definido de $L^q(a,b;6)$ en $L^p(a,b;6)$.
2.– Con la notación $1/r = 1/p - 1/q$, si se supone que las derivadas parciales de la función $\bar{g}$ satisfacen:

(49) $\exists B(s) \in L^r(a,b)$, $\exists c > 0$, $\forall k=1,..,6$ c. $\forall s \in (a,b)$
$\forall \bar{\Delta} \in R^6$

$$|\partial_k \bar{g}(\bar{\Delta}, s)| \leqslant B(s) + c\,|\bar{\Delta}|^{(q/p)-1}$$

entonces existe la diferencial Gateaux $\mathfrak{g}'(\bar{\delta}_o, .)$ para todo $\bar{\delta}_o$ en $L^q(a,b;6)$, y tiene la expresión:

(50) $\forall \overline{\Delta} \in L^q(a,b;6)$, c. $\forall s \in (a,b)$, $\forall m=1,\ldots,6$

$$(\mathfrak{g}'(\overline{\delta}_o,\overline{\Delta}))_m(s) = \Sigma \quad \Delta_k(s)\, \partial_k\, g_m\,(\overline{\delta}_o(s), s)$$

de tal forma que cada derivada parcial ∂k $\mathfrak{g}$ es un operador de $L^q(a,b;6)$ en $L^r(a,b;6)$.

3.– El operador lineal $\mathfrak{g}'(\overline{\delta}_o\,,.)$ definido entre $L^q(a,b;6)$ y $L^p(a,b;6)$ es inversible.

*4.1.3. **Proposición:*** El funcional E_g definido en el espacio $L^q(a,b;6)$ y dado por:

(51) $\forall \overline{\Delta} \in L^q(a,b;6)$, $E_g(\overline{\Delta}) = E(\mathfrak{g}(\overline{\Delta}))$

alcanza un mínimo absoluto en el conjunto:

(52) $V_g = \left\{ \overline{\Delta} \in L^q(a,b;6) \mid \mathfrak{g}(\overline{\Delta}) \in V \right\}$

precisamente para el elemento $\overline{\delta}^*$, tal que $\mathfrak{g}(\overline{\delta}^*) = (\overline{\phi}^*, \overline{\xi}^*)$, en donde $(\overline{\phi}^*, \overline{\xi}^*)$, son las funciones (46) que minimizan el funcional de energía E en el conjunto V.

Para la demostración de este lema, se sigue un proceso análogo al desarrollado en los aparatados 3.5.3 y 3.5.4.

4.1.4. Funcionales de energía externa y de contorno

A continuación se indica que los cinco funcionales de contorno $\mathcal{F}_i \cdot \mathfrak{g}$, i=1, . . . ,5, así como el de energía externa $E_e \cdot \mathfrak{g}$ son diferenciales Gateaux en $L^q(a,b;6)$.

En primer lugar se introduce una notación más compacta, designando mediante el símbolo $\overline{w}$, al par genérico $(\overline{u}, B)$ en $R^3 \times M_R(3x3)$, y representando por $\mathbf{W}$ al funcional:

(53) $\forall \overline{w} \in C[a,b;12]$; $\mathbf{W}(w) = \int_a^b W(\overline{w}(s), s)\, ds$

Se utiliza la notación $\mathfrak{T}$ para designar un operador de $L^p(a,b;6)$ en $C[a,b;12]$:

(54) $\forall \overline{\gamma} \in L^p(a,b;6)$, $\forall \overline{\phi}, \overline{\xi} \in L^p(a,b;3)$, $\overline{\gamma} = (\overline{\phi}, \overline{\xi})$

$$\mathfrak{T}(\overline{\gamma}) = (\mathcal{P}_1(\overline{\phi}, \overline{\xi}),\ (\mathbf{Q}\,\overline{\phi})\,\beta(a))$$

Con esta definición se tiene:

(55) $E_e = \mathbb{W} \cdot \mathfrak{T}$

Facilmente se demuestra que el funcional $\mathbb{W}$ es diferenciable Frechet, a partir de las propiedades de la función W, y al serlo también el operador $\mathfrak{T}$, la regla de composición indica que el funcional E_e es diferenciable Frechet.

Finalmente, se asegura la diferenciabilidad Gateaux de la composición $E_g = E_e \cdot \mathfrak{g}$ (nótese que la regla de la cadena puede no ser válida para la composición de operadores diferenciables Gateaux), al ser el primer factor (ver [9]) diferenciable Frechet.

Tomando $\overline{w}_o = \mathfrak{T}(\overline{\gamma}_o)$, se obtiene la expresión explícita:

(56) $\forall \overline{\gamma} \in L^p(a,b;6)$

$$(\mathbb{W}\cdot\mathfrak{T})'(\overline{\gamma}_o;\overline{\gamma}) = \sum_{j=1}^{12} \int_a^b \mathfrak{T}_j'(\overline{\gamma}_o;\overline{\gamma})(s)\, \partial_j W(\overline{w}_o(s), s)\, ds\cdot$$

Después de proceder a una integración por partes, se llega a una igualdad del tipo:

$$(57) \qquad \int_a^b \mathfrak{T}_j'(\overline{\gamma}_o;\overline{\gamma})(s)\, \partial_j W(\overline{w}_o(s), s)\, ds = \int_a^b \sum_{h=1}^{6} \gamma_k(s)\, \mathcal{K}_{jk}(\overline{\gamma}_o)(s)\, ds$$

en donde los $\mathcal{K}_{jk}$ son operadores cuyas expresiones se obtienen fácilmente, aunque de forma tediosa, a base de los operadores $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{I}$, $\int_s^b$ y de la función W. Estos $\mathcal{K}_{jk}$ son operadores que aumentan la regularidad. Es decir, si $\overline{\gamma}_o$ está en $L^p(a,b;6)$ entonces $\mathcal{K}_{jk}(\overline{\gamma}_o)$ es función de C[a, b] y además, si la función $W(\overline{u}, B, s)$ admite derivadas parciales continuas hasta el orden m ($m > 2$), entonces para todo p natural, si $\overline{\gamma}_o \in C^p[a,b;6]$, la condición $m-2 \geqslant p$, implica que todos los operadores $\mathcal{K}_{jk}$ $j=1,\ldots,12$, $k=1,\ldots,6$ son tales que $\mathcal{K}_{jk}(\overline{\gamma}_o)$ pertenece a $C^{p+1}[a,b]$. Como ejemplo, $\mathcal{K}_{13}$ tiene la expresión:

$$\mathcal{K}_{13}(\overline{\gamma}_o)(s) = \sum_{i,p,r,t=1}^{3} e_{1pi}[(\mathfrak{Q}\overline{\phi}_o)(s)\beta(a)]_{i1}\, [(\mathfrak{Q}\overline{\phi}_o)^T(s)]_{rp}\cdot$$
$$\cdot\left\{\int_j^s (\overline{\xi}_o(\sigma) + \beta(\sigma)\,\overline{r}'(\sigma))^t((\mathfrak{Q}\overline{\phi}_o)(\sigma))_{tr}\, d\sigma\right\}$$

Se efectúa un desarrollo análogo para los funcionales de contorno, obteniendo:

(58) $i = 1,\ldots,5$

$$(\mathcal{F}_i \cdot \mathfrak{g})'(\bar{\gamma}_o ; \bar{\gamma}) = \int_a^b \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^{6} \gamma_k(s) \; \mathcal{H}_{ijk}(\bar{\gamma}_o)(s)\, ds$$

4.1.5 Funcional de energía interna

Supondremos adicionalmente a las hipótesis previstas, que las derivadas parciales de la función de energía interna composición $U_g = U \cdot \bar{g}$, satisfacen desigualdades del tipo:

(59) $\exists f(s) \in L^{q/(q-1)}(a,b)$, $\exists h > 0$. $\forall k=1,\ldots,6$

$\forall \bar{\Delta} \in R^6$, c. $\forall$ s $\in$ (a,b)

$$|\, \partial_k U_g(\bar{\Delta}, s)\, | \leqslant f(s) + h\, |\bar{\Delta}|^{q-1}$$

Entonces, el funcional compuesto $E_I \cdot \mathfrak{g}$ es diferenciable Gateaux en $L^p(a,b; 6)$, según los estudios efectuados en [9]. Su diferencial puede expresarse:

(60) $\forall \bar{\delta}_o, \bar{\Delta} \in L^q(a,b;6)$, c. $\forall$ s $\in$ (a,b)

$$(E_I \cdot \mathfrak{g})'(\bar{\delta}_o, \bar{\Delta})(s) = \int_a^b \sum_{k=1}^{6} \Delta_k(s)\, \partial_k U_g(\bar{\delta}_o(s), s)\, ds =$$

$$= \int_a^b \sum_{k,m=1}^{6} \Delta_k(s)\, \partial_k g_m(\bar{\delta}_o(s), s)\, \partial_m U(\bar{g}(\bar{\delta}_o(s), s)\, ds$$

de manera que,con la notación $\bar{\gamma}_o = \mathfrak{g}(\bar{\delta}_o)$, y la relación anterior, se define un funcional lineal M,

(61) $\forall \bar{\Gamma} \in L^p(a,b;6)$

$$M(\bar{\Gamma}) = \int_a^b \sum_{m=1}^{6} \Gamma_m(s)\, \partial_m U(\bar{\gamma}_o(s), s)\, ds$$

Dado que $\mathfrak{g}'(\bar{\delta}_o, .)$ es inversible y acotado, M resulta ser una aplicación abierta exhaustiva, y aplicando el clásico teorema del operador abierto del Análisis funcional (Rudin, [12]), M resulta acotado, lo que es requisito imprescindible para la existencia de la diferencial Gateaux. En definitiva, la "regla de la cadena" no cierta a priori en este caso, se ha valido de un modo directo.

4.2. Multiplicadores de Lagrange

Sea $\bar{\delta}^* \in L^q(a,b;6)$ el elemento minimizador de la Proposición 4.1.3. Como tal proporciona un extremo al funcional $E \cdot \mathfrak{g}$, anulando los funcionales de contorno $\mathcal{F}_i \cdot \mathfrak{g}$, i=1, . . , 5. Por tanto, (Ref. Miklin, [10])

(62) $\exists \bar{\lambda} \in R^6 - \{\bar{0}\}$, $\forall \bar{\Delta} \in L^q(a,b;6)$

$$\lambda_1 (E \cdot \mathfrak{g})'(\bar{\delta}^*, \bar{\Delta}) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_{i+1} (\mathcal{F}_i \cdot \mathfrak{g})'(\bar{\delta}^*, \bar{\Delta}) = 0$$

Al ser el operador lineal $\mathfrak{g}'(\bar{\delta}^*, .)$ una biyección acotada de $L^q(a,b;6)$ en $L^p(a,b;6)$, (ver apartado 4.1.2) y con la notación usual $\bar{\gamma}^* = \mathfrak{g}(\bar{\delta}^*)$, se tiene:

(63) $\exists \bar{\lambda} \in R^6 - \{\bar{0}\}$, $\forall \bar{\Gamma} \in L^p(a,b;6)$

$$\lambda_1 (M + E_e)'(\bar{\gamma}^*, \bar{\Gamma}) = -\sum_{i=1}^{5} \lambda_{i+1} \mathcal{F}_i'(\bar{\gamma}^*, \bar{\Gamma})$$

La configuración de equilibrio $\bar{\gamma}^*$, se denomina *normal* si $\lambda_1 \neq 0$. (Lo que es equivalente a suponer que los funcionales $\mathcal{F}_i'(\bar{\gamma}^*, .)$ son linealmente independientes). En el supuesto de normalidad y a partir de (56), (57), (58) y (61), se obtiene:

(64) c. $\forall s \in (a, b)$, $\forall k=1, \ldots, 6$

$$\partial_k U(\bar{\gamma}^*(s), s) = -\sum_{j=1}^{12} \mathcal{K}_{jk}(\bar{\gamma}^*)(s) - \lambda_1^{-1} \sum_{i=1}^{5} \lambda_{i+1} \sum_{j=1}^{12} \mathcal{K}_{ijk}(\bar{\gamma}^*)(s)$$

que se representa abreviadamente como:

(65) $\partial_k U(\bar{\gamma}^*(s), s) = f_k^*(s)$

4.3. Regularidad

Supongamos:

1.– Que es abierto el conjunto:

(66) $\Pi = \{(\bar{\gamma}, s) \in R^6 \times [a,b] \mid \bar{\gamma} \in \Omega_s\}$

2.– $\forall i,j=1, \ldots, 6$, las funciones U, $\partial_i U$, $\partial^2_{ij} U$ son continuas en Π. (67)

En tal caso, si el minimizador $\bar{\gamma}^*$ es normal, entonces es una función continua en todo el intervalo $[a,b]$.

Para justificarlo, se define una función F a partir de (65):

(68) $\forall s_o \in [a,b]$, $\forall \bar{\zeta} \in R^6$

$$F(\bar{\zeta}, s_o) = U(\bar{\zeta}, s_o) - \sum_{k=1}^{6} f_k^*(s_o) \zeta^k$$

De forma inmediata a partir de las hipótesis realizadas con respecto a la función de energía U, se tienen:

i) $\lim_{|\overline{\zeta}| \to \infty} F(\overline{\zeta}, s_o) = \infty$ (69)

ii) F función estrictamente convexa respecto a $\overline{\zeta}$. (70)

Por lo que se puede afirmar que, en una adecuada bola cerrada que contiene al cero, el mínimo de la función $F(\overline{\zeta}, s_o)$ es el mínimo en todo R^6, y es el único en que se anulan todas las derivadas parciales. Denominemos $\overline{\zeta}_*$ a este punto, el cual satisface el sistema de ecuaciones:

(71) $\forall s_o \in [a, b]$, $\forall k=1, \ldots, 6$

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma^k} (\zeta^1_*, \ldots, \zeta^6_*, s_o) - f^*_k (s_o) = 0$$

Aplicando el a veces llamado Teorema de la función implícita "global" (Ref. Ekeland. I, Teman. R [6]) se concluye (por la convexidad de U) la existéncia de una única función $\overline{\Lambda}$ de R^6 x [a,b] en Π, tal que:

(72) $\forall(\overline{\gamma}, s) \in \Pi$, $\overline{H} \in R^6$

$$\overline{\text{grad}}\, U(\overline{\gamma}, s) - \overline{H} = \overline{0} \iff (\overline{\gamma}, s) = \overline{\Lambda}(\overline{H}, s)$$

en donde $\overline{\Lambda}$ es CONTINUA. Llamando $\mathcal{H}$ al operador definido entre $L^p(a,b; 6)$ y C [a,b; 6] cuya k-ésima componente (k=1, . . . ,6) es el segundo miembro de (64), podremos escribir:

(73) c. $\forall s \in [a, b]$

$$(\overline{\gamma}_*(s), s) = \overline{\Lambda}([\mathcal{H}\ \overline{\gamma}_*](s), s)$$

de la cual se concluye, que la función $\overline{\gamma}_*$ perteneciente al espacio $L^p(a,b; 6)$ posee un representante continuo. En efecto, $\mathcal{H}$ incrementa la regularidad, luego $\mathcal{H}\ \overline{\gamma}_*$ es función continua. Dado que $\overline{\Lambda}$ también lo es, se deduce que el primer miembro también, por tanto $\overline{\gamma}_*(s)$, es función continua. Además no se viola la condición de invertibilidad local, puesto que a partir de (72), (73), se puede concluir que

$\forall s \in [a, b]$, $\exists \overline{H} \in R^6$

$$(\overline{\gamma}_* (s), s) = \overline{\Lambda} (\overline{\overline{H}}, s) \in \Pi$$

lo que equivale a

$$\forall s \in [a, b] , \qquad \overline{\gamma}_* (s) \in \Omega s$$

REFERENCIAS

[1] S.S. Antman and K.B. Jordan (1974/75) "Qualitative aspects of the spatial deformation of non-linearly elastic rods". Proc. of the Royal Soc. of Edimburgh 73, A,5, 1974, 75.

[2] S.S. Antman (1976) "Ordinary differential equations of non-linear Elasticity II : Existence and regularity theory for conservative bo undary value problems". Arch. Rat. Mech Anal. 61, (1976) pp 353-393.

[3] S.S. Antman and H. Brezis: "The existence of orientation preserving deformations in non-linear Elasticity from "Non-linear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt symposium" Vol II pp 1 to 29. Pitman. London 1978.

[4] Coddington and Levinson. "Theory of ordinary differential equations". Mc Graw Hill Book Co. New York 1955.

[5] C.L. Dym. "Stability theory and its aplications to structural mechanics" Ed. Noordhoff. Leyden (1974).

[6] I. Ekeland and R. Teman. "Analyse convexe et problemes variationels". Dunod. Gauthier-Villars. Paris, 1973.

[7] E. Garbayo. "A non-linear operator defined by a linear differential system" (To appear).

[8] E. Garbayo. "Differentiable bijections from any open convex set in R^n onto the whole space R^n" (To appear).

[9] E. Garbayo y M.A. Puigví. "Nota sobre la regla de la cadena para operadores". (To appear).

[10] S.G. Miklin. "Variational Methods in Mathematical Physics". Pergamon Press. Rochester, New York, 1971.

[11] A.A. Movcham, "The direct methods of Liapunov in stability problems of elastic systems". Appl. Math. Mech. vol 23, pp 686-700, 1959.

[12] W. Rudin. Analisis funcional. Reverté, 1979.

[13] M.M. Vainberg. "Variational Methods for the study of Non-linear Operators". Holden-Day Inc. San Francisco, 1964.

Emilio Garbayo
Departamento de Matemáticas
E.T.S. de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica
de Madrid

Maria Angels Puigví
Departament de Matemàtiques
E.T.S. d'Enginyers de Camins
Jordi Girona Salgado, 31
08034 Barcelona.
Tel: 204 82 52, ext. 236