ESPACIOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS CUYAS DIFERENCIALES SE EXTIENDEN EN EL ORIGEN

por

DOMINGO GARCÍA RODRÍGUEZ

SUMMARY

If Ω is a non empty convex open subset of a Silva space E with the origin in its boundary and F is a Fréchet space, we study the spaces of holomorphic mappings from Ω into F such that its differentials can be continuously extended to the origin. These spaces are compared with the spaces of holomorphic mappings with asymptotic expansion at the origin.

Si Ω es un conjunto no vacio, convexo y abierto de un espacio de Silva E con el origen en su frontera y F es un espacio de Fréchet, estudiamos los espacios de aplicaciones holomorfas de Ω en F tales que sus diferenciales pueden ser extendidas continuamente en el origen. Estos espacios son comparados con los espacios de aplicaciones holomorfas con desarrollo asintótico en el origen.

Todos los espacios vectoriales usados aquí estan definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. En lo que sigue, la palabra "espacio" quiere decir "espacio localmente convexo separado".

Un espacio es de Silva si es el dual fuerte de un espacio de Fréchet-Schwartz y, entonces, existe una sucesión fundamental $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos absolutamente convexos y acotados de E, tal que si E_{B_n} denota la envoltura lineal de B_n, normado con el funcional de Minkowski de B_n, denotado por $\|\cdot\|_n$, E_{B_n} es un espacio de Banach y B_n es un compacto en el espacio de Banach $E_{B_{n+1}}$. Para la nomenclatura referimos a (3). Si $u \in \mathcal{L}^s(^qE,F)$ y $x\in E$ escribimos $u(x^q)$ para $u(x, \overset{q)}{\ldots}, x)$. Dada $f\in H(\Omega,F)$ y dado $\xi\in\Omega$, a los polimonios de Taylor de f en ξ, $1/k!\ \hat{d}^k f(\xi)$, los denotaremos por $a_k(f)[\xi]$.

Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

Sea Ω un subconjunto abierto, convexo y no vacío de un espacio de Silva E, tal que el origen pertenece a la frontera de Ω, denotada por $\partial\Omega$, y sea F un espacio completo. Consideramos los siguientes subespacios de $H(\Omega,F)$:

$\mathcal{A}(\Omega,F) = \{ f \in H(\Omega,F)$: f posee desarrollo asintótico en el origen $\}$. (véase (5)).

$\mathcal{B}(\Omega,F) = \{ f \in H(\Omega,F)$: existe el límite de $a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^kE,F), \mathcal{T}_0)$ para $k = 0,1,2,\ldots$, cuando ξ converge al origen en el espacio de Banach E_{B_n}, con $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}\}$.

Es claro que, en la definición de las funciones de $\mathcal{B}(\Omega,F)$, el límite de $a_k(f)[\xi]$, $k = 0,1,2,\ldots$, cuando $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$ tiende al origen en el espacio de Banach E_{B_n}, no depende de $n \in \mathbb{N}$. Dicho límite será denotado por $a_k(f) \in \mathcal{P}(^kE,F)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Denotamos $\mathcal{A}(\Omega)$ y $\mathcal{B}(\Omega)$ a los espacios anteriores cuando F sea el cuerpo $\mathbb{C}$.

Teorema 1.

$f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$ *sí, y sólo si,* $w \circ f \in \mathcal{B}(\Omega)$, *para todo* $w \in F'$. *Además, se tiene que,* $w \circ a_k(f) = \lim a_k(w \circ f)[\xi]$ *en* $(\mathcal{P}(^kE), \mathcal{T}_0)$ *cuando* $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$ *tiende al origen para la norma* $\|\cdot\|_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $k = 0,1,2,\ldots$, *y todo* $w \in F'$.

Demostración: Sea $f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$. Obviamente, $w \circ f$ es holomorfa de Ω en $\mathbb{C}$ y puesto que $a_k(w \circ f)[\xi] = w \circ a_k(f)[\xi]$, $\xi \in \Omega$, $k = 0,1,2,\ldots$, $w \in F'$ (véase (1) Prop. 2.9), se tiene que $w \circ f \in \mathcal{B}(\Omega)$, para todo $w \in F'$.

Recíprocamente, sea $w \circ f$ holomorfa para todo $w \in F'$. Como E es un espacio de Silva y, por tanto, un (DFM)-espacio, se tiene que $H(\Omega,F) = H(\Omega,F(\sigma(F,F')))$, y, así, $f \in H(\Omega,F)$. Ahora, resta probar que existe el límite de $a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^kE,F), \mathcal{T}_0)$ para $k = 0,1,2,\ldots$, cuando $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$ converge al origen en el espacio de Banach E_{B_n}, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para una sucesión $(\xi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ en $\Omega \cap E_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que converge al origen en el espacio E_{B_n}, probaremos que $(a_k(f)[\xi_\ell])_{\ell \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathcal{P}(^kE,F), \mathcal{T}_0)$.

Sabemos que existe el límite de $a_{k+1}(w \circ f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^{k+1}E), \mathcal{T}_0)$ para $w \in F'$, cuando $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$ converge al origen en E_{B_n}, $n \in \mathbb{N}$; luego dado $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant n$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\xi \in \Omega \cap E_{B_n} \cap \{\xi \in E_{B_n} : \|\xi\|_n < \delta\}$ se tiene $\|a_{k+1}(w \circ f)[\xi]\|_{B_r} = \sup_{z \in B_r} |a_{k+1}(w \circ f)[\xi](z)| \leqslant M_w$, donde $M_w \in \mathbb{R}$.

Sean $y \in \Omega \cap E_{B_n} \cap \{\xi \in E_{B_n} : \|\xi\|_n < \delta\}$ y $0 < \lambda \leqslant 1$ fijos. Así, $\lambda y \in \Omega \cap E_{B_n} \cap \{\xi \in E_{B_n} : \|\xi\|_n < \delta\}$. Teniendo en cuenta la serie de Taylor de $\hat{d}^k(w \circ f)$ en λy, resulta que $\sup_{z \in B_r} | \hat{d}^k(w \circ f)(\eta)(z) - \sum_{m=0}^{\ell} \hat{d}^k(a_{k+m}(w \circ f)[\lambda y])(\eta - \lambda y)(z) |$ converge a cero, cuando ℓ tiende a ∞, uniformemente en $\eta \in V$, donde V es algún entorno abierto de λy. Luego $\sup_{z \in B_r} | \hat{d}^k(w \circ f)((\lambda +$

$+ h)y)(z) \quad \sum_{m=0}^{\ell} h^m \, \hat{d}^k(a_{k+m}(w \circ f)[\lambda y])(y)(z) \mid$ converge a cero cuando ℓ tiende a ∞ uniformemente en el abierto $W = \{ h \in \mathbb{C} : (\lambda + h)y \in V \}$.

Dado $z \in B_r$ fijo, la función $\Phi(\alpha) = \hat{d}^k(w \circ f)(\alpha y)(z)$ definida de $H = \{ \alpha \in \mathbb{C} : \alpha y \in \Omega \}$ en $\mathbb{C}$ y tal que $\Phi(0) = k!\ a_k(w \circ f)(z)$ cumple que su derivada m-ésima en λ, $m \in \mathbb{N}$, es $\Phi^{(m)}(\lambda) = \hat{d}^k(a_{k+m}(w \circ f)[\lambda y])(y)(z)$.

Sabemos que $| \Phi(1) - \Phi(0) | \leqslant \sup_{\lambda \in]0,1[} | \Phi'(\lambda) |$ y, así, $| a_k(w \circ f)[y](z) -$
$- a_k(w \circ f)(z) | = 1/k! \ | \Phi(1) - \Phi(0) | \leqslant 1/k! \sup_{\lambda \in]0,1[} | \hat{d}^k(a_{k+1}(w \circ f)[\lambda y])$
$(y)(z) | = \binom{k+1}{k} \sup_{\lambda \in]0,1[} | A_{k+1}(w \circ f)[\lambda y](y)(z^k) |$, con $\hat{A}_{k+1}(w \circ f)[\lambda y] =$
$= a_{k+1}(w \circ f)[\lambda y]$, por (1) Obs. 1.8, y, de esta forma, $| a_k(w \circ f)[y](z)$
$- a_k(w \circ f)(z) | \leqslant (k+1)\ M_w \ \| y \|_n$.

Como podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que $(\xi_\ell)_{\ell \geqslant N_o} \subset \{ \xi \in E_{B_n} : \| \xi \|_n <$
$< \delta \}$, tenemos que para $p,q \geqslant N_o$ $| a_k(w \circ f)[\xi_p](z) \quad a_k(w \circ f)[\xi_q](z) | \leqslant$
$\leqslant (k+1)\ M_w (\| \xi_p \|_n + \| \xi_q \|_n)$, luego $| w((\| \xi_p \|_n + \| \xi_q \|_n)^{-1} (a_k(f)[\xi_p](z)$
$- a_k(f)[\xi_q](z))) | \leqslant (k+1)\ M_w$, para todo $p,q \geqslant N_o$. Por tanto,
$\{ (\| \xi_p \|_n + \| \xi_q \|_n)^{-1} (a_k(f)[\xi_p](z) \quad a_k(f)[\xi_q](z)) : p,q \in \mathbb{N}, z \in B_r \}$
es un conjunto débilmente acotado y, así, acotado en F. De esta manera, dada p_j una seminorma continua de F, se tiene que

$$\sup_{z \in B_r} p_j(a_k(f)[\xi_p](z) - a_k(f)[\xi_q](z)) \leqslant C_j (\| \xi_p \|_n + \| \xi_q \|_n),$$

con $C_j \in \mathbb{R}$, $r \geqslant n$. Así, $(a_k(f)[\xi_\ell])_{\ell \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathcal{P}(^kE,F), \mathcal{T}_o)$. Es obvio que el límite es el mismo para toda sucesión en $\Omega \cap E_{B_n}$.

Trivialmente, la segunda parte del teorema se cumple.

Q.E.D.

A continuación enunciamos la siguiente proposición, (véase (2) Prop. 1.4.1), que más tarde utilizaremos:

Proposición 2.

Sea F *un espacio. Sea* $\Phi : [0,1] \to F$ *una aplicación infinitamente diferenciable en* $[0,1]$. *Entonces se tiene que para todo* $k = 0,1,2,\ldots$, $\Phi(1) = \Phi(0) + 1/1!\ \Phi'(0) + \ldots + 1/k!\ \Phi^{(k)}(0) + \int_0^1 1/k!\ (1 \quad t)^k \ \Phi^{(k+1)}(t)\, dt$.

Proposición 3.

$\mathcal{B}(\Omega,F)$ *es un subconjunto de* $\mathcal{A}(\Omega,F)$.

Demostración: Sea $f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$, $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$ fijado. Definimos $\Phi : [0,1] \to F$, de la siguiente manera, $\Phi(\lambda) = f(\lambda \xi)$, para $0 < \lambda \leqslant 1$ y $\Phi(0) = a_o(f)$. Fácilmente, Φ es continua.

Sea λ fijo, tal que $0 < \lambda \leqslant 1$. Sea p_j una seminorma continua sobre F, entonces existe un entorno abierto V de $\lambda\xi$ tal que $p_j(f(\eta) - \sum_{m=0}^{\ell} a_m(f)[\lambda\xi](\eta - \lambda\xi))$ converge a cero cuando ℓ tiende a ∞ uniformemente en $\eta \in V$. Sea $W = \{h \in \mathbb{C} : (\lambda + h) \in V\}$, que es un entorno abierto del origen. Llamando ψ a la aplicación definida de $\{z \in \mathbb{C} : z\xi \in \Omega\}$ en F por $\psi(z) = f(z\xi)$, se tiene que $p_j(\psi(h + \lambda) - \sum_{m=0}^{\ell} h^m a_m(f)[\lambda\xi](\xi))$ converge a cero cuando ℓ tiende a ∞ uniformemente en $h \in W$. Por la inicidad del desarrollo de Taylor, $1/m!\ \psi^{(m)}(\lambda) = a_m(f)[\lambda\xi](\xi)$, para $0 < \lambda \leqslant 1$. Pero en $]0,1]$ las funciones ψ y Φ coinciden, luego $1/m!\ \Phi^{(m)}(\lambda) = a_m(f)[\lambda\xi](\xi)$, $0 < \lambda \leqslant 1$ y $m=0,1,2,\ldots$, y también $\lim_{\lambda \to 0^+} 1/m!\ \Phi^{(m)}(\lambda) = a_m(f)(\xi)$, $m=0,1,2,\ldots$, con lo que llamamos $\Phi^{(m)}(0) = m!\ a_m(f)(\xi)$, $m=0,1,2,\ldots$

Teniendo en cuenta la proposición 2, $\Phi(1) = \Phi(0) + 1/1!\ \Phi'(0) + \ldots + 1/k!\ \Phi^{(k)}(0) + \int_0^1 1/k!\ (1-t)^k\, \Phi^{(k+1)}(t)\, dt$, para $k=0,1,2,\ldots$, así, con p_j una seminorma continua sobre F, es claro que $p_j(f(\xi) - a_0(f) - a_1(f)(\xi) - \ldots - a_k(f)(\xi)) \leqslant (k+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} p_j(a_{k+1}(f)[\lambda\xi](\xi)) \leqslant$

$$\leqslant (k+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} \| a_{k+1}(f)[\lambda\xi] \|_{p_j, B_n} \ \| \xi \|_n^{k+1},$$

donde $\| a_{k+1}(f)[\lambda\xi] \|_{p_j, B_n} = \sup_{x \in B_n} p_j(a_{k+1}(f)[\lambda\xi](x))$.

Debido a que existe el límite de $a_{k+1}(f)[\eta]$ en $(\mathcal{P}(^{k+1}E.F), \mathcal{T}_o)$ cuando $\eta \in \Omega \cap E_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge a cero en el espacio de Banach E_{B_n}, existe un entorno $V_{n,j}^{k+1}$ de cero en E_{B_n}, tal que $\| a_{k+1}(f)[\eta] \|_{p_j, B_n} \leqslant M$, para todo $\eta \in V_{n,j}^{k+1} \cap \Omega$. Con $A_q(f) \in \mathcal{L}^s(^qE.F)$, $q=1,2,\ldots$, tal que $\hat{A}_q(f) = a_q(f)$, $A_o(f) = a_o(f)$, y llamando $\mathcal{E}_{n,k,f}(\xi) = \| \xi \|_n^{-k} (f(\xi) - A_o(f) - A_1(f)(\xi) - \ldots - A_k(f)(\xi^k))$, $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$, $k=0,1,2,\ldots$, resulta que $\mathcal{E}_{n,k,f}(\xi)$ converge a cero en F cuando $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge a cero en el espacio de Banach E_{B_n}. Por tanto $f \in \mathcal{A}(\Omega,F)$.

Q.E.D.

NOTA.

En general $\mathcal{B}(\Omega,F)$ y $\mathcal{A}(\Omega,F)$ son distintos (véase (6) Teor. I-A.1.1).

Teorema 4.

Sobre el espacio $\mathcal{B}(\Omega,F)$ no existe ninguna topología que le dote de estructura de espacio de Fréchet y que implique la convergencia puntual.

Demostración: Supongamos que existe una tal topología sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$, que podemos suponer definida por una sucesión creciente de seminormas $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n \leqslant \ldots$.

Podemos tomar $\varphi \in E'$ tal que $|\varphi(x)| > 0$ para todo $x \in \Omega$. Tenemos, así, que $\varphi(\Omega)$ es un abierto convexo de $\mathbb{C}$ con $0 \in \partial\varphi(\Omega)$. Sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $\partial\varphi(\Omega)$ que converge a cero.

Consideramos $b_n(x) = a \quad (\varphi(x) - z_n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$ y $a \in F$ fijado. Veamos que $b_n \in \mathcal{B}(\Omega,F)$, $n \in \mathbb{N}$. Debido a que $\varphi(x) \neq z_n$, para todo $x \in \Omega$, tenemos que $b_n \in H(\Omega,F)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\xi \in \Omega$, podemos escribir $b_n(x) = a \quad (\varphi(x) \quad \varphi(\xi) + \varphi(\xi) \quad z_n)^{-1} = a \quad (\varphi(x - \xi) \cdot (z_n \quad \varphi(\xi)))^{-1} = a \quad \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^m(x \quad \xi)$ $(z_n - \varphi(\xi))^{-m}$, siendo esto válido en el abierto $V(\xi) = \{x \in \Omega : |\varphi(x - \xi)| < < 1/2 \quad |z_n - \varphi(\xi)|\}$, y como dada una seminorma continua q en F, la convergencia de la seria anterior es uniforme en $V(\xi)$, por la unicidad del desarrollo de Taylor, se tiene que $a_k(b_n)[\xi] = \quad a \quad ((z_n - \varphi(\xi))^{-1} \quad \varphi)^k$. De esta manera, existen los límites de $a_k(b_n)[\xi]$ cuando $\xi \in \Omega \cap E_{B_m}$, $m \in \mathbb{N}$, converge a cero en el espacio de Banach E_{B_m}, para $n \in \mathbb{N}$, en $(\mathcal{P}(^kE,F), \mathcal{T}_0)$, $k=0,1,2,\ldots$, pues dado H un compacto de E y q una seminorma continua de F, se tiene que

$q(\quad a \quad ((z_n \quad \varphi(\xi))^{-1} \quad \varphi)^k(x) + a\,(z_n^{-1} \quad \varphi)^k(x)) =$
$= q(a \quad (z_n^{-k} \cdot (z_n \quad \varphi(\xi))^{-k})\,\varphi^k(x)) \leqslant M \quad |z_n^{-k} \quad (z_n - \varphi(\xi))^{-k}|$,

siendo $M > 0$ tal que $\sup_{x \in H} q(a \quad \varphi^k(x)) = M$

Formamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 + q_n(b_n))^{-1} \quad b_n$. Esta converge, ya que para todo $r \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geqslant r} 2^{-n} \quad (1 + q_n(b_n))^{-1} \quad q_r(b_n) \leqslant \sum_{n \geqslant r} 2^{-n}$, luego llamando $g(x)$ a la suma puntual, se tiene que $g \in \mathcal{B}(\Omega,F)$. Esto nos conduce a una contradicción, pues $g \notin \mathcal{A}(\Omega,F)$, como se probó en (5) Theor. 4.

Q.E.D.

En adelante F será un espacio de Fréchet cuya topología viene definida por la familia de seminormas $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots$ Dotamos a $\mathcal{B}(\Omega,F)$ de la topología localmente convexa $\mathcal{T}'$ cuya base de entornos del origen viene dada por los conjuntos:

$W(K,m,n,r) = \{ f \in \mathcal{B}(\Omega,F) : \sup_{x \in K} p_m(f(x)) \leqslant 1$ y para todo entero q tal que $0 \leqslant q \leqslant r \quad \sup_{\xi \in K \cap B_n} \| a_q(f)[\xi] \|_{p_m, B_n} \leqslant 1 \}$, donde $K \subset \Omega \cup \{0\}$ es un compacto estrellado respecto al origen, esto es, $\lambda x \in K$ para todo $x \in K$ y todo número real λ con $0 < \lambda \leqslant 1$, tal que $0 \in K$, $m,n \in \mathbb{N}$ y $r=0,1,2,\ldots$, sabiendo que $\| a_q(f)[\xi] \|_{p_m, B_n} = \sup_{x \in B_n} p_m(a_q(f)[\xi](x))$.

Para la definición de $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{A}(\Omega,F)$, véase (5).

Proposición 5.

La topologia $\mathcal{T}'$ sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$ es más fina que la inducida por $(\mathcal{A}(\Omega,F),\mathcal{T})$.

Demostración: Sea $V = \left\{ f \in \mathcal{B}(\Omega,F) : \sup_{x \in K} p_m(f(x)) \leqslant 1 \text{ y para todo q} \right.$ entero tal que $0 \leqslant q \leqslant r$ se tiene

(1) $\sup_{x \in B_n} p_m(A_q(f)(x^q)) \leqslant 1$

(2) $\left. \sup_{x \in K \cap B_n} p_m(\mathcal{E}_{n,q,f}(x)) \leqslant 1 \right\}$,

con K compacto de $\Omega \cup \{0\}$, $0 \in K$, K estrellado respecto al origen, $n,n \in \mathbb{N}$, $r=0,1,2,\ldots$, la intersección de un entorno básico del origen de $\mathcal{T}$ con $\mathcal{B}(\Omega,F)$.
Construimos

$W = \left\{ f \in \mathcal{B}(\Omega,F) : \sup_{x \in K} p_m(f(x)) \leqslant 1 \text{ y para todo q entero con} \right.$ $\left. 0 \leqslant q \leqslant r+1 \quad \sup_{\xi \in K \cap B_n} \|a_q(f)[\xi]\|_{p_m, B_n} \leqslant 1 \right\}$.

Veamos que $(r+1)^{-1} W \subset V$. Sea $f \in W$, y $0 \leqslant q \leqslant r$, se tiene $\sup_{x \in B_n} p_m(a_q(f)[\lambda\xi](x)) \leqslant 1$, para $\xi \in K \cap B_n$ fijado y $0 < \lambda \leqslant 1$, pues $\{ \lambda\xi : 0 < \lambda \leqslant 1 \} \subset K \cap B_n$. Haciendo tender λ a cero y teniendo en cuenta que $\hat{A}_q(f) = a_q(f)$, resulta que

$$\sup \left\{ p_m(A_q(f)(x^q)) : x \in B_n , 0 \leqslant q \leqslant r \right\} \leqslant 1 \leqslant r+1 .$$

Por último, con $\xi \in K \cap B_n$ se tiene

$$p_m(\mathcal{E}_{n,q,f}(\xi)) = p_m(\|\xi\|_n^{-q} (f(\xi) - \sum_{i=0}^{q} A_i(f)(\xi^i))) \leqslant$$

$$\leqslant (q+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} \| a_{q+1}(f)[\lambda\xi] \|_{p_m, B_n} \quad \|\xi\|_n \text{ , según proposición 3.}$$

Así, $\sup \{ p_m(\mathcal{E}_{n,q,f}(\xi)) : \xi \in K \cap B_n , 0 \leqslant q \leqslant r \} \leqslant$

$\leqslant (r+1) \quad \sup \{ \| a_{q+1}(f)[\lambda\xi] \|_{p_m, B_n} : \lambda \in [0,1] , \lambda \in K \cap B_n , 0 \leqslant q \leqslant r \} \leqslant$

$\leqslant (r+1) \quad \sup \{ \| a_\ell(f)[\xi] \|_{p_m, B_n} : \xi \in K \cap B_n , 0 \leqslant \ell \leqslant r+1 \} \leqslant r+1$.

Q.E.D.

Veremos seguidamente que $(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}')$ es un espacio completo. Así, por el teorema 4, no puede ser metrizable.

EXTENSION DE DIFERENCIALES EN EL ORIGEN A TRAVES DE SUCESIONES DE COMPACTOS. LOS ESPACIOS $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$.

Dada una sucesión fundamental de compactos de Ω, $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_p \subset \ldots$ denotamos $(K_{\alpha_p})_{p=1}^{\infty}$ a una sucesión de compactos de $\Omega \cup \{0\}$, estrellados respecto al origen, cumpliendo: (a) $0 \in K_{\alpha_p}$, (b) $\Delta_p \subset K_{\alpha_p}$, (c)

$K_{\alpha_p} \subset K_{\alpha_{p+1}}$, $p=1,2,\ldots$, con α recorriendo una conjunto de indices Γ infinito no numerable.

Definimos, para $\alpha \in \Gamma$,

$\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F) = \{ f \in H(\Omega,F)$ tal que existe el límite de $a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^kE,F),\mathcal{T}_0)$, $k=0,1,2,\ldots$, cuando $\xi \in K_{\alpha_p} \cap \Omega \cap E_{B_n}$ converge al origen en el espacio E_{B_n}, para todo $n,p \in \mathbb{N} \}$, y le dotamos de la topología localmente convexa $\mathcal{T}'_\alpha$ que admite como base de entornos del origen a los conjuntos $W(K_{\alpha_p},m,n,r)$, $p,m,n \in \mathbb{N}$, $r=0,1,2,\ldots$, definidos anteriormente.

Claramente, el límite de $a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^kE,F),\mathcal{T}_0)$, $k=0,1,2,\ldots$, cuando $\xi \in K_{\alpha_p} \cap \Omega \cap E_{B_n}$ converge a cero en E_{B_n}, no depende de los índices $n,p \in \mathbb{N}$. Dicho límite será denotado por $a_k^\alpha(f)$.

Proposición 6.

$(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$ es un espacio de Fréchet para cada $\alpha \in \Gamma$.

Demostración: Basta ver que es completo. Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$. Esta, es una sucesión de Cauchy en $(H(\Omega,F),\mathcal{T}_0)$, pues $\Delta_\ell \subset K_{\alpha_\ell}$, $\ell=1,2,\ldots$ y, así, existe un f en $H(\Omega,F)$ tal que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a f en $(H(\Omega,F),\mathcal{T}_0)$.

Por (3) Prop. 2.5, la aplicación $1/\ell!\ \hat{d}^\ell$ definida de $(H(\Omega,F),\mathcal{T}_0)$ en $(\mathcal{P}(^\ell E,F),\mathcal{T}_0)$ tal que $1/\ell!\ \hat{d}^\ell(f) = 1/\ell!\ \hat{d}^\ell f(\xi)$, para $\xi \in \Omega$ fijo, es continua. Luego $(1/\ell!\ \hat{d}^\ell f_j(\xi))_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $1/\ell!\ \hat{d}^\ell f(\xi)$ en $(\mathcal{P}(^\ell E,F),\mathcal{T}_0)$, $\ell=0,1,2,\ldots$, $\xi\in\Omega$ fijo, por tanto, $(a_\ell(f_j)[\xi])_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $a_\ell(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^\ell E,F),\mathcal{T}_0)$. para $\xi\in\Omega$, $\ell=0,1,2,\ldots$

Veamos ahora que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a f en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$. Sea $W(K_{\alpha_p},m,n,r)$, $p,m,n \in \mathbb{N}$, $r=0,1,2,\ldots$, un entorno básico del origen en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$. Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j,j' \geq j_0$, se tiene $f_j - f_{j'} \in W(K_{\alpha_p},m,n,r)$, esto es, $\sup\{\|a_q(f_j)[\xi] - a_q(f_{j'})[\xi]\|_{p_m,B_n} : \xi \in K_{\alpha_p}\cap B_n, q=0,1,\ldots,r\} \leq 1$ y $\sup_{x\in K_{\alpha_p}} p_m(f_j(x) - f_{j'}(x)) \leq 1$. Haciendo tender j' a ∞, resulta que $\sup\{\|a_q(f_j)[\xi] - a_q(f)[\xi]\|_{p_m,B_n} : \xi\in K_{\alpha_p}\cap B_n$, $q=0,1,\ldots,r\} \leq 1$ y $\sup_{x\in K_{\alpha_p}} p_m(f_j(x) - f(x)) \leq 1$.

Finalmente, $f \in \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, pues la convergencia uniforme de $(a_q(f_j)[\xi])_{j\in\mathbb{N}}$ a $a_q(f)[\xi]$ en $K_{\alpha_p}\cap B_n$, demuestra que existe el límite de $a_q(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^qE,F),\mathcal{T}_0)$, $q=0,1,2,\ldots$, cuando $\xi\in K_{\alpha_p}\cap\Omega\cap E_{B_n}$ converge a cero en E_{B_n}, $n,p\in\mathbb{N}$.

Q.E.D.

Proposición 7.

Si F es un espacio de Fréchet-Montel, entonces $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$ *también lo es, para todo* $\alpha \in \Gamma$.

Demostración: Dada una sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ acotada en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$, probaremos que se puede extraer una subsucesión de Cauchy y, por tanto, convergente en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$.

Los espacios $(H(\Omega,(\mathcal{P}(^qE,F),\mathcal{T}_0)),\mathcal{T}_0)$ son de Fréchet-Montel, por ser $(\mathcal{P}(^qE,F),\mathcal{T}_0)$ de Fréchet-Montel, $q=0,1,2,\ldots$, así por un procedimiento diagonal, obtenemos una subsucesión $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $(a_q(g_j)\,[\cdot])_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre los compactos de Ω y simplemente en el origen, para $q=0,1,\ldots$. Llamamos $a_q(g_j)\,[\cdot]$ en el origen a $a_q^\alpha(g_j)$.

Dado K_{α_p}, $p\in\mathbb{N}$, sea $n_{\alpha_p}\in\mathbb{N}$, tal que $K_{\alpha_p}\subset E_{B_n}$, $n\geqslant n_{\alpha_p}$ y K_{α_p} es un compacto en E_{B_n}. Siendo $n\geqslant n_{\alpha_p}$, sea $W(K_{\alpha_p},m,n,r)$, $m\in\mathbb{N}$, $r=0,1,2,\ldots$, un entorno básico del origen en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$. Como existe el límite de $a_q^\alpha(g_j)$ cuando j tiende a ∞ en $(\mathcal{P}(^qE,F),\mathcal{T}_0)$, $q=0,1,2,\ldots$, entonces existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que si $j,j'\geqslant j_0$, se cumple $\sup\limits_{0\leqslant q\leqslant r}\|a_q^\alpha(g_j)-a_q^\alpha(g_{j'})\|_{p_m,B_n}\leqslant 1/3$.

Sean $\xi\in K_{\alpha_p}\cap B_n$ y $z\in B_n$ fijos. Formamos $\psi(\alpha)=\hat{d}^q g_j(\alpha\xi)(z)$, $j\in\mathbb{N}$, definida de $\{\alpha\in\mathbb{C}:\alpha\xi\in\Omega\}$ en F. Procediendo como en la prueba del teorema 1, obtenemos que $1/\ell!\quad\psi^{(\ell)}(\lambda)=\hat{d}^q(a_{q+\ell}(g_j)\,[\lambda\xi])\,(\xi)\,(z)$, $\ell=0,1,2,\ldots$, $0<\lambda\leqslant 1$.

Definiendo $\Phi(\lambda)=\psi(\lambda)$, $\lambda\in]0,1]$ y $\Phi(0)=q!\quad a_q^\alpha(g_j)\,(z)$, tenemos $p_m(\Phi(1)-\Phi(0))\leqslant\sup\limits_{\lambda\in]0,1[}p_m(\Phi'(\lambda))$, con lo que $p_m(a_q(g_j)\,[\xi]\,(z)$ - $-\,a_q^\alpha(g_j)\,(z))\leqslant\binom{q+1}{q}\sup\limits_{\lambda\in]0,1[}p_m(\hat{A}_{q+1}(g_j)\,[\lambda\xi]\,(\xi)\,(z^q))$, donde $\hat{A}_{q+1}(g_j)\,[\lambda\xi]=a_{q+1}(g_j)\,[\lambda\xi]$, luego $\|a_q(g_j)\,[\xi]\quad a_q^\alpha(g_j)\|_{p_m,B_n}\leqslant$ $\leqslant(r+1)\quad M\quad\|\xi\|_n$, donde M es una constante mayor que cero tal que $\sup\{\|a_q(g_j)\,[y]\|_{p_m,B_n}:y\in K_{\alpha_p}\cap B_n,\ 0\leqslant q\leqslant r+1,\ j\in\mathbb{N}\}\leqslant M$, ya que $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$. Con todo esto, existe $\delta>0$, tal que si $\|\xi\|_n<\delta$, $\xi\in K_{\alpha_p}\cap B_n$, resulta $\sup\limits_{0\leqslant q\leqslant r}\|a_q(g_j)\,[\xi]-a_q^\alpha(g_j)\|_{p_m,B_n}\leqslant 1/3$, para todo $j\in\mathbb{N}$. Obtenemos así, que para $0\leqslant q\leqslant r$, $\|\xi\|_n<\delta$, $\xi\in K_{\alpha_p}\cap B_n$, se tiene $\|a_q(g_j)\,[\xi]-a_q(g_{j'})\,[\xi]\|_{p_m,B_n}\leqslant 1$, para todo $j,j'\geqslant j_0$.

Además, $K_{\alpha_p}\cap B_n\cap\{\xi\in E_{B_n}:\|\xi\|_n\geqslant\delta\}$ es un compacto en E_{B_n}, luego compacto de Ω, y lo mismo para $K_{\alpha_p}\cap\{\xi\in E_{B_n}:\|\xi\|_n\geqslant 1\}$, con lo que teniendo en cuenta que $a_0(g_j)\,[\xi]=g_j(\xi)$, $\xi\in\Omega$, $j\in\mathbb{N}$, se completa la prueba.

Q.E.D.

$(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}')$ COMO LIMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$

La siguiente proposición es sencilla:

Proposición 8.
$\mathcal{B}(\Omega,F)$ es la intersección de todos los $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, $\alpha\in\Gamma$.

Consideramos las inyecciones canónicas I'_α, $\alpha\in\Gamma$, de $(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}')$ en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$, que, claramente, son continuas.

Dados α y β en Γ, tomamos las sucesiones de compactos $(K_{\alpha_m})_{m\in\mathbb{N}}$ y $(K_{\beta_m})_{m\in\mathbb{N}}$. Si definimos $K_{\gamma_m} = K_{\alpha_m} \cup K_{\beta_m}$ para $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(K_{\gamma_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es tal que $\gamma\in\Gamma$ y $\mathcal{B}_\gamma(\Omega,F) \subset \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F) \cap \mathcal{B}_\beta(\Omega,F)$. Esto permite dotar al conjunto de índices Γ del siguiente orden parcial :

$\alpha\leqslant\beta$ sí, y sólo si, $K_{\alpha_m} \subset K_{\beta_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Considerando las inyecciones continuas I'_{α_β} de $(\mathcal{B}_\beta(\Omega,F),\mathcal{T}'_\beta)$ en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$, $\alpha\leqslant\beta$, obtenemos :

Teorema 9.
$(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}')$ es el límite proyectivo de los espacios $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$ bajo las aplicaciones I'_{α_β}, $\alpha,\beta\in\Gamma$.

Demostración: Podemos identificar cada $f\in\mathcal{B}(\Omega,F)$ con $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \in \prod_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ tal que para todo $\alpha\in\Gamma$, $f=f_\alpha$. Claramente, $\mathcal{B}(\Omega,F) =$
$= \varprojlim I'_{\alpha_\beta}(\mathcal{B}_\beta(\Omega,F))$. Veamos que $\mathcal{T}'$ es la mínima topología que hace continuas a las aplicaciones I'_α, para todo $\alpha\in\Gamma$. Sea $K\subset\Omega\cup\{0\}$, un compacto que contenga al origen y que, además, sea estrellado respecto al origen. Entonces existe $\beta\in\Gamma$, $\ell\in\mathbb{N}$, tal que $K_{\beta_\ell}\supset K$. Sean $W(K,m,n,r)$ y $W(K_{\beta_\ell},m,n,r)$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r=0,1,2,\ldots$. Si $\mathcal{T}_1$ es una topología sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$ que hace continuas a las I'_α, $\alpha\in\Gamma$, obtenemos que $I'^{-1}_\alpha(W(K_{\beta_\ell},m,n,r))$ es un entorno del origen en $(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}_1)$ pero $I'^{-1}_\alpha(W(K_{\beta_\ell},m,n,r))\subset W(K,m,n,r)$, luego $\mathcal{T}'$ es menos fina que $\mathcal{T}_1$.

Q.E.D.

Corolario 10.
$(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}')$ es completo.

Corolario 11.
Los subconjuntos compactos de $(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}')$ son metrizables.

Corolario 12.

Si F *es un espacio de Fréchet-Montel, entonces* $(\mathcal{B}(\Omega,F),\mathcal{T}')$ *es semirreflexivo.*

COMPARACION DE $(\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}_\alpha)$ Y $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$.

Sea $(K_{\alpha_p})_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos con $\alpha\in\Gamma$. Tenemos los espacios $(\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}_\alpha)$ (véase (5)) y $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\mathcal{T}'_\alpha)$, $\alpha\in\Gamma$.

Proposición 13.

$\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ *es un subconjunto de* $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$, $\alpha\in\Gamma$, *siendo* F *un espacio.*

Demostración: Es similar a la prueba de la proposición 3.

Q.E.D.

NOTA.

En general, $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$ y $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ son distintos, (véase (6) Prop. II-A.2.2).

De la misma forma que la proposición 5, podemos probar:

Proposición 14.

La topología $\mathcal{T}'_\alpha$ *sobre* $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ *es más fina que la inducida por* $\mathcal{T}_\alpha$, $\alpha\in\Gamma$.

NOTA.

Cuando F es un espacio de Fréchet, la coincidencia conjuntista de $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$ y $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, lleva a la igualdad de topologías $\mathcal{T}_\alpha$ y $\mathcal{T}'_\alpha$ por el teorema del homomorfismo entre espacios de Fréchet.

BIBLIOGRAFIA

(1) BARROSO, J.A.: Introducción a la holomorfía entre espacios localmente convexos. Publicaciones de la Universidad de Valencia, 1980.

(2) BONET, J.: Representaciones de espacios de funciones con valores vectoriales. Tesis. Valencia. 1980.

(3) DINEEN, S.: Complex analysis in locally convex spaces. North Holland Math. Studies. 57, 1981.

(4) GARCIA RODRIGUEZ. D.: Holomorfía y desarrollos asintóticos en dimensión infinita. Tesis. Valencia, 1984.

(5) GARCIA RODRIGUEZ, D.: Spaces of holomorphic mappings with asymptotic expansion in infinite dimensions. Proc. Roy. Irish Acad. (to appear).

(6) HERRERO, C.: Espacios de funciones holomorfas cuyas derivadas se extienden por continuidad en un punto de la frontera del dominio y su relación con los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico. Tesis. Valencia, 1979.

(7) VALDIVIA, M.: Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. Rev. Real Acad. C. Exactas. Madrid. LIX, 3 (1965), 339-378.

(8) VALDIVIA. M.: Representación de espacios de distribuciones y funciones continuas. Universidad de Valencia. I.C.E. 1980.

(9) VALDIVIA, M.: Topics in locally convex spaces. North Holland Math. Studies. 67, 1982.

Domingo García Rodríguez
Dpto. Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
C/. Dr. Moliner, 50
BURJASOT (Valencia)