SOBRE M-TONELACION Y DUAL LOCAL COMPLETITUD EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS CON VALORES VECTORIALES PROVISTOS DE LA TOPOLOGIA DE LA CONVERGENCIA PUNTUAL

por

JOSÉ L. HUESO Y JOAQUÍN MOTOS

ABSTRACT

In this article we give conditions on $C_s(X)$ and $E[\mathfrak{T}]$ for $C(X, E)[\mathfrak{T}_s]$ to be m-barreled (dual locally complete) and we obtain the m-barrelled topology associated to $\mathfrak{T}_s$ in terms of the m-barrelled topology associated to $\mathfrak{T}$ when $C_s(X)$ is a barrelled space.

Si E es un espacio localmente convexo, se denota por E^* el dual algebraico y por E' el dual topológico de E. El dual de E provisto de la topología débil $\sigma(E', E)$ se denota abreviadamente por E'_σ. Si X es un espacio topológico completamente regular y $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo, $C(X, E)$ es el espacio de las funciones continuas de X en $E[\mathcal{T}]$. Denotamos por $\mathfrak{T}$ una topología localmente convexa sobre E más fina que $\mathcal{T}$ y por $\mathfrak{T}_s$ la topología sobre $C(X, E)$ de la convergencia puntual asociada a $\mathfrak{T}$. $C_s(X)$ es el espacio de las funciones escalares continuas en X con la topología de la convergencia puntual. El dual de $C(X, E)[\mathfrak{T}_s]$ admite la siguiente representación ([7], p. 123): si Π es una forma lineal continua sobre $C(X, E)[\mathfrak{T}_s]$ existe un subconjunto A finito de X y para cada x de A una forma lineal no nula $e'_{\Pi x}$ $\mathfrak{T}$-continua sobre E tales que para cada $\phi \in C(X, E)$

$$\Pi \phi = \sum_{x \in A} \langle \phi(x), e'_{\Pi x} \rangle$$

Esta representación es única y el conjunto A se llama el soporte de la funcional H: sop H. Si $x \notin$ sop H pondremos $e'_{Hx} = 0$. Si B es un subconjunto del dual de $C(X, E)$ $[\mathfrak{J}_s]$ el soporte de B es por definición el conjunto sop B = $= \cup \{\text{sop } H, H \in B\}$.

Decimos que un espacio localmente convexo E es *m-tonelado* (ver [4], [5] y [6]) si todo subconjunto absolutamente convexo acotado y metrizable de E'_σ es equicontinuo en E.

Si B es un subconjunto absolutamente convexo acotado de E, denotamos por E_B la envoltura lineal de B en E con la norma del calibrador de B. Se dice que una sucesión $(e_n, n \in \mathbb{N})$ de elementos de E es *localmente Cauchy (localmente convergente)* en E, si es de Cauchy en E_B (convergente) para algún absolutamente convexo acotado B de E. Se dice que E es *localmente completo* si para todo absolutamente convexo cerrado acotado B, E_B es un espacio de Banach. Esto equivale a que toda sucesión localmente Cauchy en E sea convergente ([3], p. 197). Un espacio localmente convexo es *dual localmente completo* si su dual débil E'_σ es localmente completo. Todo espacio tonelado es obviamente m-tonelado y todo espacio m-tonelado es dual localmente completo. En [2] se prueba que para $C_s(X)$ estas nociones coinciden por ser siempre $C_s(X)$ casi tonelado y se demuestra que $C_s(X)$ es tonelado si y sólo si todo acotado de X es finito.

Proposición 1: *$C(X, E)$ $[\mathfrak{J}_s]$ es m-tonelado si y sólo si $C_s(X)$ y $E[\mathfrak{J}]$ son m-tonelados.*

Demostración: ($\leftarrow$) Llamamos C al espacio $C(X, E)$ $[\mathfrak{J}_s]$. Sea B un subconjunto absolutamente convexo acotado y metrizable de C'_σ. Para ver que B es equicontinuo basta probar que sop B es finito y que para cada x de sop B, el conjunto $B_x = \{e'_{Hx}, H \in B\}$ es equicontinuo en $E[\mathfrak{J}]$ ([7], p. 127). El sop B es acotado en X ([7], p. 126), luego es finito pues $C_s(X)$ es tonelado por hipótesis. Para concluir es suficiente probar que para cada x de sop B, B_x es absolutamente convexo acotado y metrizable en $(E[\mathfrak{J}])'_\sigma$.

Sea f_x una función escalar continua en X tal que $f_x(x) = 1$ y $f_x(y) = 0$ para todo $y \in$ sop $B \sim \{x\}$, y sea

$$u : E[\mathfrak{J}] \to C : e \to f_x \otimes e$$

La transpuesta ${}^t u : C'_\sigma \to (E[\mathfrak{J}])'_\sigma$ es continua y ${}^t u(B) = B_x$, luego B_x es acotado. Consideramos ${}^t u : C^*_\sigma \to E^*_\sigma$. La completación $B^* = \overline{B}^{\sigma(E^*, E)}$ de B es un compacto metrizable. Entonces ([1], p. 159) ${}^t u(B^*)$ es compacto y metrizable y así $B_x \subset {}^t u(B) \subset {}^t u(B^*)$ resulta ser metrizable.

($\rightarrow$) El directo es inmediato observando que $C_s(X)$ y $E[\mathfrak{J}]$ son imagen topológicamente homomorfa de C y haciendo un razonamiento similar al del final del recíproco. Se puede dar otra prueba utilizando el teorema de gráfica cerrada de Kalton ([4]): sea F un espacio de Banach separable y u : $E[\mathfrak{T}] \to F$ una aplicación lineal de gráfica cerrada. La aplicación $T_x : C \to E[\mathfrak{T}] : \phi \to \phi(x)$ es lineal y continua. luego la compuesta $u_0 T_x : C \to F$ es de gráfica cerrada y continua por el teorema de gráfica cerrada de Kalton. Entonces si V es un entorno de cero en F, $U = (u_0 T_x)^{-1}(V) = T_x^{1}(u^{-1}(V))$ es un entorno de cero en C y $T_x(U)$ es un entorno de cero en $E[\mathfrak{T}]$ por ser T_x abierta. Como $u^{-1}(V)$ contiene a $T_x(U)$, es entorno de cero en $E[\mathfrak{T}]$ y u es continua. Por tanto $E[\mathfrak{T}]$ es m-tonelado. Con $C_s(X)$ se razona análogamente.

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo y sea $\mathcal{E}$ la familia de las topologías localmente convexas $\mathcal{T}'$ sobre E más finas que $\mathcal{T}$ y tales que $E[\mathcal{T}']$ es m-tonelado. Esta familia es no vacía ya que la topología localmente convexa más fina $\mathcal{T}^*$ sobre E pertenece a $\mathcal{E}$ pues $E[\mathcal{T}^*]$ es tonelado. El límite inductivo $E[\mathcal{T}_{mt}] = \lim\limits_{\mathcal{T}'\in\mathcal{E}} E[\mathcal{T}']$ es un espacio m-tonelado. $\mathcal{T}_{mt} \supset \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_{mt} \subset \mathcal{T}'$ para toda $\mathcal{T}' \in \mathcal{E}$. Estas propiedades caracterizan a $\mathcal{T}_{mt}$. Se llama a $\mathcal{T}_{mt}$ la topología m-tonelada asociada a $E[\mathcal{T}]$.

Esta topología también se puede construir por inducción transfinita. Dado $E[\mathcal{T}]$ consideramos sobre E la topología $\mathcal{T}_1$ de la convergencia uniforme sobre los $\mathcal{T}$-equicontinuos y los absolutamente convexos acotados metrizables de $(E[\mathcal{T}])'_\sigma$. Evidentemente $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ y todo absolutamente convexo acotado metrizable de $(E[\mathcal{T}])'_\sigma$ es $\mathcal{T}_1$-equicontinuo. Definimos análogamente $\mathcal{T}_2$ a partir de $\mathcal{T}_1$ y procedemos así para todo ordinal α que tenga predecesor. Si α es un ordinal límite se define $\mathcal{T}_\alpha$ como la topología localmente convexa generada por $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{T}_\alpha$. Para todo ordinal α se tiene que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\alpha$ y que todo absolutamente convexo acotado metrizable en $(E[\mathcal{T}_\alpha])'_\sigma$ es $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ -equicontinuo.

Lema:

(a) Existe el primer ordinal δ tal que $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}_{\delta+1}$.

(b) $\mathcal{T}_\delta$ es la topología m-tonelada asociada a $E[\mathcal{T}]$.

Demostración:

(a) La prueba de la existencia del ordinal δ es análoga a la de [7], p. 19, pero se incluye por razones de completitud. Si para todo ordinal α, $\mathcal{T}_\alpha$ fuera estrictamente menos fina que $\mathcal{T}_{\alpha+1}$, existiría un $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ -entorno de cero absolutamente convexo V_α que no sería $\mathcal{T}_\alpha$ -entorno de cero. Sea γ el cardinal de la familia Γ de los subconjuntos absolutamente convexos de E, y ϕ la aplicación del segmento de ordinales $[0,2^\gamma[$ en Γ tal que $\phi(\alpha) = V_\alpha$. Por hipótesis ϕ es inyectiva, luego card $[0,2^\gamma[= 2^\gamma \leqslant$ card $\Gamma = \gamma$ lo cual es absurdo.

(b) Por las notas previas al lema es obvio que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\delta$ y que $E[\mathcal{T}_\delta]$ es m-tonelado, luego $\mathcal{T}_\delta \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{T}_{mt} \subset \mathcal{T}_\delta$. Para la inclusión contraria veremos por inducción transfinita que $\mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}_{mt}$ para todo ordinal α. Si α tiene predecesor, $\mathcal{T}_\alpha$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos absolutamente convexos acotados metrizables de $(E[\mathcal{T}_{\alpha-1}])'_\delta$ y sobre los $\mathcal{T}_{\alpha-1}$ equicontinuos. Por hipótesis de inducción $\mathcal{T}_{mt} \supset \mathcal{T}_{\alpha-1}$, luego tales conjuntos serán absolutamente convexos acotados metrizables de $(E[\mathcal{T}_{mt}])'_\sigma$ o bien $\mathcal{T}_{mt}$-equicontinuos. Como $E[\mathcal{T}_{mt}]$ es m-tonelado, en todo caso serán $\mathcal{T}_{mt}$-equicontinuos, por tanto $\mathcal{T}_{mt} \supset \mathcal{T}_{\alpha-1}$. Si α es un ordinal límite, $\mathcal{T}_{mt} \supset \mathcal{T}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$, luego por definición $\mathcal{T}_{mt} \supset \mathcal{T}_\alpha$. En definitiva $\mathcal{T}_{mt} \supset \mathcal{T}_\delta$ y se tiene la igualdad.

En el caso del espacio de funciones vectoriales continuas tenemos

Proposición 2: *Si $C_s(X)$ es tonelado, la topología m-tonelada asociada a* $C(X, E)[\mathfrak{T}_s]$ *es* $\mathfrak{T}_{mt,s}$, *siendo* $\mathfrak{T}_{mt}$ *la topología m-tonelada asociada a* $E[\mathfrak{T}]$.

Demostración: Damos una prueba directa y otra que usa la construcción transfinita de la topología m-tonelada asociada.

(a) Sea $\mathfrak{T}_{s,mt}$ la topología m-tonelada asociada a $C(X, E)[\mathfrak{T}_s]$. Veremos que $\mathfrak{T}_{s,mt} = \mathfrak{T}_{mt,s}$. Por la Proposición 1, $C(X, E)[\mathfrak{T}_{mt,s}]$ es m-tonelado. Como $\mathfrak{T}_{mt}$ es más fina que $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_{mt,s}$ es más fina que $\mathfrak{T}_s$, luego por definición $\mathfrak{T}_{mt,s} \supset \mathfrak{T}_{s,mt}$. Para ver la otra inclusión basta probar que la identidad

$$j : C(X, E)[\mathfrak{T}_{s,mt}] \to C(X, E)[\mathfrak{T}_{mt,s}]$$

es continua.

Por definición de $\mathfrak{T}_{mt,s}$ esto equivale a demostrar que para cada $x \in X$, la aplicación

$$T_x : C(X, E)[\mathfrak{T}_{s,mt}] \to E[\mathfrak{T}_{mt}] : T_x(\phi) = \phi(x)$$

es continua.

Sea $\mathfrak{T}_x$ la topología localmente convexa más fina sobre E que hace continua la aplicación $T_x : C(X, E)[\mathfrak{T}_{s,mt}] \to E$. $\mathfrak{T}_x$ es más fina que $\mathfrak{T}$ pues $T_x : C(X, E)[\mathfrak{T}_{s,mt}] \to E[\mathfrak{T}]$ es continua y $E[\mathfrak{T}_x]$ es m-tonelado al ser imagen homomorfa de un espacio m-tonelado, luego $\mathfrak{T}_x \in \mathcal{E}$ y por tanto $\mathfrak{T}_x$ es más fina que $\mathfrak{T}_{mt}$. Sea $\mathcal{S}$ el ínfimo de las topologías $\mathfrak{T}_x$ al variar x en X. es más fina que $\mathfrak{T}_{mt}$ y para todo $x \in X$

$$T_x : C(X, E)[\mathfrak{T}_{s,mt}] \to E[\mathcal{S}]$$

es continua, luego a fortiori

$$T_x : C(X, E)[\mathfrak{F}_{s,mt}] \to E[\mathfrak{F}_{mt}]$$

es continua para todo $x \in X$, y se tiene la conclusión.

(b) Para cada ordinal α sean $\mathfrak{F}_{s,\alpha}$ y $\mathfrak{F}_\alpha$ las topologías construidas a partir de $\mathfrak{F}_s$ y $\mathfrak{F}$ como en las notas precedentes al Lema y sea δ el primer ordinal tal que $\mathfrak{F}_\delta = \mathfrak{F}_{mt}$. Basta ver que $\mathfrak{F}_{\delta,s} = \mathfrak{F}_{s,\delta}$. Para ello demostraremos por inducción transfinita que para todo ordinal α, $\mathfrak{F}_{s,\alpha} = \mathfrak{F}_{\alpha,s}$. Sea α un ordinal con predecesor. $\mathfrak{F}_{s,\alpha}$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los absolutamente convexos acotados metrizables de $(C(X, E)[\mathfrak{F}_{s,\alpha-1}])'_\sigma$ y sobre los $\mathfrak{F}_{s,\alpha-1}$-equicontinuos. Por hipótesis de inducción $\mathfrak{F}_{s,\alpha-1} = \mathfrak{F}_{\alpha-1,s}$. Si B es un subconjunto absolutamente convexo acotado y metrizable de $(C(X, E)[\mathfrak{F}_{s,\alpha-1}])'_\sigma$ o un $\mathfrak{F}_{s,\alpha-1}$-equicontinuo, razonando como en la Proposición 1 se prueba que el soporte de B es finito y que para cada $x \in \text{sop } B$, $B_x = \{e'_{H\,x}, H \in B\}$ es absolutamente convexo acotado metrizable en $(E[\mathfrak{F}_{\gamma-1}])'_\sigma$ o $\mathfrak{F}_{\alpha-1}$-equicontinuo, luego por definición de δ_α es $\mathfrak{F}_\alpha$-equicontinuo. En consecuencia, B es $\mathfrak{F}_{\alpha,s}$-equicontinuo. Por tanto $\mathfrak{F}_{s,\alpha} \subset \mathfrak{F}_{\alpha,s}$. Sea ahora un $\mathfrak{F}_{\alpha,s}$-entorno de cero en $C(X,E)$, $U = \{\phi: \phi(A) \subset V\}$ con A finito $\subset X$ y V entorno de cero en $E[\mathfrak{F}_\alpha]$. Podemos suponer que V es la intersección de los polares de los miembros B de una familia finita $\mathcal{B}$ de conjuntos de $E[\mathfrak{F}_{\alpha-1}]'$ y cada B es absolutamente convexo acotado metrizable de $(E[\mathfrak{F}_{\alpha-1}])'_\sigma$ o equicontinuo en $E[\mathfrak{F}_{\alpha-1}]$. Sea x un elemento de A. La aplicación

$$T_x : C(X, E)[\mathfrak{F}_{\alpha-1,s}] \to E[\mathfrak{F}_{\alpha-1}] : \phi \to \phi(x)$$

es continua, luego

$$^tT_x : (E[\mathfrak{F}_{\alpha-1}])'_\sigma \to (C(X, E)[\mathfrak{F}_{\alpha-1,s}])'_\sigma$$

también lo es. Si B es absolutamente convexo acotado metrizable de $(E[\mathfrak{F}_{\alpha-1}])'$, consideramos $^tT_x : E^*_\sigma \to C(X, E)^*_\sigma$. La completación B^* de B es compacto metrizable en E^*_σ luego $^tT_x(B^*)$ es compacto metrizable en $C(X, E)^*_\sigma$. $^tT_x(B)$ es un subconjunto de $^tT_x(B^*)$ luego es metrizable. Por continuidad de ^tT_x, $^tT_x(B)$ es acotado en $(C(X, E)[\mathfrak{F}_{\alpha-1,s}])'_\sigma$ que es igual por hipótesis de inducción a $(C(X, E)[\mathfrak{F}_{s,\alpha-1}])'_\sigma$ luego por definición, $\mathfrak{F}_{s,\alpha}$-equicontinuo. Si B es $\mathfrak{F}_{\alpha-1,s}$-equicontinuo es $\mathfrak{F}_{s,\alpha-1}$-equicontinuo luego también $\mathfrak{F}_{s,\alpha}$-equicontinuo. Así pues $^tT_x(B)^\circ$ es en ambos casos entorno de cero en $C(X, E)[\mathfrak{F}_{s,\alpha}]$. Entonces

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \bigcap_{x \in A} (^tT_x(B))^\circ = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \bigcap_{x \in A} T_x^{-1}(B^\circ) = \bigcap_{x \in A} T_x^{-1}\left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B^\circ\right) =$$

$$= \bigcap_{x \in A} T_x^{-1}(V) = \bigcap_{x \in A} \{\phi: \phi(x) \in V\} = U$$

es también $\mathfrak{I}_{s,\alpha}$ -entorno de cero. Si α es un ordinal límite, $\mathfrak{I}_\alpha$ es más fina que $\mathfrak{I}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$ luego $\mathfrak{I}_{\alpha,s}$ es más fina que $\mathfrak{I}_{\beta,s} = \mathfrak{I}_{s,\beta}$ para todo $\beta < \alpha$, por tanto $\mathfrak{I}_{\alpha,s}$ es más fina que $\mathfrak{I}_{s,\alpha}$. Recíprocamente si U es un entorno de cero en $C(X, E)[\mathfrak{I}_{\alpha,s}]$ de la forma $U = \{ \phi : \phi(A) \subset V \}$ con A finito $\subset X$ y V un entorno de cero en $E[\mathfrak{I}_\alpha]$, podemos suponer que V es entorno de cero en $E[\mathfrak{I}_\beta]$ para algún $\beta < \alpha$. Entonces U es $\mathfrak{I}_{\beta,s} = \mathfrak{I}_{s,\beta}$ -entorno de cero. Por tanto $\mathfrak{I}_{s,\alpha} = \mathfrak{I}_{\alpha,s}$ y en particular, $\mathfrak{I}_{s,\delta} = \mathfrak{I}_{\delta,s}$.

Proposición 3: $C(X, E)[\mathfrak{I}_s]$ *es dual localmente completo si y sólo si* $C_s(X)$ *y* $E[\mathfrak{I}]$ *son dual localmente completos.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ $C_s(X)$ y E son imagen homomorfa topológicamente de $C(X, E)[\mathfrak{I}_s]$ luego son dual localmente completos.

$(\Leftarrow)$ Sea $(H_n, n \in \mathbb{N})$ una sucesión localmente Cauchy en $(C(X, E)[\mathfrak{I}_s])'_\sigma = C'_\sigma$. Su soporte S es acotado luego finito por ser $C_s(X)$ tonelado. Para cada $x \in S$ determinamos $f_x \in C(X)$ tal que $f_x(x) = 1$ y $f_x(y) = 0$ si $y \in S \sim \{x\}$. Si llamamos u_x a la aplicación : $E[\mathfrak{I}] \to C$ tal que $u_x(e) = f_x \otimes e$, su transpuesta ${}^t u_x : C'_\sigma \to (E[\mathfrak{I}])'_\sigma$ es continua, y para cada $n \in \mathbb{N}$, ${}^t u_x(H_n) = e'_{H_n x}$, donde $e'_{H_n x} = 0$ si x no está en sop H_n y si $x \in$ sop H_n, $e'_{H_n x}$ es la forma lineal que aparece en la representación de H_n:

$$H_n \phi = \sum_{x \in \operatorname{sop} H_n} < \phi(x), e'_{H_n x} > \text{ para toda } \phi \in C(X, E).$$

Por tanto, la sucesión $(e'_{H_n x}, n \in \mathbb{N})$ es localmente Cauchy en $(E[\mathfrak{I}])'_\sigma$. Por ser $E[\mathfrak{I}]$ dual localmente completo, $(e'_{H_n x}, n \in \mathbb{N})$ converge débilmente a un cierto $e'_{Hx} \in (E[\mathfrak{I}])'$. Definimos ahora $H \in C'_\sigma$ mediante

$$H \phi = \sum_{x \in S} < \phi(x), e'_{Hx} >.$$

Veamos que la sucesión $(H_n, n \in \mathbb{N})$ converge a H en C'_σ. Dados $\phi \in C(X, E)$, $x \in S$ y $\epsilon > 0$, determinamos n_x tal que si $n \geq n_x$ $|< \phi(x), e'_{H_n x} - e'_{Hx} >| < \frac{\epsilon}{p}$, siendo $p = \operatorname{card} S$. Sea $n_0 = \max \{ n_x, x \in S \}$. entonces para todo $n \geq n_0$,

$$|(H_n - H)\phi| \leq \sum_{x \in S} |< \phi(x), e'_{H_n x} - e'_{Hx} >| < p \cdot \frac{\epsilon}{p} = \epsilon ,$$

luego $H_n \to H$ en C'_σ y se tiene la conclusión.

REFERENCIAS

[1] Bourbaki, N.: Elements of Mathematics. General Topology. Part 2. Hermann, Addison-Wesley (1966).

[2] Buchwalter, H.; Schmets, J.: Sur quelques propiétés de l'espace C_s (T). J. Math. Pures et Appl. 52 (1973) 337-352.

[3] Jarchow, H.: Locally convex spaces. B. G. Teubner-Stuttgart (1981).

[4] Kalton, N. J.: Some forms of the closed graph theorem. Proc. Cambridge Phil. Soc. 70 (1971) 401-408.

[5] Motos, J.: Sobre una cierta clase de espacios localmente convexos. Rev. Real Acad. Ciencias Madrid LXIX-4.º (1975) 845-855.

[6] Motos, J.; Hueso, J. L.: Una nota sobre espacios m-tonelados y espacios dual localmente completos. Collectanea Math. Pend. publicación.

[7] Schmets, J.: Espaces de fonctions continues. Lecture Notes in Math. 519 Springer Berlín (1976).